

Beitrag zur Ermittlung der Kerbwirkung an Zahnwellen mit freiem und gebundenem Auslauf

Ali Daryusi



**Institut für Maschinenelemente
und Maschinenkonstruktion
Dresden 2009**

Beitrag zur Ermittlung der Kerbwirkung an Zahnwellen mit freiem und gebundenem Auslauf

Von der Fakultät für Maschinenwesen
der Technischen Universität Dresden

zur

Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Ali Daryusi

geboren am 07.01.1969 in Besnada, Syrien

Tag der Einreichung: 24.01.2008

Tag der Verteidigung: 28.11.2008

Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht	(TU Dresden)
	Prof. Dr.-Ing. Erhard Leidich	(TU Chemnitz)
	Prof. Dr.-Ing. Armin Lohrengel	(TU Clausthal)
Vorsitzender der Promotionskommission:	Prof. Dr.-Ing. habil. Herbert Balke	(TU Dresden)

Dresden 2009

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Maschinenelemente der Technischen Universität Dresden unter Leitung von Herrn Professor Dr.-Ing. Berthold Schlecht.

Große Teile der Arbeit wurden im Rahmen des Forschungsvorhabens Nr. 467 „Profilwellen-Kerbwirkung“ der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) durchgeführt und von der Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen e.V. (AiF) aus Mitteln des Bundeswirtschaftsministeriums BMWi finanziell unterstützt. Hierfür sei herzlich gedankt.

Ich bedanke mich herzlich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht, für die Betreuung und Begutachtung der Arbeit, für die Übernahme der Hauptprüfung sowie für sein Vertrauen in meine selbstständige Arbeit, seine wohlwollende Unterstützung und großzügige, persönliche Förderung bei der erfolgreichen Durchführung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. H. Linke (TU Dresden) und Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Dietz (TU Clausthal), die die Arbeit anregen und ihre Durchführung im Rahmen eines gemeinsamen Forschungsprojektes ermöglichten, danke ich herzlich für die kritischen Hinweise.

Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Leidich (TU Chemnitz) und Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Lohrengel (TU Clausthal) bin ich zu Dank verpflichtet für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse sowie für die freundliche Übernahme des Korreferates.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. H. Balke (TU Dresden) für die Übernahme des Vorsitzes der Promotionskommission.

Die experimentellen Versuche wurden am Institut für Maschinenwesen der Technischen Universität in Clausthal durchgeführt. Hier seien Herrn Dr.-Ing. G. Schäfer, Herrn Dipl.-Ing. Ch. Ring und Herrn Dipl.-Ing. P. Lau für die stets effektive Zusammenarbeit gedankt.

Mein ganz persönlicher Dank gilt außerdem Frau Prof. Dr.-Ing. Iris Römhild (HTW Dresden) und Herrn Dr.-Ing. Michael Senf, dem Oberingenieur des Lehrstuhles, für die wertvollen, fachlichen Diskussionen, Anregungen und Ratschläge während des gesamten Bearbeitungszeitraumes. Ihre wesentliche Unterstützung erleichterte mir die Anfangszeit und die schnelle Einarbeitung in meine Aufgabenbereiche.

Allen Kolleginnen und Kollegen des Lehrstuhles, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben, möchte ich meinen Dank aussprechen.

Meinen 10 Geschwistern und meinen Freunden in Syrien und Deutschland gilt ein herzlicher Dank. Ihre Unterstützung und ihr Verständnis waren mir immer sicher.

**„Die Deutschen machen alles sehr schwer,
für sich und auch für alle anderen.“**

Johann Wolfgang von Goethe

Inhaltsverzeichnis

Übersicht der Formzeichen, Indizes und Abkürzungen	IV
1 Einleitung	1
1.1 Wissenschaftliche Problemstellung	1
1.2 Zielsetzung.....	2
2 Stand der Technik und der bisherigen Forschung	4
2.1 Typische Schadensfälle an Wellen und Zahnwellenverbindungen	4
2.1.1 Schadensfälle bei Zahnwellenverbindungen	4
2.1.2 Besonderheiten bei Wellen mit harter Randschicht	6
2.2 Formschlüssige Profilwellen-Verbindungen	8
2.2.1 Grundlagen	8
2.2.2 Geometrie der Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480.....	9
2.2.3 Auslegung von Zahnwellenverbindungen nach DIN 5466	14
2.2.4 Herstellungsverfahren von Zahnwellenverbindungen.....	18
2.3 Einführung in die numerische Berechnung der Vergleichsspannung	20
2.3.1 Der dreiachsige Spannungszustand	20
2.3.2 Übersicht der wichtigsten Vergleichsspannungshypothesen.....	21
2.4 Theorie über Kerben und Kerbwirkung - Grundlagen und Ansätze	24
2.4.1 Allgemeines über Beschreibung der Einzel- und Mehrfachkerben.....	24
2.4.2 Allgemeines über Formzahlen.....	26
2.4.3 Bezogenes Spannungsgefälle	31
2.4.4 Mikro- und Makrostützwirkung	33
2.4.5 Kerbwirkungszahl.....	35
2.4.6 Bestimmungsmöglichkeiten der Kerbwirkungszahl bzw. der Stützziffer	37
2.4.6.1 Experimentelle Verfahren	37
2.4.6.2 Theoretische Verfahren	37
2.4.6.3 Resümee: Bewertung und Kritikpunkte der Ansätze	44
2.5 Form- und Kerbwirkungszahlen von Profilwellen und von SR-Nuten	47
2.6 Literaturübersicht zu Zahnwellenverbindungen.....	55

3	Numerische Untersuchungen (FEM-Berechnungen).....	62
3.1	Untersuchungsspektrum	62
3.2	FEM-Modellbildung	64
3.2.1	Allgemeines zu den Grundlagen der Finiten-Elemente-Methode FEM.....	64
3.2.2	FEM-Elementtypen	65
3.2.3	Vernetzungsprinzipien zur FE-Modellbildung.....	66
3.2.4	Vorgehensweise zur FE-Modellierung von Zahnwellen mit Auslauf.....	69
3.3	Mechanische Randbedingungen	75
3.3.1	Simulation der torsionsbelasteten Zahnwellen.....	75
3.3.2	Simulation der biegebelasteten Zahnwellen.....	83
3.3.3	Untersuchungen zur Querkraftbiegung	91
3.4	Einfluss von Modellierung und Vernetzung.....	95
3.5	Problematik der Definition der Nennspannungen	105
4	Formzahlberechnung an Zahnwellen mit freiem Auslauf.....	108
4.1	Allgemein	108
4.2	Geometrische Einflussparameter auf die Formzahlberechnung.....	109
4.2.1	Bestimmung des Kerbabstandes.....	109
4.2.2	Einfluss des konischen Übergangswinkels der Verzahnung.....	112
4.2.3	Einfluss der Profilverschiebung	114
4.2.4	Einfluss der Verbindungsbreite	116
4.2.5	Einfluss der Zähnezahl	118
4.2.6	Einfluss des Zahnfußausrundungsverhältnisses	124
4.2.7	Einfluss der Kerbschärfe und der Absatzhöhe	126
4.2.8	Einfluss der Zahnnabe	131
4.3	Analysen und theoretische Ableitungen.....	141
4.3.1	Formzahlvergleich zwischen Wellenabsatz und Zahnwelle	141
4.3.2	Lage und Abklingverhalten der Spannungsmaxima	143
4.3.3	Zusammenhänge zwischen den Formzahlen aus der GEH und der NSH	148
4.3.4	Gestaltungshinweise	155
4.3.5	Entwicklung von Näherungsgleichungen zur Formzahlberechnung	157
4.3.6	Berechnung der bezogenen Spannungsgefälle im freien Auslaufbereich.....	160
5	Formzahlberechnung an Zahnwellen mit gebundenem Auslauf.....	164
5.1	Allgemein	164
5.2	Geometrische Einflussparameter auf die Formzahlberechnung.....	165

5.2.1	Einfluss des Bezugsdurchmessers und der Profilverschiebung.....	165
5.2.2	Einfluss der Zähnezah und der Auslaufradien.....	168
5.2.3	Entwicklung von Näherungsgleichungen zur Formzahlberechnung.....	170
5.3	Einfluss der Sicherungsringnut (Nuttiefe und Nutlage).....	174
5.3.1	Spannungsformzahlverläufe an Zahnwellen mit Sicherungsringnut.....	182
5.3.2	Entwicklung von Näherungsgleichungen zur Formzahlberechnung.....	186
6	Vergleich mit experimentellen Ergebnissen /FVA08/.....	191
6.1	Experimentelles Untersuchungsprogramm.....	191
6.2	Übersicht zu den Versuchsergebnissen.....	194
6.2.1	Werkstoffdaten	194
6.2.2	Auswertung statischer Versuche	195
6.2.3	Auswertung dynamischer Versuche (Ermüdungsversuche).....	201
6.3	Ermittlung der experimentellen Kerbwirkungszahlen	206
6.4	Anwendungshinweise.....	210
7	Zusammenfassung und Ausblick.....	212
7.1	Zusammenfassung	212
7.2	Ausblick	214
8	Literaturverzeichnis.....	215
9	Anlagenverzeichnis	222
9.1	Anlage A	223
9.2	Anlage B.....	235
9.3	Anlage C	242
9.4	Anlage D	258
10	Abbildungsverzeichnis.....	276
11	Tabellenverzeichnis.....	285
	Tabellarischer Lebenslauf	288

Übersicht der Formzeichen, Indizes und Abkürzungen

Formelzeichen	Benennung	Einheit
$\alpha_k, \alpha_\sigma, \alpha_\tau$	Spannungsformzahlen	-
$\alpha_\varepsilon, \alpha_{pl}$	Dehnungsformzahl, plastische Formzahl	-
α	Eingriffswinkel (Flankenwinkel)	°
α_w	Wirkwinkel (<i>nach DIN 5466</i>)	°
$\beta_k, \beta_\sigma, \beta_\tau$	Kerbwirkungszahl	-
Δz	Spannungsabklingabstand	mm
ε	Dehnung	-
η	werkstoffabhängiger Kerbempfindlichkeitsfaktor (<i>nach Thum</i>)	-
ϕ	Konuswinkel am freien Verzahnungsauslauf	°
γ_F	Erhöhungsfaktor der Fließgrenze für Umdrehungskerb	-
γ	Winkel zwischen Spannungsmaximum und Kerbgrund	°
ν	Querkontraktionszahl, Werkstoffkonstante (<i>nach Kogaev</i>)	-
ρ^*	Strukturradius (<i>nach Neuber</i>)	mm
ρ_f	Zahnfußrundungsradius	mm
σ	Spannung (allg.), Normalspannung	N/mm ²
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptnormalspannungen	N/mm ²
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannungskomponenten	N/mm ²
σ_v	Vergleichsspannung	N/mm ²
$\sigma_S, (R_e)$	Streckgrenze	N/mm ²
$\sigma_B, (R_m)$	Zug- bzw. Bruchfestigkeit	N/mm ²
σ_{bF}	Biegefließgrenze	N/mm ²
σ_u, σ_o	Unter- bzw. Oberspannung	N/mm ²
$\sigma_{zd,bAD}, \tau_{tAD}$	Dauerfestigkeit einer ungekerbten polierten Werkstoffprobe	N/mm ²
$\sigma_{zd,bADK}, \tau_{tADK}$	Dauerfestigkeit einer gekerbten Probe	N/mm ²
σ_W, τ_W	Wechselspannung	N/mm ²
τ	Schubspannung	N/mm ²
$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$	Schubspannungskomponenten	N/mm ²
τ_{tF}	Torsionsfließgrenze	N/mm ²
φ_{seg}	Öffnungswinkel eines Zahnwellensegmentes	°
φ	Torsionswinkel	°
φ, φ_f	kerbgeometrieabhängiger Faktor	-

A, A_{zd}, A_q	Querschnittsfläche bei Zuck/Druck, bei Querkraft, (allg.)	mm^2
$A_{\text{ges.}}$	gesamter Kerbabstand	mm
a^*	kritischer Spannungsabstand	mm
a	Abstand (allg.), Koeffizient zur Berechnung der Kerbwirkungszahl $\beta_{\sigma, \tau}$ an Wellen mit Sicherungsringnuten (<i>nach DIN 743</i>)	mm
a_G, b_G	werkstoffabhängige Konstanten (<i>nach FKM Richtlinie</i>)	-
b	Zahnnabenbreite (Verbindungsbreite)	mm
b/d_B	normierte Zahnbreite (<i>nach DIN 5466</i>)	-
c	Kopfspiel (<i>nach DIN 5480</i>)	mm
c_{h1}, c_{h2}	geometrischer Größenfaktor für Welle und (Nabe) (<i>nach DIN 5466</i>)	-
c_{fl}	Kerbabstand	mm
c_1, c_2, k, m	werkstoffabhängige Kennwerte (<i>nach Dietmann</i>)	-
D	allgemeiner Wellen-Außendurchmesser	mm
d	(Wellen-) Durchmesser (Absatz), Teilkreisdurchmesser	mm
d_{a1}, d_{a2}	Wellen-(Naben)-Kopfkreisdurchmesser	mm
d_b	Grundkreisdurchmesser	mm
d_B	Bezugsdurchmesser der Zahnwellen (<i>nach DIN 5480</i>) bzw. der Werkstoffprobe (<i>nach DIN 743</i>)	mm
d_B/m	normierter Bezugsdurchmesser (Bezugsdurchmesserverhältnis)	-
d_{BK}	Kerb-Proben-Bezugsdurchmesser (<i>nach DIN 743</i>)	mm
d_{e2}	Naben-Außendurchmesser	mm
d_{eff}	effektiver Durchmesser	mm
d_{f1}, d_{f2}	Wellen-(Naben)-Fußkreisdurchmesser (<i>nach DIN 5480</i>)	mm
d_{Ff1}, d_{Ff2}	Wellen-(Naben)-Fußformkreisdurchmesser (<i>nach DIN 5480</i>)	mm
D_F	Außendurchmesser der Nabe mit Schulter (<i>nach Schöpf</i>)	mm
d_{h1}, d_{h2}	Wellen-(Naben)-Ersatzdurchmesser zur Berechnung des Trägheitsmoments (<i>nach DIN 5466</i>)	mm
d_{hw1}	Ersatzdurchmesser für Zahnwellen mit freiem Auslauf	mm
d_i	Innendurchmesser	mm
$d_{SRN}, (d)$	Sicherungsring-Nutgrunddurchmesser	mm
d_w	(Wellen-) Durchmesser (Zahnwelle)	mm
$d_{W-\text{max}}$	größter zulässiger Wellendurchmesser bei Zahnwellen	mm
E	Elastizitätsmodul	N/mm^2
E_{ht}	Einsatzhärtetiefe	mm
F	Kraft (allg.), Flankennormalkraft	N
F_{ax}, F_{zd}	Axialkraft, Zugkraft	N

F_r	Radialkraft	N
$F_q, (Q)$	Querkraft	N
$F_u, (F_t)$	Tangentialkraft	N
F_0	Ähnlichkeitsfaktor (<i>nach TGL 19340</i>)	-
$f_{W,\tau}$	Schubwechselfestigkeitsfaktor (<i>nach FKM-Richtlinie</i>)	-
$f_1, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_3$	Koeffizienten zur Bestimmung der Formzahlen (<i>nach Melzer</i>)	-
G	- Schubmodul	N/mm^2
	- Spannungsgefälle	N/mm^3
G^*	bezogenes Spannungsgefälle	mm^{-1}
H	- Härte (allg. Härte nach Vickers oder Brinellhärte)	HV
	- ideeller Hebelarm (<i>nach DIN 5466</i>)	mm
$h_p, (h_f)$	Zahnhöhe	mm
h_{a0}	Werkzeugkopfhöhe	mm
h_w	wirksame Flankenberührungshöhe in radialer Richtung	mm
h_k	Kopfkantenbruch (<i>nach DIN 5480</i>)	mm
I_t	axiales Flächenträgheitsmoment bei Torsion	mm^4
K_{2F}	statische Stützwirkung bzw. Makrostützwirkung (<i>nach DIN 743</i>)	-
$K_{1(def)}$	technologischer Größeneinflussfaktor	-
$K_2(d)$	geometrischer Größeneinflussfaktor (für die ungekerbte Probe)	-
$K_3(d)$	geometrischer Größeneinflussfaktor (für die Kerbwirkungszahl)	-
$K_{F\sigma}, K_{F\tau}$	Einflussfaktor der Oberflächenrauheit	-
K_V	Einflussfaktor der Oberflächenverfestigung	-
$K_{\sigma,\tau}$	Gesamteinflussfaktor (Biegung bzw. Zug/Druck und Torsion)	-
$K'_{\sigma,\tau}$	Gestalteinflussfaktor (<i>nach TGL 19340</i>)	-
k_b	Tragbreitenfaktor (bzw. Lastüberhöhungsfaktor) (<i>nach DIN 5466</i>)	-
L	wirksame Länge (<i>nach TGL 19340</i>), Anrissstreckenlänge, Modelllänge	mm
L_N	geometrische Position der Belastung	mm
l_w, l	Hebelarmlänge, Länge (allg.)	mm
L_{z-min}	minimale Verzahnungslänge	mm
m	- Modul	mm
	- Sicherungsring-Nutbreite an Wellen	mm
M	Moment (allg.)	Nm
$M_t, (T)$	Drehmoment	Nm
M_b	Biegemoment	Nm

n	- dynamische Stützwirkung, Mikrostützwirkung bzw. Stützzahl - Bundbreite der Sicherungsringsnut (<i>nach DIN 471</i>)	- mm
N	Schwingspielzahl, Nutenanzahl	-
r, R	Kerbradius (Absatz), Radius (allg.)	mm
R	Spannungsverhältnis	-
r_b	Grundkreisradius (<i>nach DIN 5466</i>)	mm
r_f	fiktiver Kerbradius (modifizierter Strukturradius) (<i>nach Neuber</i>)	mm
r_m	Flankenmittenradius (<i>nach DIN 5466</i>)	mm
$r_{SRN}, (r)$	Sicherungsrings-Nuteckenradius	mm
r_w	- Werkzeugkopfradius, Auslaufradius (gebunden und frei) - Wirkradius (<i>nach DIN 5466</i>)	mm mm
p_{max}	maximale Flankenpressung	N/mm ²
p_{nenn}	Nenn-Flankenpressung, Nenn-Flächenpressung (auf Nutwand)	N/mm ²
s	dimensionsloser Faktor der Stützwirkung (<i>nach Neuber</i>)	-
S_B, S_S	erforderliche Sicherheitsfaktoren	-
s_{Fn}	Zahnfußdicke	mm
s_n	Zahndicke am Teilkreis	mm
t	Kerbtiefe beim Wellenabsatz	mm
t_{a1}, t_{f1}	Kerbtiefe bei der Zahnwelle mit freiem Auslauf	mm
$t_{SRN}, (t)$	Sicherungsrings-Nuttiefe	mm
t_{relev}	relevante Tiefe (<i>nach Melzer</i>)	mm
T_s	Spannungstensor	-
W_b, W_t	Widerstandsmoment bei Biegung bzw. bei Torsion	mm ³
x	Tiefe normal zur Oberfläche, Axialkoordinate	mm
x_1	Profilverschiebungsfaktor bei Zahnwellen (<i>nach DIN 5480</i>)	-
$x \cdot m$	Profilverschiebung (<i>nach DIN 5480</i>)	mm
x, y, z	- allgemeine Variablen in Gleichungen - Achsenbezeichnung im kartesischen Koordinatensystem	- -
z	Zähnezahl	-

Indizes

0	- Nabenlage (0)	1	- Nabenlage (1)
1	- Welle	2	- Nabe
σ	- Normalspannung	τ	- Schubspannung
a	- Verbindungsanfang	b	- Biegung
d	- durchmesserabhängig	D	- Druckseite
D	- Dauerfestigkeit	DIN	- DIN (-Wert bzw. -Norm)
G	- Eisenwerkstoffe	GEH	- Gestaltänderungsenergiehypothese
ges	- gesamt	Grenz	- Grenzwert
K	- gekerbtes Bauteil	Kern	- Werte im Kern des Bauteils
max	- Maximalwert	min	- Minimalwert
nenn	- Nennwert	NSH	- Normalspannungshypothese
q	- Querschub	r	- kerbradiusabhängig
Rand	- Werte am Rand des Bauteils	relev	- relevant
pl	- plastisch	seg	- Segment
SSH	- Schubspannungshypothese	St	- Stahl
t	- Torsion	v	- Vergleichs-
u	- ungekerbt	u	- ungestörter Wellenbereich
Z	- Zugseite	zd	- Zug/Druck
zul	- zulässig	ZW	- Zahnwelle

Abkürzungen

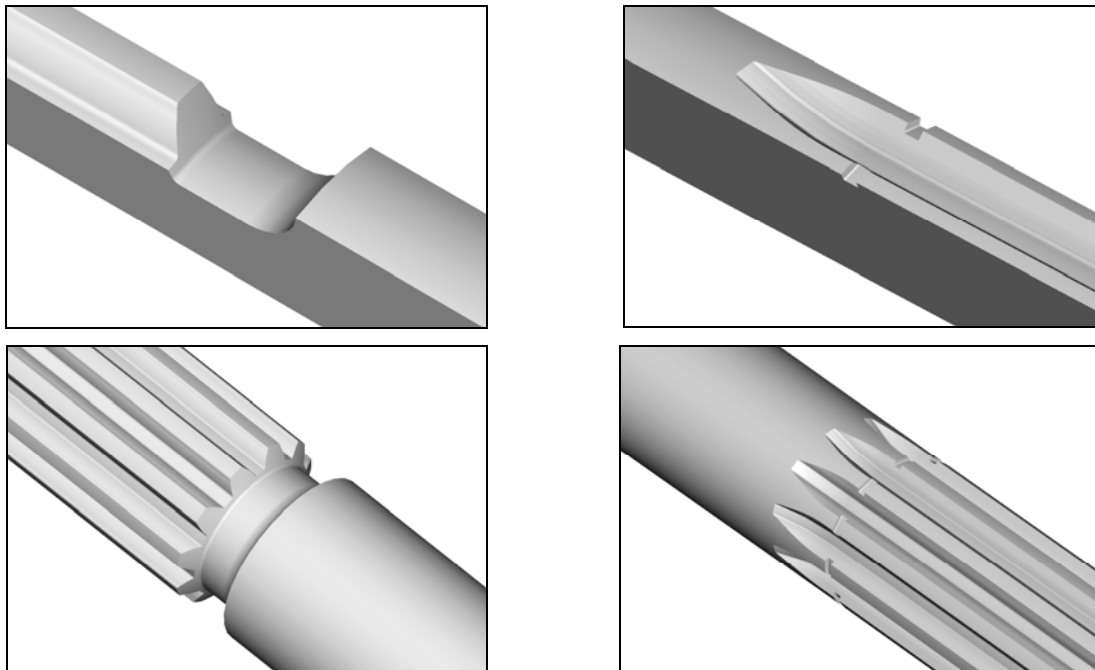
BEM	Boundary Element Methode	CAD	Computer Aided Design
FE	Finite Elemente	FEM	Finite Elemente Methode
GEH	Gestaltänderungsenergiehypothese	Hex	Hexaeder
IGES	Initial Graphic Exchange Specification	IMM	Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion der TU Dresden
IMW	Institut für Maschinenwesen der TU Clausthal	MPC	Multi Point Constraint
NSH	Normalspannungshypothese	NL	Nabenlage
SR	Sicherungsring	SRN	Sicherungsringnut
SSH	Schubspannungshypothese	Tet	Tetraeder
TU	Technische Universität	WNVen	Welle-Nabe-Verbindungen
ZWen	Zahnwellen	ZWVen	Zahnwellenverbindungen

1 Einleitung

1.1 Wissenschaftliche Problemstellung

Durch die zunehmende technologische Entwicklung des Getriebe-, Gelenkwellen-, Werkzeugmaschinen-, Kraftfahrzeug-, sowie Landmaschinenbaus steigen die zu übertragenden Leistungen und Drehmomente enorm. Dies führt zu einem wachsenden Bedarf an formschlüssigen Profilwellenverbindungen und deren erhöhter Lebensdauer und Genauigkeit. Hierbei bilden die Zahnwellenverbindungen (ZWVen) mit Evolventenflanken nach *DIN 5480 /N1/* den Regelfall für eine Vielzahl der Anwendung.

Abhängig von Festigkeitsüberlegungen, Herstellungsverfahren und Platzbedarf treten in der Praxis nahezu ausschließlich die folgenden zwei Grundtypen auf, wie in **Bild 1.1** dargestellt. Es handelt sich dabei zum Ersten um die Zahnwelle (ZW) mit freiem Auslauf (*Bild 1.1-a*). Die zweite Geometrievariante ist die Zahnwelle mit gebundenem Auslauf, die eine nach *DIN 471 /N2/* genormte Sicherungsringnut (SRN) enthalten kann (*Bild 1.1-b*).



a) mit freiem Auslauf ohne Sicherungsringnut

b) mit gebundenem Auslauf und Sicherungsringnut

Bild 1.1: CAD-Modelle der zu untersuchenden Zahnwellen

Zahnwellenverbindungen dienen zur Übertragung großer, wechselnder und stoßartiger Drehmomente ohne zusätzliches Verbindungselement durch die Profilierung der Welle und Nabe. Axiale Verschiebbarkeit unter Last, Profilverschiebungsmöglichkeit, einfache Montage und Demontage sowie die Herstellung mit hochleistungsfähigen umformenden und spanenden Massenfertigungsverfahren, die die Herstellungskosten verhältnismäßig niedrig halten, sind technisch bedeutsame Eigenschaften, die zum ansteigenden Einsatz von ZWVen führen (z.B. */N1/*, */Vil84/*, */Koh86/* und */Wes96/*). Starke Kerbwirkung und erhebliche Überdimensionierung benachbarter Gestaltungszonen sind die wesentlichen Schwachpunkte der Profilverbindungen.

Eine große Anzahl (ca. 80 %) von Ausfällen im Maschinenbau ist auf Schäden an Achsen und Wellen infolge konstruktiv bedingter Kerben zurückzuführen (z.B. /N3/ und /Hai89/). Speziell im Bereich der hochbeanspruchten Profilwellen-Verbindungen kommt es auf Grund der starken Querschnittsveränderungen und der häufig angewandten Ausläufe und Formelemente, z. B. Zahn- und Keilwellen zu Kerbwirkungen, die erhebliche örtliche Spannungskonzentrationen sowohl im Zahnfußbereich und Zahnlückenauslauf als auch im Bereich der Verbindung selbst verursachen.

Diese Beanspruchungskonzentrationen sind fast in der Hälfte aller Zahnwellenbrüche die häufigste Ursache für Dauerbrüche (Ermüdungs- bzw. Schwingungsbrüche) und für Schäden (bleibende Verformung, Anriss, Gewaltbruch) infolge Maximalbelastung. Hier trifft die Lastüberhöhung am Welle-Nabe-Verbindungsrand mit dem Steifigkeitssprung des Verzahnungsendes auf der Welle zusammen /Die93/. Die erwähnten Schadensfälle belegen, dass der heutige Kenntnisstand über eine beanspruchungsgerechte Auslegung von Zahnwellen noch recht lückenhaft ist. Deshalb sind neue Erkenntnisse über Form- bzw. Kerbwirkungszahlen bei Einzel- und Mehrfachkerben von scharf und weniger scharf gekerbten Zahnwellen mit Auslauf für eine treffsichere Festigkeitsberechnung erforderlich und stellen damit die Hauptschwerpunkte dieser Arbeit dar.

Das vorliegende Forschungsprojekt, welches sich erstmals mit der Ermittlung der Beanspruchungen in torsions-, und biegebelasteten Zahnwellen mit freiem und gebundenem Auslauf befasst, wurde im Rahmen der Forschungsvereinigung für Antriebstechnik e.V. (FVA) unter der Nummer T 467 und dem Forschungsthema „Ermittlung der Kerbwirkung bei Profilwellen für die praktische Getriebeberechnung von Zahnwellen“ initiiert und untersucht.

1.2 Zielsetzung

Obgleich die Kenntnis der festigkeitsmindernden Einflüsse der Zahn- und Keilwellenverbindungen infolge des Verzahnungsauslaufs in die glatte Welle für den Konstrukteur außerordentlich wichtig ist, lagen bisher über die Kerbwirkung von dieser Art von hochbeanspruchten Profilwellenverbindungen keine systematischen Untersuchungen und keine ausreichend gesicherten, anwendungsbereiten Ergebnisse vor. Dies ist offenbar darin begründet, dass die Auslaufgeometrie veränderlich ist und eine Mehrfachkerbwirkung vorliegt. Zugleich ist festzustellen, dass die Kerbwirkungszahlen, die in den Lehrbüchern (z.B. /Nie01/, /Die92/, /Kol84/) und Normen (z.B. /N3/ und /FKM1/) angegeben sind, auf ältere Quellen zurückzuführen sind und aus heutiger Sicht als dringend überprüfungswürdig erscheinen.

Da eine wissenschaftlich gut begründete Beziehung für die Ermittlung der Formzahlen im Auslaufbereich der ZWVen bei Berücksichtigung der restlichen geometrischen Verzahnungsparameter derzeit nicht existiert, erfolgt die Dimensionierung durch eine grobe Abschätzung der Formzahlen aus den unsicheren Kerbwirkungszahlen unter der Annahme, dass diese in etwa den Formzahlen nach Nakazawa /Nak51/ entsprechen. Diese gelten allerdings nur für den Zahnfußbereich verzahnter Wellen ohne Auslauf. Die in dieser Umrechnung enthaltenen Unsicherheiten müssen durch größere Soll-Sicherheiten abgedeckt werden. Deshalb hat der Konstrukteur dann eine erhebliche Überdimensionierung der Verbindung in Kauf zu nehmen oder die Gefahr eines Dauerbruches einzukalkulieren.

Ziel des vorliegenden Vorhabens ist die Bereitstellung von Form- und Kerbwirkungszahlen. Das Ergebnis dieser Arbeit wird zur Weiterentwicklung und Ergänzung vorhandener Berechnungsvorschriften *DIN 743* /N3/ und *DIN 5466* Teil 1 /N4/ und Teil 2 /N5/ führen. Zum Erreichen der Zielsetzung und zur Lösung der gesamten Problematik sind experimentelle und numerische Untersuchungen notwendig.

Die elastischen Formzahlen mit umfangreichen Parameterstudien sollen auf Basis numerischer Rechnungen mit Hilfe der Finiten-Element-Methode (FEM) für genormte Evolventenzahnwellen nach *DIN 5480* /N1/ mit freiem und gebundenem Auslauf sowie mit genormten SR-Nuten nach *DIN 471* /N2/, (*Bild 1.1*) ermittelt werden. Speziell der Verzahnungsauslaufbereich ist unter genauer Berücksichtigung der Spannungskonzentrationen und ihrer räumlichen Verteilungen zu erfassen. Die gewählten Varianten der Belastungsarten entsprechen den bei Wellen im Normalfall vorherrschenden Biege- oder Torsionsbeanspruchungen.

Die Grundlage für die breite Anwendbarkeit und Übertragbarkeit der Ergebnisse bilden numerische Variantenuntersuchungen. Im Rahmen der numerischen Berechnungen soll der Ermittlung und Analyse der prinzipiellen Zusammenhänge zwischen Formzahlen und Auswirkungen verschiedener Verzahnungs- und Auslaufgeometriegrößen (z.B. Zähnezahl, Zahnfußausrundung, Bezugsdurchmesser, Kerbschärfe, Absatzhöhe, Lage und Tiefe von Sicherungsringnuten etc.) sowie deren Einfluss auf die Kerbwirkung eine erhöhte Aufmerksamkeit gewidmet werden.

Zur Validierung der numerischen Ergebnisse müssen experimentelle statische Untersuchungen und dynamische Dauerfestigkeitsversuche unter Torsions- oder Biegebelastung vom Institut für Maschinenwesen (IMW) der TU Clausthal durchgeführt werden.

Aus den gewonnenen numerischen und experimentellen Untersuchungsergebnissen sollen einfache Näherungsformeln, Diagrammen, Korrekturfaktoren sowie sichere Gestaltungshinweise für den Konstrukteur und den Anwender in der Praxis zur Abschätzung des Formeinflusses und Bestimmung von Form- und Kerbwirkungszahlen für eine beanspruchungsgerechte Gestaltung von Zahnwellen mit freiem und gebundenem Auslauf bereitgestellt werden und die Kenntnisse über ihre Zuverlässigkeit bei der statischen Tragfähigkeitsberechnung wesentlich vertieft und erweitert werden.

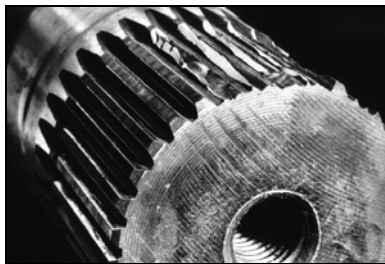
Zur leichteren Handhabung sollen die neu gefundenen Erkenntnisse in die Berechnungsvorschrift *DIN 743* "Tragfähigkeitsnachweis von Achsen und Wellen" /N3/ eingebunden werden. Daher ist eine Orientierung an die übliche Darstellungsform bereits vorhandener Ergebnisse in *DIN 743* von Beginn an notwendig.

2 Stand der Technik und der bisherigen Forschung

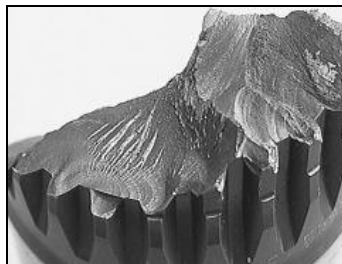
2.1 Typische Schadensfälle an Wellen und Zahnwellenverbindungen

2.1.1 Schadensfälle bei Zahnwellenverbindungen

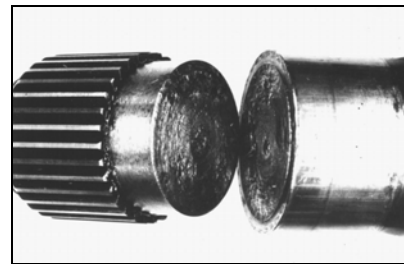
Unter dem Sammelbegriff Schädigung wird eine Minderung der Bauteillebensdauer infolge der Veränderungen in der Werkstoffstruktur sowie in der Bauteilgeometrie verstanden. Die häufigsten Schadensbilder an Achsen und Wellen sind Dauerbrüche, bleibende Verformung, Anriss und Gewaltbruch aber auch Verschleiß und Tribokorrosion (/N3/, /Lin98/). Das Versagen von ZWVen in Fahrzeuggetrieben, Hinterachswellen, Triebsträngen und Lenkungen kann zu schwerwiegenden Unglücksfällen führen. Bei all den in **Bild 2.1** gezeigten Schadensfällen handelt es sich um Brüche, die durch Unterschätzen der Kerbwirkung entstanden. Hierbei spielt die Kerbwirkung im Auslauf- und Zahnfußbereich eine erhebliche Rolle.



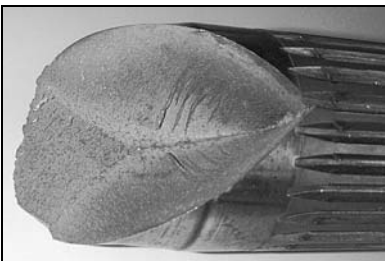
a) Zahnbrüche an einer Zahnwelle mit gebundenem Auslauf



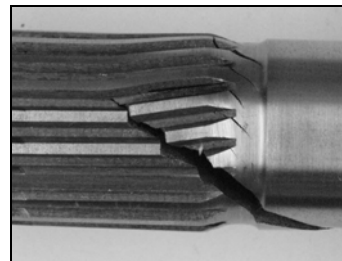
b) Schwingbruch an einer verzahnten Welle



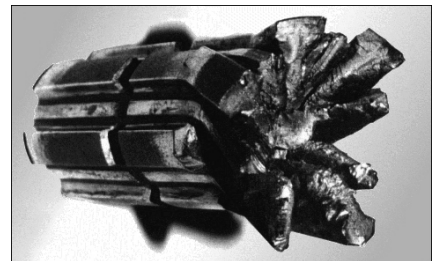
c) Gewaltbruch unter Torsion an einer Zahnwelle mit freiem Auslauf



d) Ermüdungsbruch bei Torsion



e) Zahnwelle - Torsionsbruch



f) Keilwelle (vergütet) - Torsionsbruch

Bild 2.1: Typische, aus der Literatur (/Sch03/, /http/, /Lin98/) entnommene Bilder von Ermüdungsbrüchen an Zahnwellen unter Torsions- und Dauerbeanspruchung

Die wesentlichen nachfolgend aufgeführten Schadensfälle an ZWVen wurden bereits von Dietz /Die78/, Villmer /Vil84/ und Kohl /Koh86/ genannt, die Ausfallkriterien können im Allgemeinen in zwei Gruppen unterteilt werden:

Flankenverschleiß: Verschleißvorgänge auf den Zahnflanken entstehen durch die Relativbewegungen im Betrieb zwischen Welle und Nabe. In den Arbeiten von Zapf /Zap86/ und nachfolgend von Schäfer /Sch95/ sind die Ergebnisse umfangreicher Untersuchungen sowie eine umfassende Literaturzusammenstellung zum Flankenverschleißmechanismus und dessen Ursachen sowie zur Abschätzung des Verschleißfortschritts und der Lebensdauer von ZWVen zusammengefasst. Die Resultate dieser Untersuchungsprogramme wurden in die Berechnungsvorschriften DIN 5466 - Teil 1 /N4/ und Teil 2 /N5/ eingebracht.

Gewalt- und Dauerbrüche: Beim Bruch unterscheidet man zwischen Gewaltbruch (Spröd- und Duktilbrüche) und Werkstoffermüdungsbruch (auch Dauerbruch oder Schwingungsbruch genannt). Als Ursache zur Entstehung von Anrissen wird eine die Werkstofffestigkeit überschreitende örtliche Beanspruchungsüberhöhung angenommen, die im Verzahnungsübergang bzw. im Zahnfußquerschnitt zum Bruch der Welle oder der Nabe führen kann. Die Betrachtungen der Schadensfälle durch Bruch beweisen, dass die Anrisse meist vom Auslaufbereich bzw. von der Zahnfußausrundung unmittelbar am Rand der Welle-Nabe-Verbindung infolge des Steifigkeitssprunges ausgehen, der eine ungleichmäßige Beanspruchungsverteilung über der Verbindungsbreite bewirkt.

Dieses beschriebene Verhalten wird durch zahlreiche, der Literatur entnommene Versuche bestätigt, (z.B. /Die78/). Erste Untersuchungen wurden beispielsweise von *Ulrich* /Ulr35/, *Herold* /Her37/ und *Thum* /Thu39/ durchgeführt.

Ulrich /Ulr35/ untersuchte experimentell das Bruch- und Verformungsverhalten von torsionsbelasteten Keilwellen. Die Kerbwirkung wurde als die entscheidende Ursache für den Bruch nachgewiesen. Die Anrisse beginnen im Allgemeinen in den Nutecken zwischen Nabenende und Nutenauslauf und pflanzen sich bei Torsion in Richtung der größten Hauptnormalspannung unter 45° fort. Dies wurde ebenfalls von *Thum* und *Federn* /Thu39/ beschrieben und bestätigt.

Bereits von *Herold* /Her37/ wurden Untersuchungen zur Bestimmung der Verdrehfestigkeit und Ermittlung der Kerbwirkungszahlen an verschiedenen abgesetzten Proben, darunter auch durchgehend genutete Keilwellen jedoch ohne Nabeneinfluss durchgeführt und Hinweise für eine beanspruchungsgerechte Gestaltung gegeben.

Die grundlegenden theoretischen Berechnungen der Kerbspannungen erfolgten nach *Neuber* /Neu85/, *Okubo* (z.B. in /Pet88/) und *Nakazawa* /Nak51/. Ausgehend von der Welle mit Einzelnut berechnete *Neuber* für flache Mehrfachnuten endlicher Krümmung die Formzahl als Spannungsüberhöhungsfaktor gegenüber einer ungenuteten Welle.

Auf dieser Basis wurde von *Okubo* im Jahre 1952 eine Berechnung an einer tordierten Welle mit endlich vielen halbkreisförmigen Nuten unter gleicher geometrischer Voraussetzung durchgeführt. Er stellte fest, dass die Formzahl einen Grenzwert von 2 erreicht, wenn das geometrische Verhältnis Keilfußradius zu Wellenaußendurchmesser ρ/D gegen Null geht. Dieses Ergebnis wurde im Jahre 1970 von *Timoshenko* und *Goodier* (z.B. in /Pet88/) für eine Welle mit Einzelnut bestätigt.

Dietz /Die78/ verglich die theoretischen Berechnungen der Kerbspannungen mit experimentellen Untersuchungsergebnissen aus der Literatur unter Torsion. Die Abschätzung der Tragfähigkeit führt zu keinem zuverlässigen Ergebnis. Abweichungen von -30 % bis +40 % und mehr konnten festgestellt werden. Das führt zur Aussage, dass der mehrachsige Spannungszustand im Kerbgrund der Welle an der Stelle des Verbindungsbeginns sowie im Auslaufbereich nur unbefriedigend erfasst wird.

Eine genaue Bemessung der Zahnwelle ist also nur unter Beachtung der Kerbwirkung im Zahnfuß- bzw. Auslaufbereich möglich. Das Kerbwirkungsproblem soll daher als eines der Zentralprobleme dieser Untersuchung unter Berücksichtigung der geometrischen Abhängigkeiten behandelt werden.

2.1.2 Besonderheiten bei Wellen mit harter Randschicht

Experimentelle und numerische Untersuchungen wurden von *Melzer /Mel03/* zur Erweiterung des Erkenntnisstandes über das Anriss- und Verformungsverhalten an einsatzgehärteten Getriebewellen bei statischer bzw. stoßartiger Biege- und Torsionsbeanspruchung ($N < 1000$) durchgeführt. Zur Bestimmung des jeweiligen zu erwartenden Schadensfalles Anriss oder beginnende plastische Verformung wurde der Spannungstiefenverlauf mit dem Festigkeitstiefenverlauf verglichen, siehe **Bild 2.2**. Es sind an der Kerbe und im glatten Wellenbereich je zwei Festigkeitstiefenverläufe eingezeichnet, der Tiefenverlauf der Zugfestigkeit σ_B und der Biegebiegegrenze σ_{bFK} an der Kerbe bzw. σ_{bF} im glatten Wellenbereich.

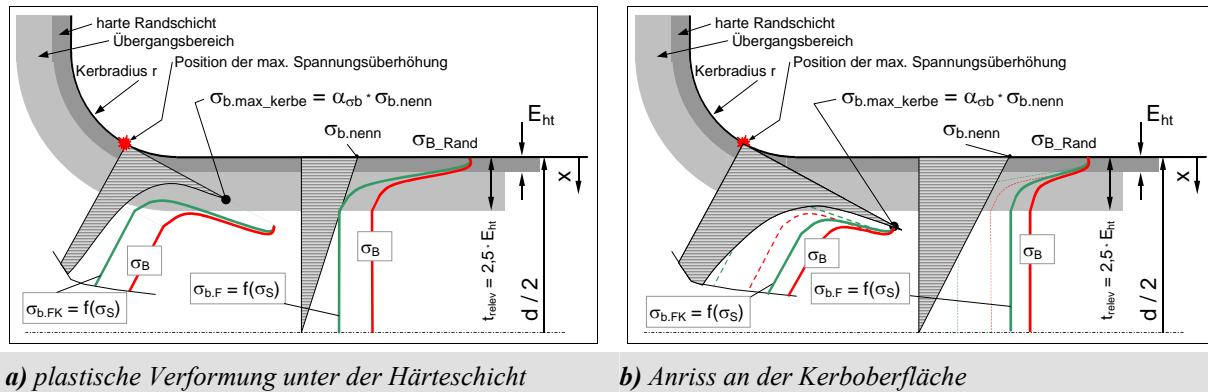


Bild 2.2: Gegenüberstellung prinzipieller Spannungs- und Festigkeitstiefenverläufe an einem Wellenabsatz mit harter Randschicht bei Biegebeanspruchung nach /Mel03/

Die Spannungstiefenverläufe wurden mit FE-Rechnungen bei linear-elastischen Materialeigenschaften ermittelt und in Form von Näherungsgleichungen für unterschiedliche Belastungsarten zur Verfügung gestellt. Zur Bestimmung der Festigkeitstiefenverläufe waren mehrere Schritte notwendig, z.B. Härtemessungen, Bestimmung der Festigkeitskennwerte und Festlegung der Streckgrenzenverhältnisse. Das Verhältnis zwischen Streckgrenze und Bruchfestigkeit σ_S/σ_B wird allgemein als Streckgrenzenverhältnis bezeichnet. Sobald eine Randschichthärtung vorliegt, ändert sich dieses Verhältnis jedoch stark in Abhängigkeit von der Einsatzhärte. Am Rand ist das Streckgrenzenverhältnis = 1 (Streckgrenze etwa gleich Zugfestigkeit), im Kern bei dem Werkstoff 16MnCr5 (blindgehärtet) beispielsweise $\sigma_S/\sigma_B \approx 0,62$. Bei dem Werkstoff 42CrMo4 (vergütet) beträgt es 0,85.

Für einen möglichen Anriss wurde der Hauptspannungstiefenverlauf σ_1 nahe der Kerboberfläche verwendet und mit der Randzugfestigkeit σ_{B_Rand} verglichen. Zur Bestimmung einer möglichen plastischen Verformung unter der harten Randschicht bzw. in der Umgebung der relevanten Tiefe $t_{reliev} = (2..3) \cdot E_{ht}$ wurden die Vergleichsspannungen σ_{v_GEH} jeweils mit der Biegebiegegrenze σ_{bF} bzw. σ_{bFK} verglichen. Die relevante Tiefe t_{reliev} gibt die Tiefe an, ab der die Wirkung der Festigkeitssteigerung der Randschicht abgeklungen ist.

Zusammenfassend trat als Schadensfall bei Wellen ohne harte Randschicht immer die beginnende plastische Verformung auf. Als Schadensfälle können bei Wellen mit harter Randschicht sowohl der Anriss an der Oberfläche als auch die beginnende plastische Verformung unter der harten Randschicht auftreten (*Bild 2.2*).

Dabei hat nicht nur die Kerbschärfe Einfluss auf den Schadensfall, sondern auch die Kernfestigkeit des Werkstoffes. Ein Anriss in der Kerbe entsteht, wenn die örtliche maximale Ver-

gleichsspannung (NSH) an der Kerboberfläche (harte Randschicht) größer ist, als die Randzugfestigkeit $\sigma_B = 2300 \text{ N/mm}^2$ bis 2500 N/mm^2 , die infolge der maximalen Spannung bei höherer Kernfestigkeit wesentlich eher erreicht sein kann, als die Biegefließgrenze σ_{bF} unterhalb der Härteschicht (*Bild 2.2-b*).

Durch die neuen Erkenntnisse erarbeitete *Melzer* ein Verfahren zur Ermittlung von Grenzformzahlen zu einer groben Abschätzung des zu erwartenden Schadensfalles.

Diese Formzahlen sind abhängig von der Dicke der Einsatzhärteschicht, dem Bauteildurchmesser, der Randzugfestigkeit σ_{B_Rand} und der Streckgrenze σ_S (bzw. Bauteilfließgrenze) des Kernes. Eine Abschätzung der Grenzformzahl an Wellen mit Absatz ohne Berücksichtigung der Druckeigenspannungen erfolgt nach Gl. (2.1) für Biegung und nach (2.2) für Torsion.

$$\alpha_{\sigma_{b_Grenz}} \leq \frac{\sigma_{B_rand}}{\sigma_{s_kern}} \cdot \left(1 - \frac{t_{relev}}{d/2}\right) \quad (2.1) \quad \alpha_{\tau_Grenz} \leq \frac{\sigma_{B_rand}}{\sigma_{s_kern}} \cdot \left(1 - \frac{t_{relev}}{d/2}\right) \cdot \sqrt{3} \quad (2.2)$$

Der Grenzwert $\alpha_{\sigma_{b_Grenz}}$ des Übergangs plastische Verformung (unter der Oberfläche)/Anriss (an der Oberfläche) ergibt sich für Biegung bei den üblichen legierten Einsatzstählen zu:

$$\alpha_{\sigma_{b_Grenz}} \approx \frac{(2300 \dots 2400) \text{ N/mm}^2}{700 \text{ N/mm}^2} \cdot 0,9 \approx 3 \quad (2.3)$$

Ist die Formzahl der Welle kleiner bzw. gleich der Grenzformzahl $\alpha_{\sigma_{b_Grenz}}$, muss vor dem Anriss mit beginnender plastischer Verformung unter der harten Randschicht gerechnet werden. Oberhalb dieses Grenzwertes ist ein Anriss im Randbereich vor der bleibenden Verformung zu erwarten.

Der von *Melzer* /**Mel103**/ verwendete Ansatz (Vergleich der Spannungs- und Festigkeitstiefenverläufe) ist auf andere Korbformen (z.B. Zahn- und Keilwellen) übertragbar, wenn die Spannungstiefenverläufe dieser Korbformen bekannt sind.

Damit muss bei harten Randschichten der statische Nachweis sowohl an der Oberfläche als auch unter der Oberfläche erfolgen. Bei Überschreitung der Grenzformzahl wird der Nachweis gegen Anriss die Auslegung begrenzen.

2.2 Formschlüssige Profilwellen-Verbindungen

2.2.1 Grundlagen

Verfahren und Hinweise für die systematische Auswahl, Auslegung, Berechnung und Gestaltung von Welle-Nabe-Verbindungen (WNVen) mit Angabe der maßgeblichen Normen und Richtlinien sowie Verweisen auf die diesbezügliche Literatur sind umfassend in **/Kol84/** dargestellt. Eine ausführliche Zusammenfassung der Arbeit von *Dietz /Die78/* bezüglich der Auslegung von ZWVen mit einem übersichtlichen und leicht handhabbaren Fließdiagramm ist ebenfalls bei *Kollmann /Kol84/* zu finden.

Hinsichtlich der Fertigungs- und Montageverfahren finden sich jedoch wenige Veröffentlichungen. Als Hilfsmittel zur Unterstützung des Konstrukteurs bei der Auswahl, der Konstruktion und der methodischen Lösungsfindung können die Konstruktionskataloge von *Roth /Rot82/* verwendet werden. In der Arbeit von *Kittsteiner /Kit96/* wurden methodische Entscheidungshilfen und Analysen der Kostensituation für die technisch-wirtschaftliche Auswahl und Gestaltung der WNVen einschließlich der ZWVen unter der Berücksichtigung der wichtigsten konstruktiven und betrieblichen Einflussgrößen zusammengestellt.

Alle bekannten WNVen lassen sich nach *Kollmann /Kol84/* in drei Gruppen einordnen: Kraftschlüssige, formschlüssige und stoffschlüssige Verbindungen. Aus diesen genannten Gruppen sind im Laufe der Zeit neue kombinierte Verbindungen entstanden wie z.B. kraft- und stoffschlüssige Verbindungen sowie kraft- und formschlüssige Verbindungen (z.B. Zahnwellenverbindung mit Presssitz). Zu den formschlüssigen Profilwellenverbindungen zählen:

- Zahnwellen-Verbindungen mit Evolventenflanken (bzw. Passverzahnungen mit Evolventenflanken und Bezugsdurchmesser) und mit Eingriffswinkel von 30° nach *DIN 5480* Teil 1 und 2 sowie Teil 15 und 16 **/N1/**,
- Keilwellen-Verbindungen (bzw. Passverzahnungen mit Keilflanken) mit Flankenwinkel von 0° nach *DIN 5464 /N6/* (schwere Reihe) sowie *DIN ISO 14 /N7/* (leichte und mittlere Reihen) vornehmlich für den Kraftfahrzeugbau,
- Kerbzahnwellen-Verbindungen (bzw. Passverzahnungen mit Kerbflanken) mit konstantem Lückenwinkel der Welle von 60° nach *DIN 5481 /N8/* und
- Polygonwellen-Verbindungen P3G nach *DIN 32711 /N9/* und P4C *DIN 32712 /N10/*.

In **Bild 2.3** sind einige dieser Profilverbindungen nach *DIN ISO 6413 /N11/* dargestellt.

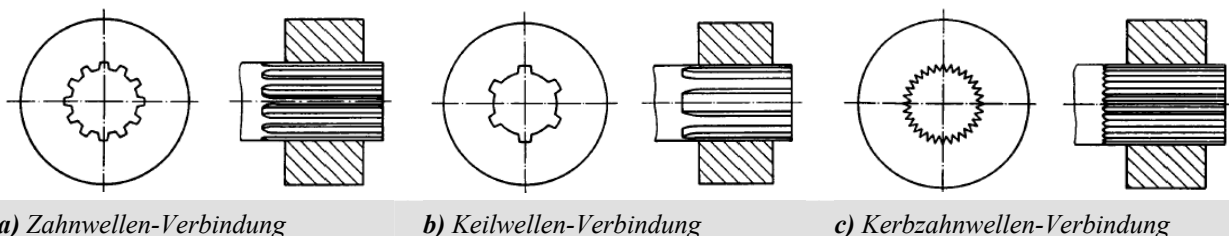


Bild 2.3: Schematische Darstellung von Profilwellen-Verbindungen nach *DIN ISO 6413 /N11/*

All diesen in *Bild 2.3* dargestellten Profilwellen-Verbindungen ist gemeinsam, dass die Übertragung des Drehmoments über die Kontaktflächen von Naben- und Wellenzähnen erfolgt und dass jede dieser Verbindungen die Dauerhaltbarkeit der Wellen an der Verbindungsstelle

mehr oder weniger stark herabsetzt, d.h. die Dauerfestigkeit der Welle, welche mit einer Nabe verbunden ist, ist stets geringer als die Dauerfestigkeit der gleichen Welle (gleicher Wellendurchmesser und gleicher Werkstoff) ohne Nabeneinfluss /**Con62**/. Das Gleiche gilt auch für die Zahnwelle im Vergleich zur glatten Welle bzw. für die Zahnwellenverbindung im Vergleich zur Zahnwelle allein ohne Nabeneinfluss /**Die78**/. Die Ursachen dieser Festigkeitsminderung, deren Größe in der Literatur mit dem Begriff „Kerbwirkungszahl“ bezeichnet wird, sind im Wesentlichen:

- plötzliche Querschnittsänderungen, welche Umlenkungen der Kraftlinien bewirken; sowohl durch den Durchmessersprung von Welle und Nabe als auch bei einer gekerbten Welle ohne Nabe, wie z.B. durch den Verzahnungsauslauf und die Formschlusselemente (z.B. Zähne bzw. Keile).
- Einfluss zusätzlicher Druckspannungen an der Wellenoberfläche, welche die Wellenfestigkeit beeinflussen.
- Einfluss fertigungsbedingter Wärmebehandlung und Gefügeumwandlungen.

Sowohl Keilwelle als auch Keilnabe mit geraden Flanken tragen am gesamten Umfang eine gerade Zahl (4,6,8,10,16 oder 20) längslaufender und hochstehender Keile bzw. Nuten, die als Passfedern aufzufassen sind. Keilwellenverbindungen sind flanken- oder innenzentriert und eignen sich zur Übertragung hoher Momente bei geringerer Nabenwandstärke /**N6**/. Speziell für den Werkzeugmaschinenbau werden diese Verbindungen nach *DIN 5471* /**N12**/ mit vier Keilen und *DIN 5472* /**N13**/ mit sechs Keilen eingesetzt.

Die Kerbverzahnungen mit dreieckförmigem Zahnquerschnitt sind flankenzentriert und führen aus Verschleißgründen keine axiale Verschiebung im Betrieb aus. Sie sind in *DIN 5481* /**N8**/ mit Zähnezahlen von 28 bis 42 in einem Nenndurchmesserbereich von 7 mm bis 60 mm festgelegt. Da die Zähne relativ klein sind, können nur kleine Drehmomente übertragen werden. Es sei an dieser Stelle verwiesen, dass die ursprüngliche Norm *DIN 5481* aus dem Ausgabedatum Januar 1952 Kerbzahnwellen mit einem Durchmesser bis 125 mm und Zähnezahl bis 81 vorsah.

Auf Grund der vergleichsweise geringen Einsatzbreite der Keilwellen und der primären Funktion von Kerbzahnwellen als Positionierelemente, bei denen die Leistungsübertragung eine untergeordnete Rolle spielt, werden die Untersuchungen zunächst auf Zahnwellen begrenzt.

2.2.2 Geometrie der Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480

Die ZWVen sind innerhalb der Bundesrepublik Deutschland durch die *DIN 5480* /**N1**/ mit Evolventenflanken vorgesehen und im Modulbereich von 0,5 mm bis 10 mm, Zähnezahlbereich von 6 bis 82 Zähnen und Bezugsdurchmesserbereich von 6 mm bis 500 mm genormt. Diese vorliegende Ausgabe von *DIN 5480* beinhaltet Grundgleichungen, geometrische Bestimmungsgrößen, Nennmaßtabellen, Basisdaten und Angaben zu Toleranzen, Flankenpassungen, Prüfung und Lehren sowie Angaben zu Werkzeugen.

Alle Naben- und Zahnwellenprofile werden mit Hilfe des zahnstangenförmigen Bezugsprofils (**Bild 2.4**) hergestellt. **Bild 2.5** zeigt die Geometriedefinitionen der daraus resultierenden Wellen- und Nabenprofile.

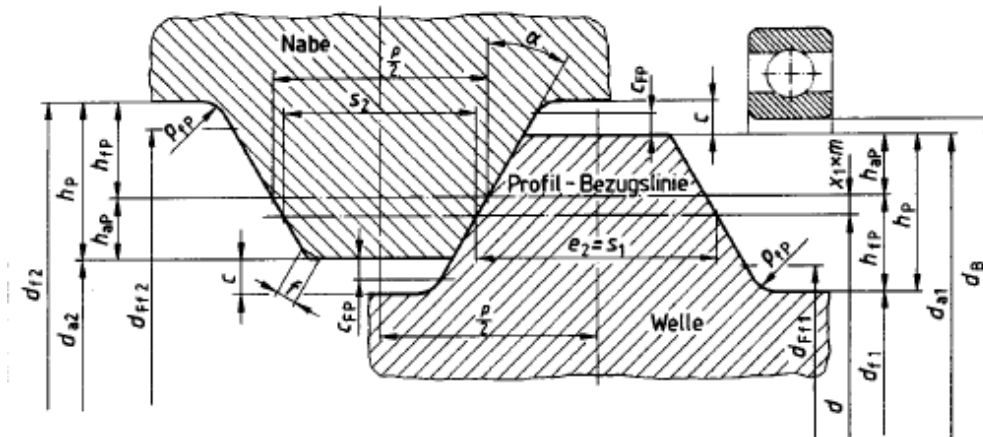


Bild 2.4: Geometrie des Bezugsprofils für Zahnwellen-Verbindungen nach DIN 5480 /N1/

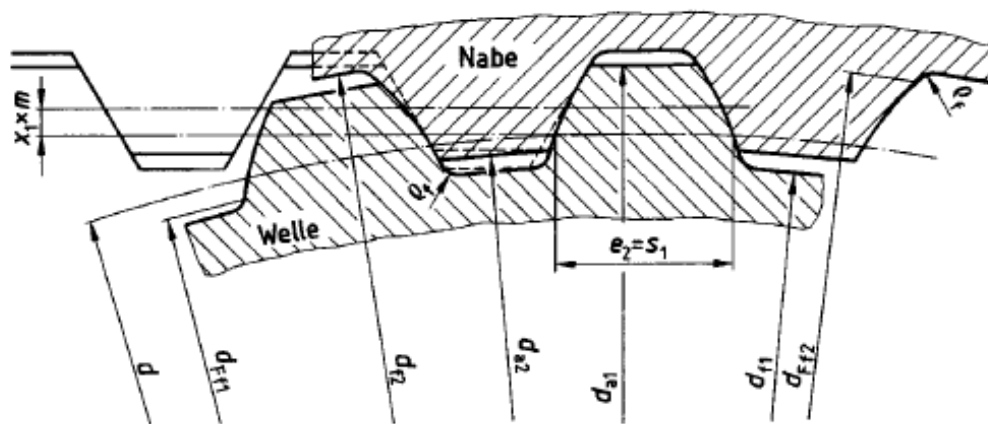
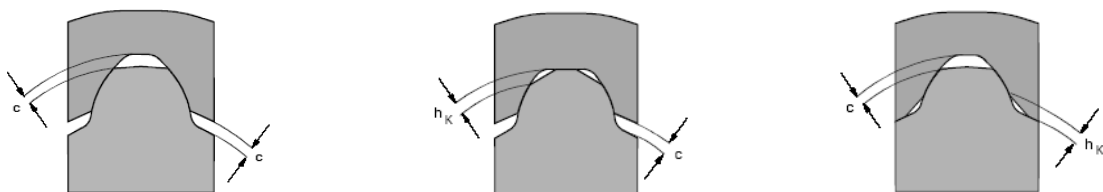


Bild 2.5: Geometrie der Profilform der Welle und Nabe für Zahnwellen-Verbindungen nach DIN 5480 /N1/

Wie in **Bild 2.6** dargestellt wird, erfolgt die Zentrierung im Normalfall über die Zahnflanken. Eine Durchmesserzentrierung (Innen- und Außenzentrierung) ist in Ausnahmefällen vorgesehen. Da die zu übertragende Kraft senkrecht auf den gewölbten Flanken steht, quetscht die radiale Komponente die Welle und weitet die Nabe auf, so dass ein genauer zentrischer Sitz nicht gewährleistet ist, zumal auch das Flankenspiel c zu einer Zentrierungenauigkeit führt.



a) Flankenzen­trierung **b) Außendurchmesserzen­trierung** **c) Innendurchmesserzen­trierung**

Bild 2.6: Zentriermöglichkeiten für Zahnwellen-Verbindungen nach /N1/; c : Kopfspiel & h_K : Kopfkantenbruch

Die amerikanische Norm *ANSI B92.2M* /**ANSI**/ ist weitestgehend identisch mit der internationalen Norm *ISO 4156* /**ISO1**/. Sie gilt für die Konstruktion, Fertigung und Prüfung von geradverzahnten Passverzahnungen mit Evolventenflanken und stellt Normreihen von Maßen zur Verfügung. Sie beinhaltet Module von 0,25 mm bis 10 mm und Eingriffswinkel von $\alpha = 30^\circ$; $37,5^\circ$ und 45° . Während die Verzahnung mit $\alpha = 45^\circ$ auf die Moduln von 0,25 mm bis 2,5 mm beschränkt, sind die 30° - und $37,5^\circ$ -Verzahnungen für die Moduln von 0,5 mm bis 10 mm genormt.

Bezüglich der Fußausrundung für die Innen- und Außenverzahnung nach /ANSI/ stehen die Varianten flacher oder vollausgerundeter Fußgeometrie (fillet- oder flat root - Geometrien) zur Verfügung. **Bild 2.7** zeigt die Zahnwellengeometrie und das Bezugsprofil nach /ANSI/.

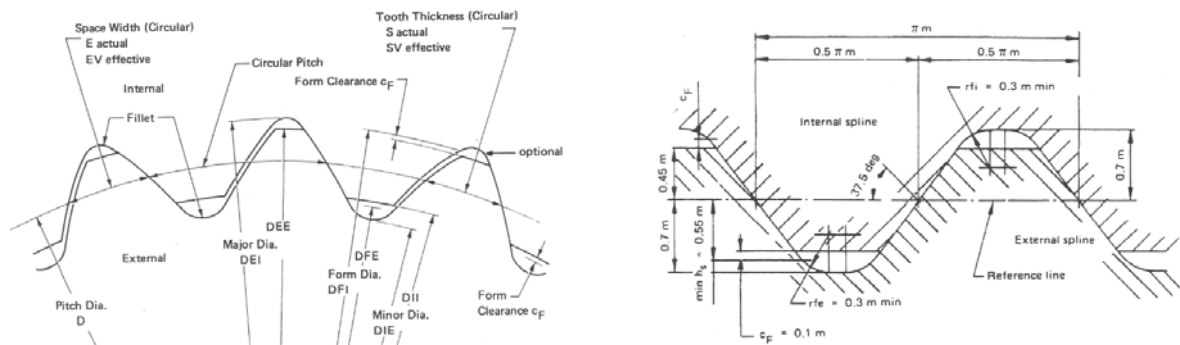


Bild 2.7: Geometrie und Bezugsprofil der Zahnwellen-Verbindung am Beispiel für fillet root (volle Fußausrundung), $\alpha = 37,5^\circ$; $m = 0,5 \dots 10$; nach ANSI B 92.2M /ANSI/

Die am meisten angewendete Profilform ist die Verbindung von Innenverzahnung mit flachem Fuß und Außenverzahnung mit rundem Fuß. Diese Verbindungskombination kann relativ hohe Drehmomente übertragen. Die Auswahl gilt nur für Eingriffswinkel von 30° . Die Belastbarkeit der Verzahnung nach /ANSI/ ist gegenüber DIN 5480 /N1/ höher. Grund dafür ist die volle Fußausrundung und die damit verbundene niedrigere Kerbwirkung. Speziell bei hohen Drehmomenten oder dünnen Wandstärken ist dies von Vorteil.

Beim Vergleich der Verzahnungshauptgeometrien beider Normen (ANSI B92.2M und DIN 5480) werden Unterschiede bezüglich der Profilverschiebung, des Bezugsdurchmessers und der Fußausrundung deutlich. Während die Profilverschiebung nach DIN 5480 für 30° -Verzahnungen zur Anwendung kommt, wird in der Norm ANSI B 92.2M hingegen für die Verzahnungen mit $37,5^\circ$ - und 45° -Eingriffswinkel völlig auf eine Profilverschiebung bei der Herstellung verzichtet. Folgend wird ein kurzer Überblick über die wichtigsten Kenngrößen und Besonderheiten der DIN 5480 gegeben.

Der Bezugsdurchmesser gibt die Größenabstufung unterschiedlicher Profile an. Er ist genauso abgestuft wie die Wälzlager-Bohrungsdurchmesser und entspricht in etwa dem Wellenkopf- bzw. dem Nabenfußkreisdurchmesser. Um bestimmte Bezugsdurchmesser zu erreichen werden Profilverschiebungen angewandt.

Die Profilverschiebung wurde für die Verbindungen nach DIN 5480 eingeführt, um den Außendurchmesser an genormte Wälzlagerdurchmesser oder andere einzuhaltende Normdurchmesser auszugleichen und die Werkzeugvielfalt möglichst zu reduzieren. Die nach DIN 5480 zulässigen Profilverschiebungsfaktoren werden im Bereich von $x_1 = -0,05$ bis $x_1 = +0,45$ für die Welle und von $x_2 = -0,45$ bis $x_2 = +0,05$ für die Nabe angegeben. Der kleinste Profilverschiebungsfaktor für eine Zahnwelle mit sechs Zähnen beträgt $x_1 = 0,2$; d.h. dass die kleineren Zähnezahlen nur über positive Profilverschiebung zu erzielen sind. Um gerade Zähnezahlen zu ermöglichen oder um Primzahlen zu vermeiden, wurden bei einigen großen Zähnezahlen $z_1 \geq 60$ Ausnahmen bis $x_1 = +0,879$ bzw. $x_2 = -0,879$ zugelassen /N1/.

Durch die vernünftige Verwendung von Profilverschiebungsfaktoren lassen sich bei gegebenen äußeren Abmessungen die Biege-Festigkeit im Zahnfuß von Wellen und Naben positiv beeinflussen (/N1/, /Sch76/, /Die78/ und /Wes96/). Bei wachsender positiver Profilverschiebung vergrößern sich die Kopf- und Fußkreisdurchmesser sowie geringfügig die Zahndicke am

Teilkreis im Vergleich zu denen mit Profilverschiebung Null. Umgekehrt führt eine negative Profilverschiebung zur Verkleinerung dieser Parameter. Teilkreisteilung und Zähnezahl ändern sich dadurch nicht. Infolge einer positiven Profilverschiebung erhöht sich der Kerbwirkungseinfluss im Zahnfuß durch die Verkleinerung der Zahnfußausrundung bei sinkender Nennspannung infolge steigender Zahnfußdicke. Gleichzeitig verkleinert sich die Zahnkopfdicke, was zur Gefahr des Spitzwerdens der Zähne führt. Bei negativer Profilverschiebung wird die Fußausrundung größer. Dadurch vermindert sich der Kerbwirkungseinfluss. Die erkennbare Formänderung der einzelnen Zähne durch Profilverschiebung nimmt mit steigenden Zähnezahlen ab. Die Profilverschiebung kann im Allgemeinen für folgende Zwecke eingesetzt werden:

- Vermeidung vom schädlichen Unterschnitt und Spitzwerden der Zähne, insbesondere bei kleinen Zähnezahlen.
- Verbesserung der Tragfähigkeit der Zahnflanken durch Vergrößerung der Flankenkrümmungsradien sowie der Zahnfußtragfähigkeit (bzw. Verringerung der Zahnfußnennspannung) infolge zunehmender Zahndicke.

In der *DIN 5480 /N1/* gibt man eine minimale Fußhöhe und einen minimal zulässigen Fußradius vor. Die minimale Fußhöhe beträgt $h_f = 0,6 \cdot m$ beim Fräsen und $h_f = 0,84 \cdot m$ beim Kaltwalzen. Das kleinste zulässige Zahnfußausrundungsverhältnis beträgt für alle Verzahnungen $\rho_{f\text{-min}}/m = 0,16$ beim Zerspanen und $\rho_{f\text{-min}}/m = 0,54$ beim Kaltwalzen, wobei das Verhältnis $\rho_f/m = 0,54$ auch das größte, einheitlich definierbare Fußradiusverhältnis darstellt. Hierbei treten im Zahnfuß die höchste Spannungskonzentration und die schärfste Kerbwirkung auf.

Das größtmögliche Fußrundungsverhältnis entspricht dabei der vollen Fußausrundung, wodurch der Kerbradius entschärft werden kann (**Bild 2.8**). Eine volle Fußausrundung ist nach */N1/* nur beim Kaltwalzen realisierbar. Bei einer Fußvollausrundung ergibt sich zu jeder Verzahnung jeweils ein bestimmter Fußradius mit einer zugehörigen Fußhöhe. Daher erschien es in dieser Arbeit sinnvoll, bei allen Untersuchungen der äußeren Form der Zahngeometrie in erster Linie dieses Verhältnis (0,16) anzuwenden, um jeweils absolut Maximalspannungen zu ermitteln.

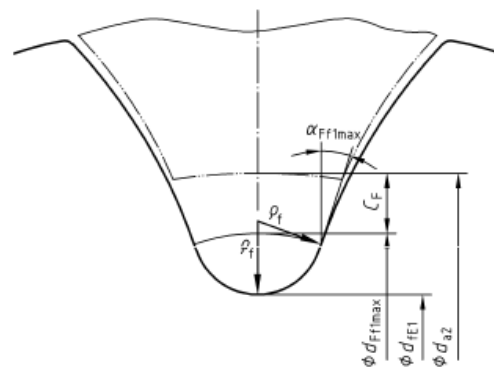


Bild 2.8: Fußrundungsradius der Fußvollausrundung nach DIN 5480 Teil 16 /N1/

Die Normenreihe *DIN 5480* beschränkt sich auf den Eingriffswinkel von 30° . In Unterlagen zu ZWVen (z.B. */Sch76/* und */ISO1/*) sind bereits zusätzlich Flankenwinkel 15° ; $37,5^\circ$ und 45° angegeben. Z.B. berichtet *Villmer /Vil84/* über mögliche Eingriffswinkel von $37,5^\circ$ oder 45° beim Fertigen der Zahnwellen durch Kaltwalzen.

Wie *Schöpf* in seiner Arbeit */Sch76/* berichtet, führt eine Vergrößerung des Eingriffswinkels gegenüber der nach *DIN 5480* genormten Verbindung zur Reduzierung der maximalen Zahnfußbeanspruchungen bzw. der Torsionsformzahl infolge zunehmender Zahnfußausrundung bei sonst unveränderlicher Zahngeometrie. Bei konstantem Verhältnis Verbindungsbreite zu Kopfkreisdurchmesser b/d_{a1} und ausgehend von der 30° -Normverzahnung steigen die Spannungen zur 15° -Verzahnung hin um ca. 15 % an, während diese sich zur 45° -Verzahnung hin

nur um ca. 6 % verringern (**Bild 2.9**). Bei wachsendem Flankenwinkel und konstantem Torsionsmoment wird die Druckbeanspruchung des Zahnfußes durch die zunehmende Radialkraft größer. Somit ruft das durch die Umfangskraft im Zahnfuß verursachte Biegemoment geringere Beanspruchungen hervor.

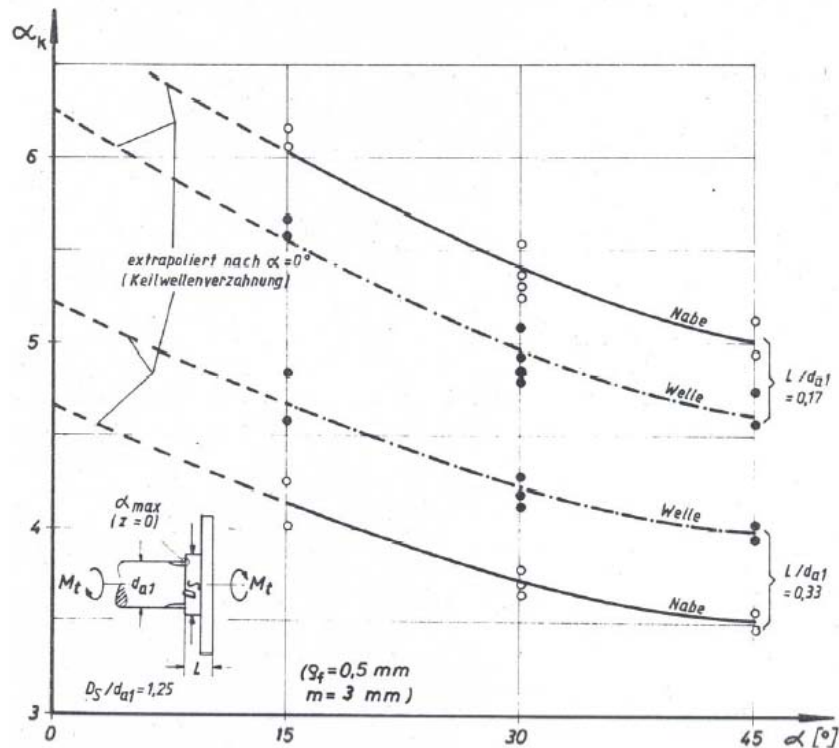


Bild 2.9: Verlauf der Kerbformzahl α_k für Welle und Nabe über dem Flankenwinkel α bei konstantem Verhältnis Verbindungsbreite zu Kopfkreisdurchmesser b/d_{a1} ; nach /Sch76/

Bei kleinen Eingriffswinkeln z.B. $\alpha = 15^\circ$ ist jedoch zusätzlich das Problem der Grenzzähnezahl zu finden. Für größere Eingriffswinkel z.B. $\alpha = 45^\circ$ entsteht das Problem der verfügbaren Zahn-Lückenweite.

Nach Schöpf/Sch76/ lässt sich die minimal erforderliche Zähnezahl der Welle unter Verwendung des kleinsten Verhältnisses Werkzeugkopfhöhe der Wälzfräser zu Modul $(h_{a0}/m)_{\min}$ nach DIN 5480 mit folgender Beziehung (2.4) berechnen:

$$z_{\min} = 2 \cdot \frac{h_{a0}}{m \cdot \sin^2 \alpha} \quad (2.4)$$

Unterschreitet die Zähnezahl die theoretische Grenzzähnezahl $z_{\min} = 17$, dann entsteht das Problem des Unterschnitts am Zahn, wodurch die Festigkeit verringert wird. Ein geringer Unterschnitt hat keinerlei Nachteile, so dass die praktische Grenzzähnezahl $z_{\min} = 14$ ist.

Auch aus diesem Grund ist für eine unterschnittsfreie Herstellung kleinerer Zähnezahlen durch Wälzverfahren eine positive Mindestprofilverschiebung nötig. Deshalb lassen sich nach Schöpf nur 55 % der in DIN 5480 für $\alpha = 30^\circ$ vorgesehenen Verbindungen mit einem Flankenwinkel $\alpha = 15^\circ$ fertigen. Weiterhin ermittelte Schöpf/Sch76/ in theoretischer Weise den größtmöglichen Flankenwinkel $\alpha_{\max} = 52,5^\circ$ und stellte fest, dass alle Verzahnungen nach DIN 5480 sowohl mit einem Flankenwinkel von 45° als auch mit $52,5^\circ$ ausgeführt werden könnten.

2.2.3 Auslegung von Zahnwellenverbindungen nach DIN 5466

Die Auslegung von ZWVen gestaltet sich als äußerst umfassendes Problem. Die Ursache hierfür liegt in den komplexen Randbedingungen, aus denen eine Vielzahl von rechnungsrelevanten Parametern resultiert.

Die Berechnungsmethode ist abhängig außer von den von außen aufgetragenen Belastungen und daraus resultierenden dreidimensionalen Spannungszuständen, von einer Reihe geometrischer Kenngrößen (Zähnezahl, Fußausrundung, Profilverschiebung etc.), von der Toleranz der Verzahnungsgeometrie, von dem Verformungsverhalten der Paarung sowie von den grundlegenden Betriebsbedingungen, wie Verzahnungsabweichungen, Fertigungseinflussparameter (Toleranzen, Fügebarkeit etc.), Werkstoff, Reibungsverhältnisse usw..

Wie **Bild 2.10** zeigt, ist eine abgesicherte Auslegungsmethode von ZWVen unter Beachtung der aller konstruktiven, wirtschaftlichen, betrieblichen, fertigungs- und montagetechnischen Gesichtspunkte kaum möglich. Eines der größten Probleme ist dabei die Kerbwirkung und die sich daraus ergebenden Folgerungen für das Bruchverhalten.

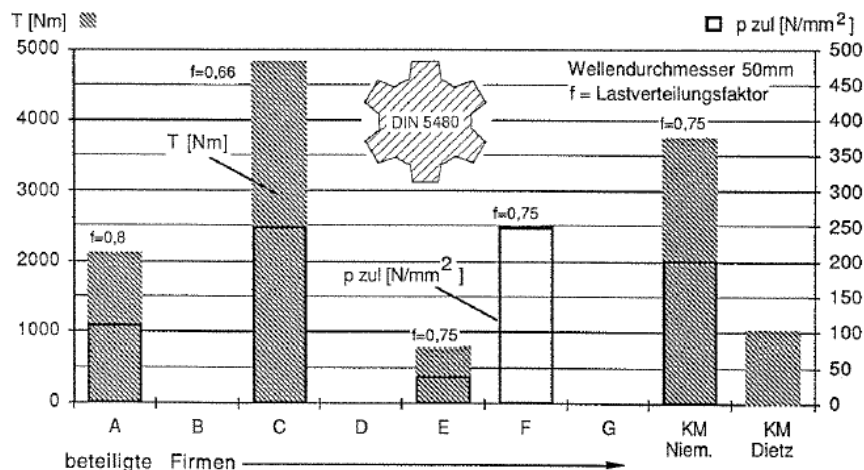


Bild 2.10: Vergleich der Firmenangaben zum übertragbaren Drehmoment von Zahnwellenverbindungen, am Beispiel DIN 5480 50x2x24; nach /Kit96/

Zur Berechnung des Tragfähigkeits- und Verschleißverhaltens von ZWVen nach DIN 5480 /N1/ stehen DIN 5466-1 /N4/ und DIN 5466-2 /N5/ zur Verfügung. Beide Normen basieren im Wesentlichen auf Arbeiten von /Die78/, /Vil84/, /Sch95/ und /Wes96/ und stellen den heutigen Erkenntnisstand zur Zahnfuß- und Flankentragfähigkeitsberechnung von Passverzahnungsverbindungen dar.

Die Berechnungsvorschrift berücksichtigt die Belastung der Verbindung durch reines Drehmoment, reine Querkraft sowie Kombinationen aus beiden Belastungen (**Bild 2.11**). Sie unterscheidet zwischen einem Festigkeitsnachweis für die freie Profilwelle und einem Nachweis der Zahnfußfestigkeit und der Flankentragfähigkeit innerhalb der Verbindung.

Eine allgemeine Beschreibung und Analyse der von der äußeren Belastung abhängigen Betriebszustände flankenzentrierter oder durchmesserzentrierter ZWVen wird in DIN 5466-1 /N4/ ausführlich gegeben. Die charakteristischen Betriebszustände sind durch das Verhältnis von Drehmoment T und Querkraft Q gekennzeichnet. Zur Drehmomenterzeugung dient die Kenngröße des ideellen Hebelarms der Querkraft $H = T/Q$. **Bild 2.12** soll diesen Zusammenhang verdeutlichen.

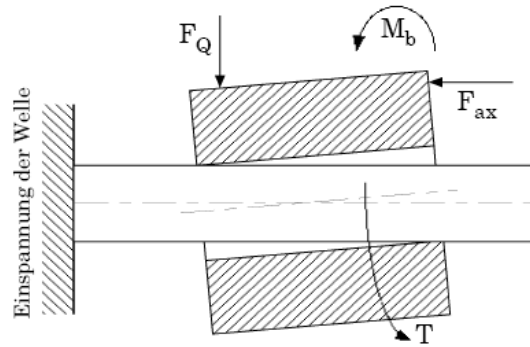


Bild 2.11: Schematische Darstellung aller möglichen, auf die Zahnwellenverbindung wirkenden Belastungen /N4/ (T Drehmoment, M_b Biegemoment, F_{ax} Axialkraft und F_Q Querkraft)

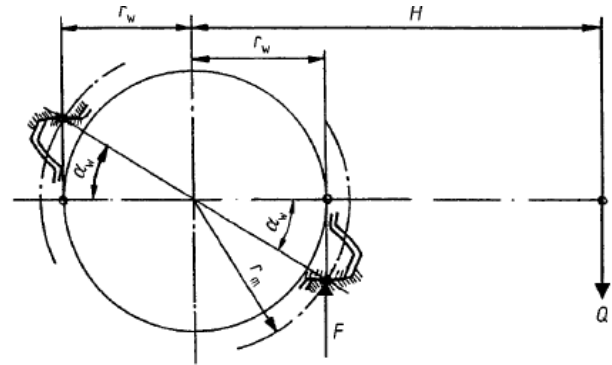


Bild 2.12: Flankennormalkraft und Wirkwinkel /N4/

Der Wirkradius r_w (Bild 2.12) beschreibt den effektiven Abstand der jeweiligen Flankenkraft zur Achse der Verbindung. Bei Evolventenflanken entspricht er dem Grundkreisradius r_b . Der Wirkwinkel α_w kennzeichnet den Winkel zwischen Flankenrichtung und der Richtung der Umfangskomponente der Flankenkraft.

In Abhängigkeit von dem Verhältnis des ideellen Hebelarmes H zum Wirkradius r_w lassen sich somit unterschiedliche Betriebszustände beschreiben. Grundsätzlich kann der Belastungszustand einer Zahnwelle differenziert werden in einen drei- und einen zweidimensionalen Betriebszustand. Im idealisierten ebenen Betriebszustand wirken die Belastungen Drehmoment und Querkraft. Im räumlichen Betriebszustand überlagern sich diesen zusätzlich die Belastungen durch Biegemoment und Axialkraft. Entsprechend dem in *DIN 5466-1* vorgeschlagenen Dimensionierungsverfahren zum Festigkeitsnachweis für Zahnwellen ergeben sich die folgenden Betriebszustände:

- Belastung durch reines Drehmoment
- Belastung durch reine Querkraft
- Zusammengesetzte Belastung durch Drehmoment und Querkraft mit überwiegendem Torsionsmoment bzw. mit überwiegender Querkraft.

Wird die Verbindung ausschließlich durch ein reines Torsionsmoment belastet, so sind Zahnwelle und Nabe zentrisch ausgerichtet. Auf Grund dieser zentrischen Ausrichtung werden alle Zahnflanken der Verbindung in Momentrichtung über dem Umfang gleichmäßig belastet (Bild 2.13). Eine Relativbewegung zwischen Wellen- und Nabenflanken tritt nicht auf.

Die Momentbelastung kann hierbei durch die Einwirkung von Flankennormalkräften (Bild 2.14) simuliert werden. Da die Verbindung als ideal betrachtet wird, kann auch die Verteilung der Flankennormalkräfte am einzelnen Zahn der Welle als gleichmäßig verteilt definiert werden. Zur Berechnung der maximalen Flankennormalkraft über dem Umfang einer reibungsbedingten, abweichungsbehafteten Zahnwellenverbindung müssen die in *DIN 5466-2* beschriebenen Kenngrößen (Reibkraft-Aufteilungsfaktor und Umfangsfaktor) in Abhängigkeit vom Betriebszustand mit einbezogen werden, da durch die Verschleißbedingungen und geometrische Abweichungen unterschiedliche große Flankennormalkräfte entstehen /N5/.

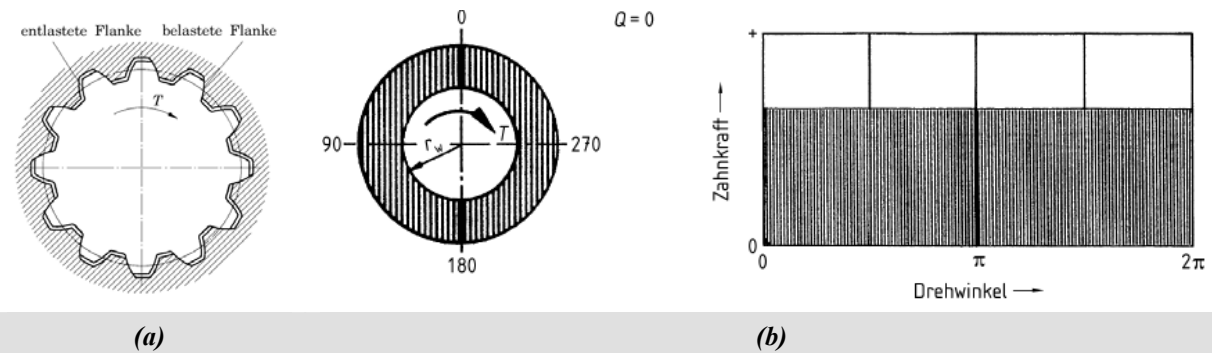


Bild 2.13: Geometrische Stellung von Welle und Nabe (a) und Lastaufteilung bei reiner Drehmomentübertragung T einer flankenzentrierten, idealen Zahnwellen-Verbindung (b) nach /N4/

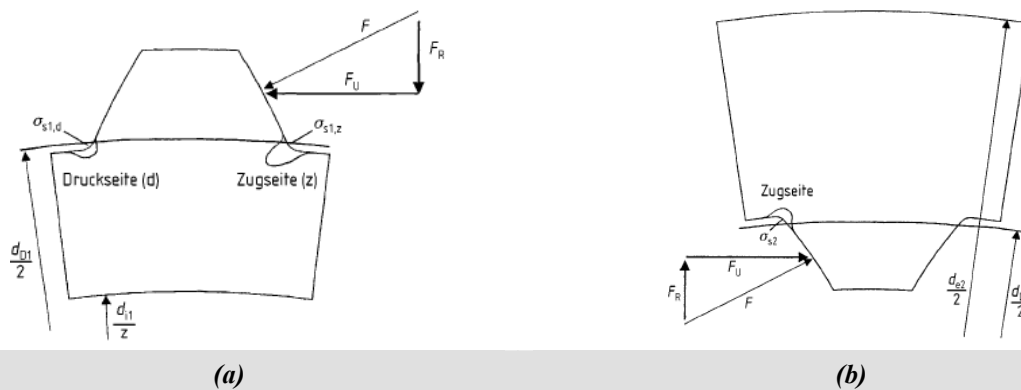


Bild 2.14: Darstellung der Flankennormalkräfte der Welle (a) und der Nabe (b) nach /N5/

Überträgt eine theoretisch, ideale Verbindung ausschließlich eine Querkraft, handelt es sich um eine reine Querkraftbeanspruchung. In diesem Fall tritt zwischen Wellen- und Nabenachse eine Mittenerlagerung auf. Die Zahnflanken erfahren eine Lastaufteilung, wobei bei umlaufender Verbindung die belastete Flanke wechselt siehe **Bild 2.15**.

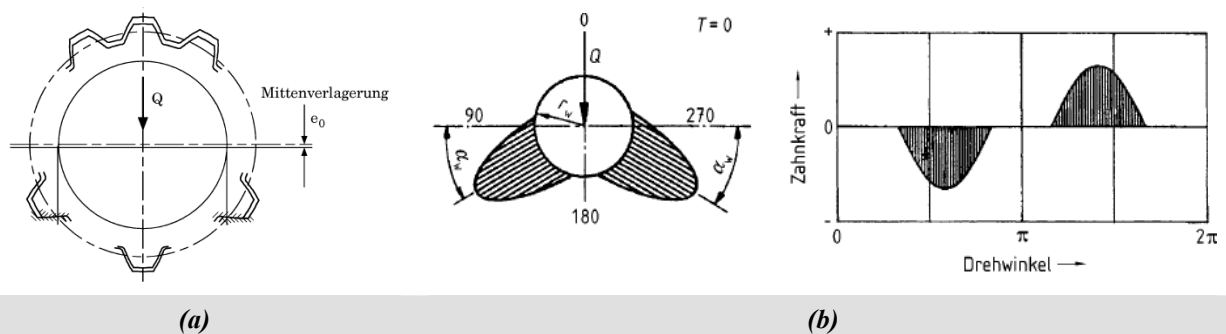


Bild 2.15: Geometrische Stellung von Welle und Nabe (a) und Lastaufteilung bei reiner Querkraftübertragung Q einer flankenzentrierten, idealen Zahnwellen-Verbindung mit Spiel (b) nach /N4/

Bringt man zusätzlich zu einer Querkraft ein Drehmoment an der Nabe auf, kommt es zu einer Mischbelastung. Dabei lassen sich im Idealfall einer unendlich steifen und reibungsfreien Verbindung zwei grundsätzliche Fälle unterscheiden, eine zusammengesetzte Belastung mit überwiegender Querkraft und eine Mischbelastung mit überwiegendem Torsionsmoment (**Bild 2.16**). Auf weitere Ausführungen zu den Betriebszuständen soll hier nicht eingegangen werden.

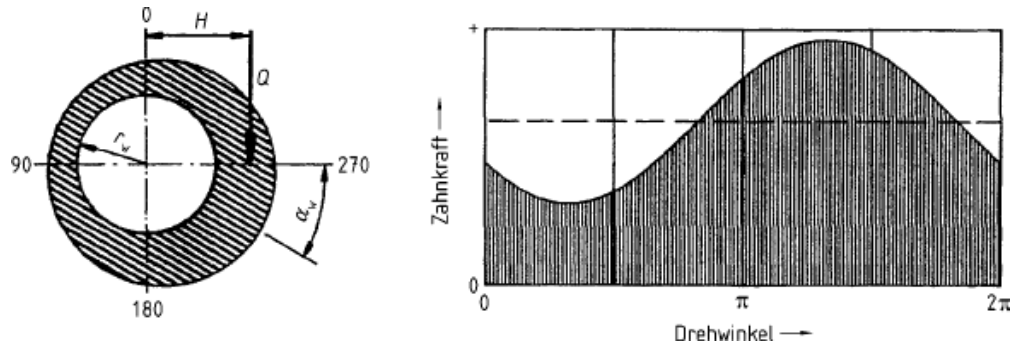


Bild 2.16: Lastaufteilung für Mischbelastung aus Querkraft Q und Drehmoment T mit überwiegendem Drehmoment einer flankenzentrierten, idealen Zahnwellen-Verbindung mit Spiel $/N4/$

Die in dieser Arbeit vorliegenden Untersuchungen für die FE-Berechnung der Formzahlen bei Torsion befassen sich mit dem Belastungsfall: abweichungsfreie, flankenzentrierte ZWVen mit reinem Drehmoment. Nur bei diesem Betriebszustand können die Abhängigkeiten der Kerbgeometrie von der Betriebszeit sowie die Einflüsse des mit dem Betriebszustand verbundenen Flankenverschleißfortschritts bei der Bestimmung der Kerbwirkung im Zahnfuß- oder Auslaufbereich ausgeschlossen werden **/Wes96/**.

Das bedeutet, dass bei der Berechnung der Kerbvergleichsspannungen an den Zahnwellen eine definierte Kerbgeometrie vorausgesetzt wird. Die Abweichungen von der ursprünglichen Kerbform infolge des Verschleißes auf den Zahnflanken werden bei der Untersuchung vernachlässigt. Dazu handelt es sich bei dieser Arbeit nicht um die einzelnen Zähne der Welle, sondern in der ersten Linie um die Untersuchung der Zahnwellen mit freiem und gebundenem Auslauf unter reiner Torsions- und Biegebelastung.

2.2.4 Herstellungsverfahren von Zahnwellenverbindungen

Etablierte spanende Fertigungsverfahren zur Herstellung von Zahnwellen sind das Wälzfräsen, Wälzstoßen und Wälzhobeln. Das Wälzfräsen hat sich als Standardbearbeitungsverfahren für die Einzelfertigung bis hin zur Massenproduktion durchgesetzt. Die Verfahren Wälzstoßen und –hobeln sind preisgünstig und bevorzugt für die Herstellung von Wellen- und Nabenverzahnungen für kleine Stückzahlen. Sie kommen nur dann zum Einsatz, wenn das Fräsen aus technologischer Sicht, z.B. wegen der Zugänglichkeit, nicht angewendet werden kann.

Im Bereich höherer Losgrößen gewinnen Räumverfahren für die Fertigung der Nabenverzahnung mit hoher Genauigkeit zunehmend an Bedeutung. Hinzu kommen einige Verfahren der Fein- und Feinstbearbeitung, die bei kleinen Moduln auch zur Fertigbearbeitung herangezogen werden können /**Vil84**/.

Für die Senkung der Herstellkosten in besonders großen Stückzahlen und für die Verbesserung der Festigkeitseigenschaften verzahnter Getriebewellen setzen sich umformende Herstellungsverfahren vermehrt durch (z.B. /**Tur72**/, /**Kra78**/, /**Kra84**/ und /**Len95**/). Diese Literaturstellen geben einen Überblick über die Möglichkeiten einer umformenden Fertigung von Zahnwellenverbindungen.

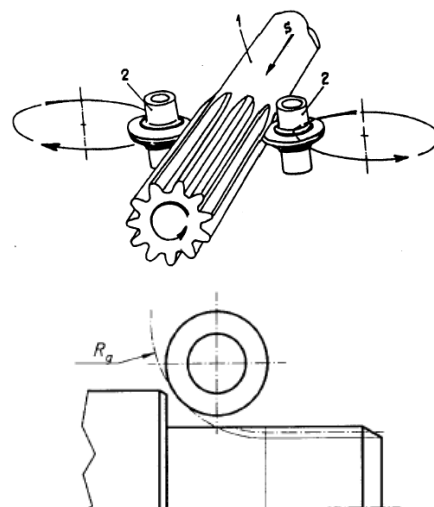
Die Mengenleistung der Umformverfahren ist im Vergleich mit dem Fräsen um ein Vielfaches größer /**Tur72**/.

Zu den am meisten verwendeten Umformverfahren zählen die Walzverfahren (Quer- und Längswalzen), das Warmschmieden (Pulverschmieden und Präzisions schmieden) und das Kaltmassivumformen (Strang- und Fließpressen sowie Taumelpressen). *Turno* /**Tur72**/ berichtet, dass das Einstoßen, Radialprägen, Längswalzen, Formziehen und Rundkneten hauptsächlich beim Kaltformen von Mehrkeilwellen angewendet werden.

Mit dem Einstoßverfahren können in einer Großserienproduktion Keil-, Kerbzahn- und Zahnwellen hergestellt werden. Die Herstellgenauigkeit und Oberflächengüte der Verzahnung liegen im durchschnittlichen Bereich. **Bild 2.17** zeigt das Kaltwalzen und das Fräsen zur Erzeugung von Außenverzahnungsgeometrien.



a) Fräsen



b) Prinzip des „GROB“-Verfahrens /N1/ mit dem Werkzeugauslauf (1: Werkstück, 2: profilierte Walzrollen und s: Werkstück-Längsvorschub)

Bild 2.17: Spanende und umformende Fertigungsverfahren zur Herstellung von Außenverzahnungen bei Vielkeilwellen

Je nach Fertigungsverfahren (spanend bzw. umformend) entstehen in der Oberflächenschicht eines Bauteiles Eigenspannungen von beträchtlicher Größe. Oft wurde im Allgemeinen davon ausgegangen, dass Zugeigenspannungen (z.B. durch Fräsen, Drehen usw.) meist zu einer Verminderung der Dauerfestigkeit, bearbeitungsbedingte Druckeigenspannungen (z.B. durch Walzen) oft zu einer Steigerung der Dauerfestigkeit führen. Untersuchungsergebnisse über mögliche Eigenspannungszustände für verschiedene spanende Fertigungsverfahren wurden beispielhaft in /Mac78/ und /Woh78/ behandelt.

Sowohl die Fertigungsverfahren als auch die Randschichtverfestigungsverfahren wirken sich in mehrfacher Hinsicht auf die Schwingfestigkeit und die Auslegung von Zahnwellen aus. Die erzeugte Qualität und damit die Verzahnungsabweichungen, von denen die wirkliche Lastaufteilung in ZWVen maßgeblich abhängt, sind vom Fertigungs- und Behandlungsverfahren abhängig /Die78/. Insbesondere treten beim Walzen geometrische Abweichungen von der Sollbeschaffenheit des Endzustandes bezüglich der Außenabmessungen und der Verzahnungsparameter der Zahnwellen auf.

Die Steigerung der Dauerfestigkeit von randschichtverfestigten bauteilähnlichen Proben ist im Wesentlichen auf die hohe Randhärte und die Ausbildung eines mehraxialen Druckeigenspannungsfeldes im oberflächennahen Bereich zurückzuführen. Als ein Beispiel sei an dieser Stelle das Festwalzen als ein mechanisches Verfestigungsverfahren, das insbesondere bei rotationssymmetrischen gekerbten Bauteilen aus duktilen Werkstoffen zum Einsatz kommt, zu nennen. Das Festwalzen bewirkt eine beträchtliche Steigerung der Härte- und der Schwingfestigkeit auf Grund der Druckeigenspannungen von oft 100 % und mehr (/Klo89/ und /Klo95/).

Die Einschätzung der Bearbeitungseinflüsse auf die Kerbwirkung durch die Einführung entsprechender Faktoren ist in den vorhandenen Richtlinien und Normen nur teilweise und nicht abgesichert (z.B. K_V nach /N3/) enthalten. Allerdings wurde der Einflussfaktor zur Beurteilung der Oberflächenrauheit berücksichtigt, dieser genügt jedoch nicht zur Bewertung der Herstellungseinflüsse.

2.3 Einführung in die numerische Berechnung der Vergleichsspannung

2.3.1 Der dreiachsige Spannungszustand

Die spannungsanalytischen Zusammenhänge für den räumlichen Spannungszustand sind Gegenstand dieses Abschnitts. Bei der Behandlung von Spannungszuständen in Konstruktionselementen sollte man zunächst unterscheiden zwischen den ungestörten und den gestörten Spannungsbereichen. Im ungestörten bzw. im glatten Bereich eines idealen Bauteiles herrscht ein einfacher, linearer Zusammenhang zwischen der äußeren Belastung und dem homogenen Spannungszustand vor, d.h. es treten nur ein- bzw. zweiachsige Spannungszustände auf.

Stören Kerben beliebiger Art den gleichmäßigen Kraftfluss bzw. Spannungsverlauf, so bilden sich an den Kerben infolge der inhomogenen Spannungsverteilung dreiachsige Spannungszustände mit allen Normal- und Schubspannungskomponenten aus (**Bild 2.18**). Es tritt hier eine gestaltbedingte Verformungsbehinderung ein (z.B. behinderte Querkontraktion), so dass entsprechende Querspannungen hervorgerufen werden.

Aus der Festigkeitslehre ist bekannt, dass der allgemeine räumliche Spannungszustand dieses Volumenelements mathematisch mit Hilfe eines Spannungstensors T_s Gl. (2.5) beschrieben werden kann.

Der Spannungstensor T_s besteht aus drei Normal- und sechs Schubspannungen und lässt sich als 3x3 Matrix darstellen /Göl89/. Gemäß **Bild 2.18** liegen die drei Hauptnormalspannungen in den Hauptachsenrichtungen x , y , z senkrecht zu den Schnittflächen. Aus den Gleichgewichtsbedingungen zugeordneter Schubspannungen am Würfелеlement folgt $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ und $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ (/Die92/ und /Iss03/).

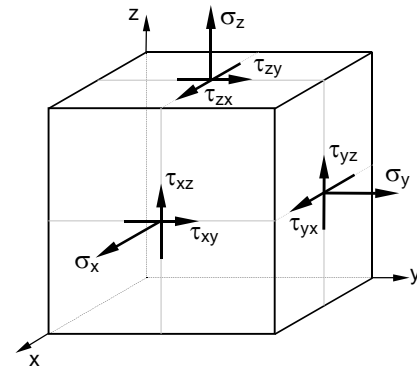


Bild 2.18: Dreiachsiger Spannungszustand an einem rechtwinkligen Volumenelement in kartesischen Koordinaten

Dieser Spannungstensor ist durch Drehung des Volumenelements auf die Hauptspannungen transformierbar Gl. (2.6), d.h. durch eine Hauptachsentransformation können die Hauptnormalspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 ermittelt werden.

$$T_s = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.5) \quad T_s = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Mit Hilfe der Finiten-Element-Methode können die Hauptspannungen durch die numerische Bestimmung der Eigenwerte des Tensors T_s ermittelt werden. An der Kerboberfläche beliebiger Kontur, die nicht unter hydrostatischem Druck steht und nicht dem elementaren Lastfall (Balken auf Zug oder Biegung) entspricht, bildet sich ein zweiachsiger Spannungszustand mit zwei Hauptnormalspannungen ($\sigma_1 > \sigma_2 > 0$) und zwei Schubspannungen aus, wie in torsionsbeanspruchten Wellen der Fall ist. Durch die Gleichheit zugeordneter Schubspannungen reduziert sich die Anzahl der Schubspannungen auf eine /Göl89/.

Die Werkstoffkennwerte werden in der Regel an glatten Proben mit bestimmter Größe und Oberflächengüte unter einachsiger Beanspruchung ermittelt. Da bei realen gekerbten Bautei-

len mehrachsige Spannungszustände vorliegen, ist eine Übertragungsfunktion notwendig, welche den mehrachsigen Spannungszustand des Bauteiles in einen äquivalenten einachsigen Spannungszustand bzw. in eine Vergleichsspannung σ_v überführt. Dafür wurden mehrere Festigkeitshypothesen entwickelt. Hiermit soll der Vergleich der komplexen Beanspruchung mit dem Festigkeitskennwert des Werkstoffes ermöglicht werden /Iss03/.

2.3.2 Übersicht der wichtigsten Vergleichsspannungshypothesen

Die Kerbvergleichsspannung repräsentiert eine festigkeitsmäßig äquivalente, gedachte einachsige Spannung, die denselben Anstrengungsgrad hervorbringt wie der räumliche Spannungszustand. Man bestimmt die Vergleichsspannungen nach Beanspruchungsart (Biegung, Torsion, etc.), nach Beanspruchungsfall (ruhend, schwingend, wechselnd) sowie nach Werkstoffeigenschaften (zäh, spröde). **Bild 2.19** veranschaulicht das Grundscheina eines Festigkeitsnachweises, der die versagensmaßgebende rechnerische Beanspruchung mit der zulässigen ertragbaren Bauteilbeanspruchung vergleicht /Bei99/.

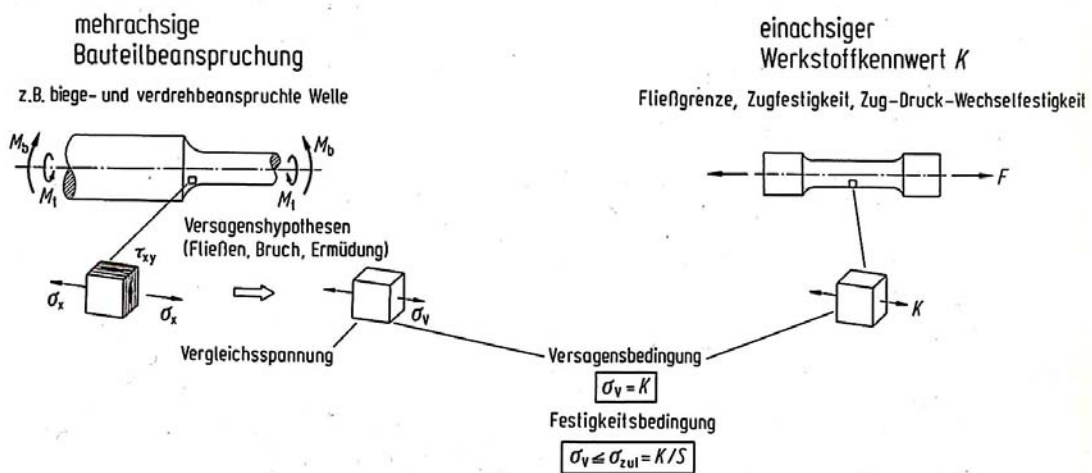


Bild 2.19: Vergleich der mehrachsigen Bauteilbeanspruchung mit einachsigem Werkstoffkennwert nach /Bei99/

Die Vergleichsspannungshypothesen unterscheiden sich darin, ob als Maß für die Erklärung des Bauteilversagens bei Erreichen der jeweiligen Festigkeitsgrenze, eine Spannung, eine Dehnung oder ein Energiebetrag herangezogen wird. Aus der Vielzahl der Festigkeitshypothesen haben sich für praktische Festigkeitsberechnungen im Maschinenbau die Normalspannungshypothese, die Gestaltänderungsenergiehypothese und die Schubspannungshypothese bewährt, die im Folgenden näher beschrieben werden.

Die Normalspannungshypothese (NSH)

Die von *Rankine* aufgestellte Normalspannungshypothese setzt voraus, dass die betragsmäßig größte Normalspannung σ_1 des dreiachsigen Spannungszustands für das Versagen des Werkstoffes verantwortlich ist. Überschreitet diese den Festigkeitskennwert des Werkstoffes (z.B. die Bruchfestigkeit) tritt der Bruch ein. Die Bruchfläche verläuft somit senkrecht zur Richtung der größten Hauptnormalspannung. Dies ist typisch für spröde Werkstoffe. Die NS-Hypothese kommt daher nur für randschichtgehärtete Bauteile bzw. überwiegend spröde Werkstoffe mit eingeschränkter Verformungsmöglichkeit zur Anwendung (/Die92/, /Bei99/ und /Iss03/). Spröde Werkstoffe verhalten sich völlig oder nahezu elastisch bis zum Bruch. Unter Sprödbbruch versteht man ein plötzliches Versagen in Form einer Werkstoffstrennung

bei elastischer Verformung ohne vorangehende nennenswerte plastische Verformung. Für die Sicherheit gegen Sprödbbruch gilt Gl. (2.7). Für die Berechnung der Vergleichsspannung σ_{v_NSH} für den dreiachsigen Spannungszustand gilt Gl. (2.8), für den zweiachsigen Spannungszustand wird Gl. (2.9) verwendet. Hier werden nur die Hauptspannungen genutzt.

$$\sigma_{v_NH} \leq \frac{\sigma_B}{S_B} = \sigma_{zul} \quad (2.7)$$

$$\sigma_{v_NSH} = |\sigma|_{\max} = \tau_{t_max} = \sigma_1 \text{ bzw. } \sigma_3 \quad (2.8)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\sigma_{v_NSH} = \sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot \left((\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \right) \leq \sigma_{zul} \quad (2.9)$$

Die Gestaltänderungsenergiehypothese(GEH)

Die von *Von Mises* aufgestellte Gestaltänderungsenergiehypothese sagt aus, dass die maßgebende Versagensursache des Werkstoffs infolge des Auftretens plastischer Verformung liegt. Der Werkstoff beginnt an der überkritisch beanspruchten Stelle zu fließen, sobald die Maximalspannung dort die entsprechende Festigkeitsgrenze des Werkstoffes (z.B. die Streckgrenze) erreicht bzw. überschreitet. Die GE-Hypothese ist auf Grund der Erklärung der Versagensursache auf duktile Werkstoffe anwendbar (z.B. /Die92/, /Bei99/ und /Iss03/).

Der Begriff Zäh- bzw. Duktilbruch beschreibt den Bruch, dem eine beachtliche plastische Verformung vorausgeht. Für die Sicherheit gegen Duktilbruch gilt Gl. (2.10). Für den dreiachsigen Spannungszustand kann die Vergleichsspannung σ_{v_GEH} entweder mit Gl. (2.11) oder Gl. (2.12) ermittelt werden. In Gl. (2.11) werden alle Spannungskomponenten an einem Volumenelement verwendet. In Gl. (2.12) hingegen die Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 . Für den zweiachsigen Spannungszustand gilt Gl. (2.13) und für die reine Schubbeanspruchung ist Gl. (2.14) anzuwenden.

$$\sigma_{v_GEH} \leq \frac{\sigma_S}{S_S} = \sigma_{zul} \quad (2.10)$$

$$\sigma_{v_GEH} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2.11)$$

$$\sigma_{v_GEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.12)$$

$$\sigma_{v_GEH} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \sigma_{zul} \quad (2.13)$$

$$\sigma_{v_GEH} = \sqrt{3} \cdot \tau_{t_max} \quad (2.14)$$

Wie schon im **Abschnitt 2.1.2** beschrieben, sind aber bei Wellen mit gehärteter Oberfläche und duktilem Kern plastische Verformungen unter der spröden Randschicht möglich. Bei dieser Versagensart ist die Duktilität des Werkstoffes die ausschlaggebende Eigenschaft und somit von maßgebender Bedeutung für die Bauteiltragfähigkeit. Hier muss die Vergleichsspannung nach GEH angewendet werden.

Die Schubspannungshypothese(SSH)

Das Einsetzen der ersten plastischen Verformung und damit der Beginn des duktilen Bruches kann aber auch durch die von *Tersca* aufgestellte Schubspannungshypothese (SSH) beschrieben werden. Nach dieser Fließhypothese versagt der Werkstoff durch das Auftreten plastischer Formänderung (Volumen- und Gestaltänderung), sobald die maximale Schubspannung die Streckgrenze überschreitet. Deshalb wird die SS-Hypothese bei zähen duktilen Werkstoffen mit ausgeprägter Streckgrenze angewandt (/Die92/, /Bei99/ und /Iss03/). Die Vergleichsspannung für den dreiachsigen Spannungszustand ergibt sich aus Gl. (2.15). Für den zweiachsigen Spannungszustand gilt Gl. (2.16).

$$\sigma_{v_SSH} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 2 \cdot \tau_{t_max} \quad (2.15)$$

$$\sigma_{v_SSH} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \sigma_{zul} \quad (2.16)$$

Da die GE- und SS-Hypothesen auf ähnlichen Prinzipien zur Versagensursachenerklärung (der Dukttilbruch wird durch die maximalen Schubspannungen, die ihr Maximum unter 45° hat, verursacht) basieren, lässt sich ein Zusammenhang (2.17) zwischen den Vergleichsspannungen ermitteln:

$$\frac{\sigma_{v_SSH}}{\sigma_{v_GEH}} \approx 1 \div 1,15 \quad (2.17)$$

Die maximale Abweichung der nach der SSH ermittelten Werte von den Werten der GEH beträgt ca. 15 %, vor allem bei Biegung und/oder Torsion ist eine starke Ähnlichkeit festzustellen /Die92/.

Die GE-Hypothese zeigt die beste Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen verformungsfähiger Werkstoffe, insbesondere bei statischer Beanspruchung als auch bei schwingender Belastung allgemein. Dies wurde von *Neuber* /Neu85/, *Heinrich* /Hei84/ und *Dietmann* /Die92/ bestätigt.

Ebenso wird auch die Verwendung der SS-Hypothese in der Praxis empfohlen, da die ermittelten SSH-Ergebniswerte höher als die ermittelten GEH-Werte sind und man somit auf der sicheren Seite liegt /Die92/.

2.4 Theorie über Kerben und Kerbwirkung - Grundlagen und Ansätze

2.4.1 Allgemeines über Beschreibung der Einzel- und Mehrfachkerben

Einzelkerben

Im Rahmen der Bauteilfestigkeit und der Tragfähigkeitsberechnung umfasst der Sammelbegriff „geometrische Kerbe“ alle Arten von konstruktiv bedingten plötzlichen Querschnittsänderungen, die in Form von Wellenabsätzen, Verzahnungsausläufen, Gewinden, SR-Nuten und Querbohrungen usw. ins Bauteil eingebracht werden.

Die Kerben führen zur Ablenkung des geradlinigen Kraftflusses in einem Bauteil und damit zu einer Abweichung des Spannungsverlaufes vom elementar berechneten Verlauf. Sie verursachen eine dreiaxiale ungleichmäßige Spannungsverteilung und fördern damit die Entstehung von Rissen auf Grund der Beanspruchungskonzentrationen. Wesentliche Einflussgrößen sind Krümmungsradius im Kerbgrund, Kerbtiefe und Flankenwinkel (z.B. /Hän60/, /Neu85/ und /Die92/).

Im Allgemeinen können Kerben in der Fachliteratur (z.B. /Thu60/ und /Rad03/) nach der Entstehungsursache in konstruktivbedingte, werkstoffbedingte, fertigungsbedingte und fugebedingte Kerben unterschieden werden.

Während sich die Konstruktionskerben (z.B. Absatz, SR-Nut, etc.) und gewisse Werkstoffkerben (z.B. auslaufende Härteschichten) als Makrokerben auf Grund ihrer eindeutig definierten Geometrie auffassen lassen, werden die Füge- und Fertigungskerben sowie ein Teil der Werkstoffkerben (z.B. Inhomogenitäten und Fehlstellen im Inneren des Materials, wie z.B. Körner, Lunker, Einschlüsse, Oberflächenrauheiten) als Mikrokerben beschrieben, da sie geometrisch vorwiegend nicht eindeutig definierbar sind.

Mehrfachkerben

In der Praxis sind aber viele hochbeanspruchte Konstruktionsbauteile mit einer Reihe dicht benachbarter und eng nebeneinander bzw. ineinander liegender Einzelkerben versehen. Diese Kerben beeinflussen sich durch die Überlagerung und die Überschneidung des gestörten Spannungsverlaufes in ihrer Kerbwirkung gegenseitig.

Infolge dieser Kerb-Wechselwirkung gelten für die Kerbwirkung solcher Mehrfachkerben andere Gesetzmäßigkeiten als bei Einzelkerben. Eine getrennte Betrachtung der Formzahlen jeder Einzelkerbe ist nicht zulässig.

Die Auswirkungen auf die Formzahl benachbarter Kerben einer Konstruktion können sowohl erhöhend als auch vermindernd sein und sind vom Kerbabstand und der Art der Einzelkerben abhängig. Daher können die Mehrfachkerben von Nutzen sein, wenn sie geringere Spannungsspitzen erzeugen als eine Einzelkerbe. In diesem Zusammenhang spricht man von Entlastungskernen. Umgekehrt wird von Belastungskernen gesprochen, wenn die zusätzlichen Kerben die Spannungen und die resultierende Kerbwirkung stark erhöhen und damit die Festigkeit eines Bauteiles wesentlich herabsetzen können /Puc72/.

Die Mehrfachkerben lassen sich nach (/Thu60/, /Per84/ und /Rad03/) unterteilen in:

in Reihe geschaltete Kerben	Anordnung mehrerer Kerben in Krafrichtung hintereinander
Parallel geschaltete Kerben	Anordnung mehrerer Kerben quer zur Krafrichtung nebeneinander
Kerbfelder	eine Kombination von in Reihe und parallel geschalteten (angeordneten) Kerben
Durchdringungskerben	Anbringung mehrerer Kerben senkrecht zueinander wie z.B. Umlaufkerben mit einem Querloch im Kerbgrund. Die Durchdringungskerben durchdringen sich gegenseitig in den Zonen größter Spannung
lasteinleitungsbedingte Kerben	Kerben im Zusammenwirken mit Kraftangriffsstellen bzw. Gebiete infolge örtlich konzentrierter Lasteinleitung in elastische Bauteile (z.B. / Thu60 /, / Rad03 / und / Nie03 /).

Die Bezeichnung „lasteinleitungsbedingte Kerben“ ist ungewohnt, jedoch im Sinne der Untergliederung sinnvoll. Diese Kerben sind mit hohen Spannungen in den Kraftangriffsstellen verbunden (das Prinzip von *DE SAINT VENANT*). Solche Spannungsüberhöhung tritt nur im Modell, nicht in der Wirklichkeit auf /**Rad03**/.

Eine Betrachtung verschiedener Teilbereiche zur Thematik der Mehrfachkerben mit einer umfangreichen Literaturzusammenstellung sowie Vorschläge für Lösungsansätze sind z.B. insbesondere bei *Perseke* /**Per84**/, bei *Thum* /**Thu60**/ und bei *Puchner* /**Puc72**/ zu finden. *Perseke* führte Untersuchungen mit Hilfe der FE-Methode zur resultierenden Mehrfachkerbwirkung bei Biegung und Torsion beim Zusammentreffen von Passfedernut/Wellenabsatz und Passfedernut/Sicherungsringnut mit verschiedenen Kerbabständen durch. Seine theoretischen Überlegungen stützte er zusätzlich durch spannungsoptische Messungen.

Die spannungsmechanische Beschreibung von konstruktiven Kerben wird durch zwei Kenngrößen gekennzeichnet; einerseits mit Hilfe von geometrieabhängigen Formzahlen, andererseits durch die Kerbwirkungszahlen.

2.4.2 Allgemeines über Formzahlen

Begriffsbestimmung

Für die Berechnung des Tragfähigkeitsnachweises einer Konstruktion wird die Formzahl (bzw. Spannungskonzentrationsfaktor oder Spannungskerbfaktor /**Neu68**/, Form- oder Kerbziffer /**Thu60**/ oder Kerbformzahl /**Rad03**/) benötigt. Die Formzahlen werden überwiegend unter der vereinfachenden Annahme des linearelastischen Werkstoffverhaltens nach dem *Hookeschen* Elastizitätsgesetz (2.18), also auf Basis der Elastizitätslehre rechnerisch ermittelt.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.18)$$

Im Hinblick auf die Anwendung der Formzahlen in *DIN 743* wird unter der Formzahl das Verhältnis der an der Störungsstelle tatsächlich auftretenden Kerbspannungsüberhöhung am gekerbten Bauteil, bezogen auf die jeweilige Nennspannung im ungekerbten Querschnitt bei linear elastischem Werkstoffverhalten verstanden. Somit lässt sich die Formzahl für die verschiedenen Belastungsarten formal sehr einfach berechnen. Für die Berechnung der Formzahlen gelten allgemein die Gleichungen (2.19) für Zug/Druck und Biegung und (2.20) für Torsion und Querkraftschub.

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nenn}}} \quad (2.19) \quad \alpha_{\tau} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{nenn}}} \quad (2.20)$$

für abgesetzte Vollwellen gilt: $\alpha_{\sigma\text{zd}} > \alpha_{\sigma\text{b}} > \alpha_{\tau} > 1$

Die Formzahl bei elastischem Werkstoff wird nur durch die Geometrie des betrachteten Bauteils bzw. die Form der Kerbe und durch die Belastungsart beeinflusst. Sie ist von der Höhe der Beanspruchung oder Nennspannung, von den Absolutwerten der Abmessungen oder vom Werkstoff und seinem Elastizitätsmodul unabhängig, solange das Material sich linear elastisch verhält bzw. solange die Streckgrenze nicht überschritten wird /**Neu85**/ . Dabei wird davon ausgegangen, dass für Kerben gleicher Geometrieverhältnisse gleiche Formzahlen gelten.

Da die Formzahlwerte je nach der verwendeten Nennspannungsdefinition und der Spannungshypothese unterschiedlich werden, ist bei der Angabe einer Formzahl darauf zu achten, dass sowohl die gleichzeitige Angabe der Methode oder Formel, nach der die entsprechende Nennspannung berechnet ist, als auch die Angabe der für die Definition der Spannungsspitze verwendeten Vergleichspannungshypothese sehr wesentlich ist (z.B. /**Thu60**/ und /**Neu85**/).

Insbesondere bei ZWVen ist die Formzahl zusätzlich von der Geometrie der benachbarten Kerben, vom elastischen Verhalten der im Eingriff befindlichen Zähne, von der Zahnseite (Zug- oder Druckseite) sowie vom Tragverhalten bzw. Belastungsverlauf über der Zahnhöhe, über dem Verbindungsumfang und über der Verbindungsbreite abhängig.

Im elastisch plastischen Spannungszustand verliert die elastische Formzahl ihre Gültigkeit. Man unterscheidet im teilplastischen Bereich zwischen Spannungs- und Dehnungsformzahlen, die nicht mehr konstant sind, sondern von der Größe der plastischen Verformung abhängen, /**Neu68**/, /**Die80**/ und /**Iss03**/ . Dabei wird die Dehnungsformzahl α_{ϵ} nach Gl. (2.21) definiert als das Verhältnis von Maximaldehnung im Kerbgrund ϵ_{\max} zu Nenndehnung ϵ_{nenn} im überelastischen Werkstoffzustand /**Die80**/ . Die Nenndehnung ergibt sich dabei formal nach Gl. (2.22) als der Quotient von der Nennspannung und dem E-Modul. Die Dehnungsformzahlen hängen von der Belastungshöhe und vom Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve ab.

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{\text{nenn}}}$$

$$(2.21) \quad \varepsilon_{\text{nenn}} = \frac{\sigma_{\text{nenn}}}{E} \quad (2.22)$$

Zwischen der Formzahl α_k im rein elastischen Bereich und den Spannungs- und Dehnungsformzahlen im teilplastischen Bereich gilt folgende Ungleichheit: $\alpha_\sigma \leq \alpha_k \leq \alpha_\varepsilon$ (**Bild 2.20**). Die Belastung einer Kerbe über den linearelastischen Bereich hinaus wird nach *Neuber /Neu68/* für einen prismatischen Stab mit scharfer Kerbe unter reiner Schubbeanspruchung mit der Gl. (2.23) ausgedrückt. Um die Anwendung der Formel (2.23) auf beliebiges Werkstoffverhalten zu ermöglichen, lässt sich aus den Gleichungen (2.19), (2.21) und (2.23) die Gleichung (2.24) herleiten. Die Maximaldehnung und die Maximalspannung lassen sich am Schnittpunkt der *Neuber-Hyperbel* im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ablesen (**Bild 2.21**).

$$\alpha_k^2 = \alpha_\sigma \cdot \alpha_\varepsilon$$

$$(2.23) \quad \sigma_{\max} \cdot \varepsilon_{\max} = \alpha_k^2 \cdot \sigma_{\text{nenn}} \cdot \varepsilon_{\text{nenn}} \quad (2.24)$$

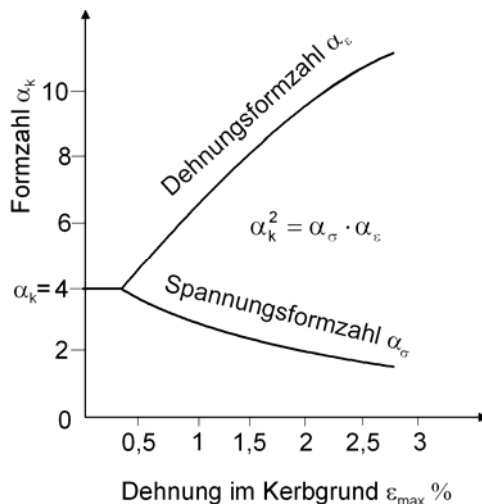


Bild 2.20: Verlauf der Spannungs- und Dehnungsformzahl über der Kerbgrunddehnung beispielhaft für $\alpha = 4$ nach der *Neuber-Formel /Neu68/*

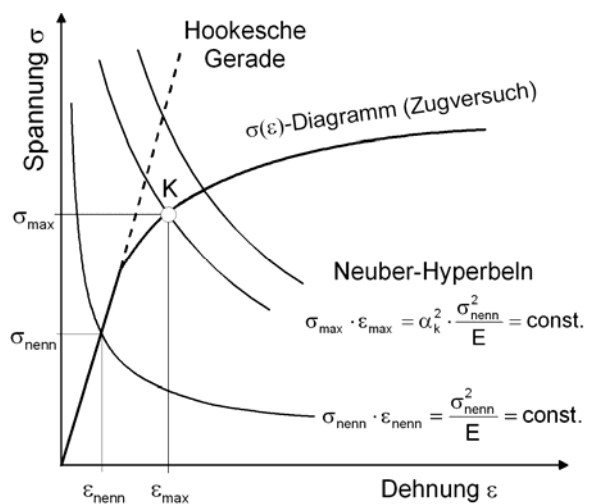


Bild 2.21: Ermittlung der Kerbgrundbeanspruchung (Punkt K) mit Hilfe der *Neuber-Hyperbel /Neu68/*

Verwendete Methoden zur Ermittlung der Formzahlen

Für die Bestimmung der Spannungsüberhöhung an gekerbten Bauteilen kann in Abhängigkeit von der Komplexität des betrachteten Bauteils mit unterschiedlichen Methoden gearbeitet werden. Diese werden in experimentelle, analytische und numerische Verfahren eingeteilt. Es ist jedoch so, dass sich nicht alle Verfahren gleich gut für die genannte Untersuchung eignen.

Die experimentelle Ermittlung der Formzahl geschieht durch den Einsatz von Dehnungsmess-technik, Spannungsoptik, Röntgengraphik, Bruchverfahren (z. B. Gibbsmodelle), Gummiverfahren (z. B. Gummimodelle), Seifenhautgleichnis als Gleichnisverfahren sowie Kupferplattierungsverfahren (*/Hän60/*, */Thu60/* und */Neu85/*).

Diese Verfahren sind jedoch außerordentlich schwierig, erfordern einen hohen Aufwand und verursachen dementsprechende Kosten. Beim Einsatz der spannungsoptischen oder dehnmesstechnischen Verfahren treten Schwierigkeiten auf, z.B. bei der Auswertung räumlicher Spannungsverläufe in kleinen Modellen, insbesondere bei zusammengesetzter Belastung sowie bei der exakten Positionierung der Dehnmessstreifen, speziell bei hohen Spannungsgradienten wie im Fußradius oder in der SR-Nut.

Häufig verwendet werden für grobe Abschätzungen von Formzahlgrößen zum Teil graphische Lösungen aus der Literatur, Lösungen mit Analogieverfahren (z.B. Seifenhautanalogie, elektrische und hydraulische Analogie) /**Thu60**/. Sehr detaillierte Sammlungen von Formzahlen unterschiedlicher Kerbformen sind z.B. bei /**Pet88**/, /**FKM1**/, /**N3**/ oder bei /**Iss03**/ zu finden.

Die numerische Berechnung von Formzahlen erfolgt mit der Finiten-Element-Methode (FEM) und/oder mit der Boundary-Element-Methode (BEM) (auch als Randintegralgleichungsmethode bezeichnet). Die FE-Methode eignet sich bei einwandfreier Implementierung der Randbedingungen hervorragend zur Untersuchung der Kerbspannungen, auch bei komplizierten Bauteilen und Lastfällen, und bietet dafür geeignete Lösungen an. Sie bietet die Möglichkeit, relativ schnell Parameterveränderungen an Bauteilgeometrie oder bei der Definition der Randbedingungen (Einspannfälle und Aufbringung der Lasten) vornehmen zu können.

Die erzielten Ergebnisse bezüglich der Bauteilbeanspruchungen können nach vergleichsweise kurzer Zeit beurteilt werden. Außerdem können bei diesem Lösungsverfahren Spannungsgradienten, Spannungsverläufe und –konzentrationen innerhalb komplizierter Bauteile erfasst und sichtbar gemacht werden. Weiterhin lassen sich bei der FEM montage- und fertigungsbedingte Ungenauigkeiten, geometrische Abweichungen sowie sämtliche ähnliche, nicht reproduzierbare, unsystematische Einflüsse vermeiden. Diese Gründe machen die Anwendung der FE-Methode für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit besonders interessant.

Darstellung von Formzahlen

Für die Darstellung und den Vergleich von Formzahlen in Abhängigkeit von geometrischen Größen kann man in der Fachliteratur auf eine Reihe von unterschiedlichen Arten zur Formzahldarstellung ausgewählter Geometrien unter Verwendung verschiedener geometrischer Verhältnisse zurückgreifen, (z.B. d/D und r/d ; D/d und r/d ; t/r und r/d ; t/d und t/r ; t/r und $d/2r$) (z.B. bei /**Neu85**/ und /**Hei84**/). Die am häufigsten verwendeten geometrischen Kenngrößen als Auftragsweise für die Formzahlen sind der Durchmessersprung d/D und die Kerbschärfe r/t , wie z.B. bei /**N3**/, /**FKM1**/, /**Ecc00**/ und /**Mel00**/.

Die die Kerbform beschreibenden Geometrieparameter sind zur Definition von flachen, tiefen und mitteltiefen Kerben entscheidend. Ist die Kerbtiefe relativ klein zur Querschnittsabmessung des Bauteils, so spricht man von flachen Kerben, deren Formzahl überwiegend nur vom Verhältnis $(t/r)^{0,5}$ abhängt. Die Formzahl tiefer Kerben ist stärker vom Kennwert $(d/r)^{0,5}$ abhängig. Die Formzahl mitteltiefer Kerben ist von $(t/r)^{0,5}$ und $(d/r)^{0,5}$ abhängig. Diese Überlegungen gelten solange keine plastischen Formänderungen auftreten (/**Neu84**/ und /**Rad03**/).

Ebener Verzerrungszustand

Von *Heinrich* /**Hei84**/ und *Melzer* /**Mel00**/ wurde auf Grund der Elastizitätstheorie die Annahme eines annähernd voll ausgebildeten ebenen Verzerrungszustands an scharfen Kerben für das homogene, isotrope Materialverhalten verwendet. Die Voraussetzung dafür ist im Allgemeinen ein mehrachsiger Spannungszustand /**Göl89**/. Weiterführende Diskussionen zum ebenen Verzerrungszustand befinden sich in /**Göl89**/ mit ausführlicher Beschreibung.

Unter Zugrundelegung des angenommenen ebenen Verzerrungszustandes kann die Umrechnung der auf die größte Hauptspannung $\sigma_{1_max_NSH}$ bezogenen Formzahlen in die auf die maximale Vergleichsspannung $\sigma_{v_max_GEH}$ bezogenen Formzahlen erfolgen. Die Richtigkeit dieser Umrechnung wurde von *Heinrich /Hei84/* exemplarisch durch Konvergenzrechnungen belegt. Damit lässt sich eine Beziehung (2.25) zwischen den Hauptspannungen σ_1 und σ_2 an der Kerboberfläche herstellen. Näherungsweise ergibt sich die Beziehung (2.26) mit Hilfe der GE-Hypothese, indem (2.25) in (2.12) eingesetzt wird, wobei die Querkontraktionszahl $\nu = 0,3$ und $\sigma_3 = 0$ sind. Die Beziehungen gelten für Zug/Druck und Biegung.

$$\sigma_2 = \nu \cdot \sigma_1 = \nu \cdot \sigma_{max} \quad (2.25) \quad \sigma_{v_GEH} \approx 0,89 \cdot \sigma_1 \approx 0,89 \cdot \sigma_{max} \quad (2.26)$$

Es ist natürlich nicht notwendig, aber allgemein in der Literatur üblich (z.B. /*Neu85/*, /*N3/*, /*FKM1/*, /*Rad03/*, /*Hei84/*, /*Ecc00/* und /*Mel00/*), der Berechnung der Formzahl $\alpha_{\sigma,\tau}$ bei räumlichen Modellen und wirklichen Kerben die erste (größte) Hauptnormalspannung in der Kerbe $\sigma_{1_max_NSH}$ nach der NSH zu Grunde zu legen, da die sich daraus ergebenden Formzahlen meistens höher liegen als die nach der GEH ermittelten.

Es kann aber auch für die Gewinnung der Formzahlen die maximale Vergleichsspannung $\sigma_{v_max_GEH}$ nach der GEH direkt eingesetzt werden. Für die jeweilige Anwendung einer Festigkeitshypothese sind die Werkstoffeigenschaften (duktile oder spröde) und die Belastungsart (dynamisch oder statisch) zu berücksichtigen. Es wird nach *Neuber* (z.B. in: /*Hei84/*) empfohlen, mit der Maximalvergleichsspannung nach der GEH bei duktilen Stählen zu arbeiten.

Im Rahmen der nachfolgenden FE-Untersuchungen wird zur Formzahlberechnung in erster Linie die größte Hauptspannung nach der NSH gewählt und ausgewertet. Da eine Mehrzahl der Maschinenbauteile einschließlich der Zahnwellen aus zähen Werkstoffen hergestellt wird, und da bei dynamischer Beanspruchung die GEH besser als die NSH zutrifft, erfolgt zusätzlich eine Auswertung der Vergleichsspannung nach der GEH für die Formzahlbestimmung.

Anmerkung

- Bei Vergleichen werden die Formzahlen im weiteren Verlauf dieser Arbeit entsprechend mit α_{NSH} bzw. α_{GEH} indiziert. Formzahlen ohne Index beziehen sich immer auf σ_{v_NSH} . Die Indizes σ bzw. τ stehen für Normalspannungen (für Zug/Druck und Biegung) bzw. für Schubspannungen (für Torsion und Schub).
- Die Belastungsarten werden getrennt betrachtet, entsprechend werden auch die Formzahlen angegeben und jeweils mit dem Index σ_{zd} für Zug/Druck, σ_b für Biegung und τ_t für Torsion gekennzeichnet. Wird im Text auf die Angabe der Indizes zd und b zur Unterscheidung von Zug/Druck und Biegung bei einer Kenngröße α_σ verzichtet, so soll die Aussage sinngemäß für beide Fälle gelten.
- Weiterhin werden auch Indizes gebraucht, die zur Beschreibung der Kerbform (z.B. Zahnfuß, SR-Nut, freier oder gebundener Auslauf) und zur Erklärung der verwendeten Bezugsdurchmesser für die Nennspannungsdefinition (z.B. Wellen-, Fuß- oder Ersatzdurchmesser) dienen.

Für die Belastungsarten Biegung und Zug/Druck (**Bild 2.22**) gelten die Beziehungen (2.27) und (2.28) und damit die Gleichungen (2.29) und (2.30) zur Berechnung der Formzahlen. Die allgemeine Beziehung zwischen den ermittelten Formzahlen aus der größten Hauptspannung oder der maximalen Vergleichsspannung, wird nach (2.31) angegeben.

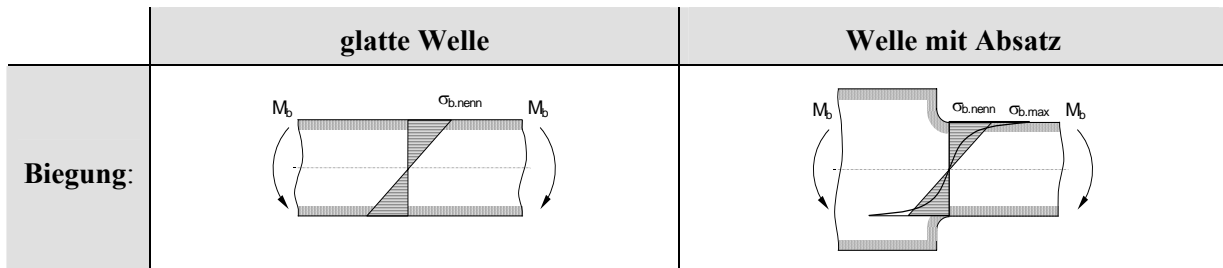


Bild 2.22: Spannungstiefenverläufe an glatter Welle und Welle mit Absatz bei Biegung /Mel03/

$$\sigma_{b,zd-max} = \sigma_{v_max_NSH} = \sigma_{l_max} \quad (2.27)$$

$$\sigma_{v_nenn_GEH} = \sigma_{b,zd_nenn_NSH} = \sigma_{b,zd_nenn} \quad (2.28)$$

$$\alpha_{\sigma_{b,zd_NSH}} = \frac{\sigma_{l_max}}{\sigma_{b,zd_nenn}} = \frac{\sigma_{b,zd_max}}{\sigma_{b,zd_nenn}} = \frac{\sigma_{v_max_NSH}}{\sigma_{b,zd_nenn}} \quad (2.29)$$

$$\alpha_{\sigma_{b,zd_GEH}} = \frac{\sigma_{v_max_GEH}}{\sigma_{v_nenn_GEH}} = \frac{\sigma_{v_max_GEH}}{\sigma_{b,zd_nenn}} \quad (2.30)$$

$$\alpha_{\sigma_{b,zd}}(\sigma_{v_max_GEH}) = 0,89 \cdot \alpha_{\sigma_{b,zd}}(\sigma_{v_max_NSH}) \quad (2.31)$$

Für Torsion bzw. Querkraftschub (**Bild 2.23**) gelten die Festlegungen (2.32) und (2.33) und damit die Gleichungen (2.34) und (2.35) zur Berechnung der Torsionsformzahlen. Die allgemeine Beziehung zwischen den Torsionsformzahlen aus der größten Hauptspannung oder der maximalen Vergleichsspannung, wird nach (2.36) angegeben.

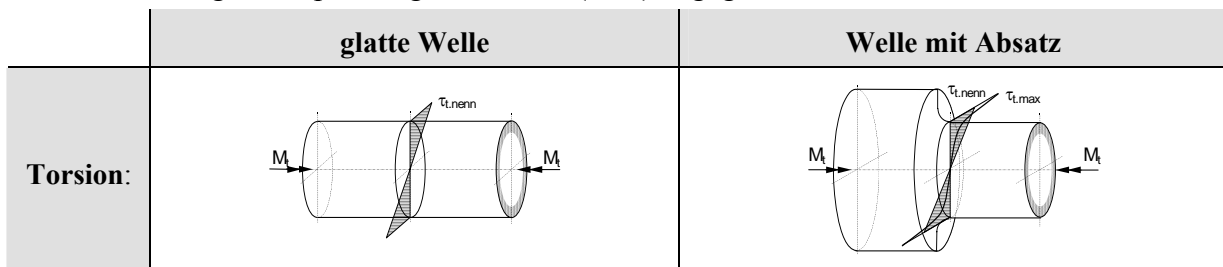


Bild 2.23: Spannungstiefenverläufe an glatter Welle und Welle mit Absatz bei Torsion /Mel03/

$$\tau_{t_max} = \sigma_{v_max_NSH} = \sigma_{l_max} \quad (2.32)$$

$$\sigma_{v_nenn_GEH} = \sqrt{3} \cdot \tau_{t_nenn_NSH} = \sqrt{3} \cdot \tau_{t_nenn} \quad (2.33)$$

$$\alpha_{\tau_NSH} = \frac{\sigma_{l_max}}{\tau_{t_nenn}} = \frac{\tau_{t_max}}{\tau_{t_nenn}} = \frac{\sigma_{v_max_NSH}}{\tau_{t_nenn}} \quad (2.34)$$

$$\alpha_{\tau_GEH} = \frac{\sigma_{v_max_GEH}}{\sigma_{v_nenn_GEH}} = \frac{\sigma_{v_max_GEH}}{\sqrt{3} \cdot \tau_{t_nenn}} \quad (2.35)$$

$$\alpha_{\tau}(\sigma_{v_max_NSH}) = \alpha_{\tau}(\sigma_{v_max_GEH}) \quad (2.36)$$

2.4.3 Bezogenes Spannungsgefälle

Versuchsergebnisse zeigen, dass im Allgemeinen für die Berechnung der Kerbwirkung nicht nur die Spannungserhöhung, sondern auch die Kenntnis über das bezogene Spannungsgefälle G^* (relativer Spannungsgradient) mit der Einheit mm^{-1} von großer Bedeutung ist. Das bezogene Spannungsgefälle wird vor allem benötigt, um die Stützwirkungseffekte (siehe **Abschnitt 2.4.4**) in der Oberflächenschicht zu erfassen (/Neu85/ und /Rad03/).

Wie bei der Formzahlermittlung erfolgen die Betrachtungen der Spannungsgradienten beim linear-elastischen Werkstoffverhalten nach dem *Hookeschen* Gesetz Gl. (2.18). Dies geschieht durch die Gradientenbildung der örtlichen Spannungsverteilung am Ort der maximalen Spannung als Funktion der Tiefe x , senkrecht zur Bauteiloberfläche im Kerbgrund (**Bild 2.24**). Dieser Verlauf wird auch als Spannungs-, Formzahl-tiefenverlauf, absoluter Spannungsgradient, Anstrengungsgefälle oder Spannungsabfall bezeichnet.

Das bezogene Spannungsgefälle G^* ergibt sich aus dem Differentialquotienten (2.37) und wird als Verhältnis des Maximalwerts des Spannungsgefälles G , unmittelbar an der Kerboberfläche, bezogen auf die maximale Kerbspannung σ_{\max} bezeichnet, siehe Gl. (2.38) und Gl. (2.39).

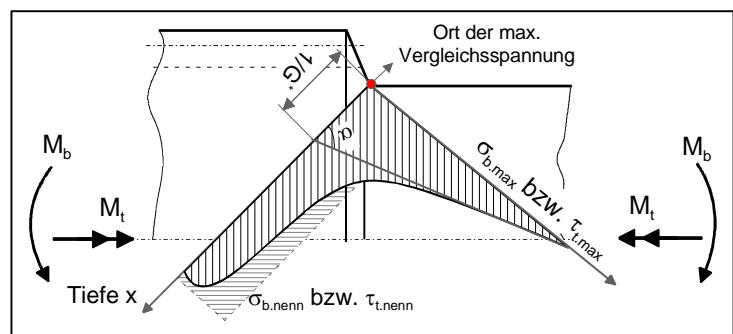


Bild 2.24: Bezogenes Spannungsgefälle, beispielhaft an einer aufgesetzten Zahnwelle bei Torsion oder Biegung

Die Beziehungen gelten für Zug/Druck- und Biegung sowie in modifizierter Form für Torsion (bei Torsion ist τ anstatt σ verwenden).

$$G^* = \left(\frac{G}{\sigma_{\max}} \right)_{x=0} \quad (2.37) \quad G = \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)_{\max} \quad (2.38)$$

$$G^* = \frac{1}{\sigma_{\max}} \cdot \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)_{\max} \quad (2.39)$$

Das Spannungsgefälle ist hauptsächlich vom Kerbradius, von der Bauteilgröße und von der Beanspruchungsart abhängig. Es ist jedoch werkstoffunabhängig. Mit zunehmender Kerbschärfe vergrößert sich das bezogene Spannungsgefälle an der Spannungsspitze. Umgekehrt muss es bei abnehmender Schärfe der Kerbe niedrig sein (**Bild 2.25**). Deshalb ist jede Kerbe durch einen Spannungsgradienten und -tiefenverlauf gekennzeichnet (/Thu60/).

Mit größer werdendem Bauteildurchmesser sinken bei gleicher maximaler Biege- oder Zugspannung (bzw. bei konstanten Formzahlen) die bezogenen Spannungsgradienten und damit die Stützwirkung, d.h. die Stützwirkung wirkt beim großen Spannungsgradienten stärker als bei kleinem (/Thu60/, /Hei84/, /Lin98/, /Ecc00/ und /Mel03/). Dementsprechend wird das Phänomen der mit zunehmendem Bauteildurchmesser abfallenden Biege- und Torsionswechselfestigkeit erfasst.

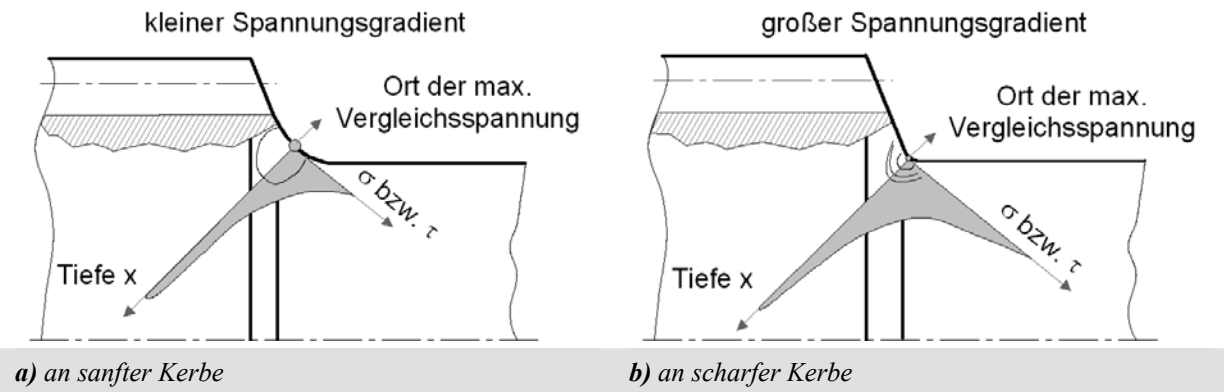
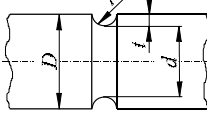
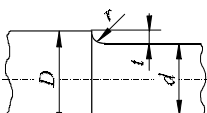


Bild 2.25: Spannungsgefälle; a): an sanfter Kerbe und b): an scharfer Kerbe

Die Berechnungsvorschriften nach *Thum /Thu60/* zur Bestimmung der bezogenen Spannungsgefälle finden sich auch in etwas erweiterter Form in der *FKM-Richtlinie /FKM1/* sowie in der *DIN 743 /N3/*, siehe **Tabelle 2.1**.

Tabelle 2.1: Näherungsbeziehungen für die Berechnung des bezogenen Spannungsgradienten für Wellen (Voll-Rundstabproben) mit Umlaufkerbe bzw. mit Absatz bei unterschiedlichen Belastungsarten in Abhängigkeit vom Kerbradius und Wellendurchmesser, entnommen aus der Literatur */Thu60/*, */Wel76/*, */Rad03/*, */TGL1/*, */FKM1/* und */N3/*

		Bezogenes Spannungsgefälle G^* [mm^{-1}]		
Probengeometrie	Belastung	G^* /Thu60/, /Rad03/, /Wel76/	G^* /TGL1/	$G_{\sigma,\tau}^*(r)$ /FKM1/ bzw. G^* /N3/
 <p>Vollwelle mit Rundnut</p>	Zug/Druck	$\frac{2}{r}$	$\frac{2 \cdot (1 + \varphi)}{r}$	$\frac{2 \cdot (1 + \varphi)}{r}$
	Biegung	$\frac{2}{r} + \frac{2}{d}$	$\frac{2 \cdot (1 + \varphi)}{r} + \left(\frac{2}{d}\right)^{(1)}$	
	Torsion	$\frac{1}{r} + \frac{2}{d}$	$\frac{1}{r} + \left(\frac{2}{d}\right)^{(1)}$	$\frac{1}{r}$
 <p>Vollwelle mit Absatz</p>	Zug/Druck	$\frac{2}{r}$	$\frac{2,3 \cdot (1 + \varphi)}{r}$	$\frac{2,3 \cdot (1 + \varphi)}{r}$
	Biegung	$\frac{2}{r} + \frac{4}{D + d}$	$\frac{2,3 \cdot (1 + \varphi)}{r} + \left(\frac{2}{d}\right)^{(1)}$	
	Torsion	$\frac{1}{r} + \frac{4}{D + d}$	$\frac{1,15}{r} + \left(\frac{2}{d}\right)^{(1)}$	$\frac{1,15}{r}$
<p>für $d/D > 0,67$ nach <i>/N3/</i> und <i>/TGL1/</i> bzw. $t/d \leq 0,25$ nach <i>/FKM1/</i>; $r > 0$: $\varphi = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{\frac{t}{r}} + 2}$</p> <p>für $d/D \leq 0,67$ nach <i>/N3/</i> und <i>/TGL1/</i> bzw. $t/d > 0,25$ nach <i>/FKM1/</i>: $\varphi = 0$</p> <p>⁽¹⁾ entfällt bei Berechnung der Stützzahl n nach <i>Siebel</i> und <i>Stieler</i> <i>/Sti54/</i></p>				

Aus der *Tabelle 2.1* ist ersichtlich, dass das bezogene Spannungsgefälle in der *TGL 19340 /TGL1/* nicht nur abhängig vom Kerbradius, sondern auch vom Nenndurchmesser berechnet wird. In der *DIN 743 /N3/* wird der Anteil des Biegespannungsgefälles $G^*(d) = 2/d$ bei Biegung und Torsion für Wellen mit Absatz oder Umlaufkerbe nicht addiert bzw. durch den geometrischen Größeneinflussfaktor $K_2(d)$ erfasst. Die Einführung des Faktors $K_2(d)$ ist irreführend. In Anlehnung an *DIN 743* errechnet sich der Faktor $K_2(d)$ bei Biegung und Torsion für den Durchmesser $d < 150$ mm mit Gl. (2.40). Für $d \geq 150$ mm gilt $K_2(d) = 0,8$. Für Zug/Druck ist $K_2(d) = 1$.

$$K_2(d) = 1 - 0,2 \cdot \frac{\lg(d/7,5\text{mm})}{\lg 20} \quad (2.40)$$

Eine sinnvolle Festlegung in *DIN 743* könnte die getrennte Berechnung der Stützwirkung abhängig vom Kerbradius $n(r)$ und vom Durchmesser $n(d)$ sein. Allerdings sind dann weitere Größen im Berechnungsablauf von *DIN 743* von dieser Änderung betroffen.

Anmerkung

Da für die Zahnwellen bisher keine Näherungsgleichungen zur Ermittlung des bezogenen Spannungsgefälles im Auslaufbereich vorliegen, wird im Rahmen dieser Arbeit versucht, mit Hilfe von den FE-Berechnungen einen Berechnungsansatz aufzustellen, siehe **Abschnitt 4.3.6**.

2.4.4 Mikro- und Makrostützwirkung

Zur Berücksichtigung der Spannungskonzentrationen bei der Tragfähigkeitsberechnung von Wellen sind zwei Effekte zu beachten: die mit der Kristallstruktur des Werkstoffes in Zusammenhang stehende Mikrostützwirkung n (die dynamische Stützwirkung bzw. die Stützzahl) und die durch Abweichungen vom linearelastischen Gesetz entstehende Makrostützwirkung (bzw. „die Schlauheit des Materials“ nach */Neu68/*). Die beiden Stützwirkungskonzepte, die lokale Spannungsüberhöhungen verringern, werden hier kurz erläutert.

Mikrostützwirkung

Metallische Werkstoffe besitzen in der Wirklichkeit eine Struktur aus Körnern (Kristalle) mit unterschiedlicher Orientierung des Kristallgitters und verschiedenen Gitterbaufehlern (Mehrphasen, Einschlüsse und Fehlstellen). Dadurch unterscheiden sie sich, insbesondere im Kerbgrund von scharfen Kerben, vom für die Berechnung der Formzahl zu Grunde gelegten strukturellen Idealstoff.

Die auf der Kontinuumsmechanik basierenden Berechnungsergebnisse lassen sich also nicht auf beliebig kleine Volumenbereiche übertragen, wenn sich innerhalb solcher Bereiche die Spannungskonzentration stark ändert.

Infolge des tatsächlichen Gefügebauaufbaus bestehen innerhalb kleiner Stoffbereiche gegenseitige Bindungen der Teilchen und damit größere Verformungswiderstände. Es ist deshalb davon auszugehen, dass sich einzelne Stoffbereiche unter Last „blockweise“ auf ihre Umgebung abstützen (Mikrostützwirkung), was sich in einem veränderten Spannungsverlauf äußert */Neu68/*, siehe **Bild 2.26**.

Darüber hinaus werden durch diesen Effekt Materialbereiche höchster Spannungen entlastet, während weiter innen liegende und weniger stark beanspruchte Bereiche stärker an der Kraftübertragung beteiligt sind.

Demzufolge wird ein gekerbtes Bauteil im Korbquerschnitt eine höhere rechnerische Spannung ohne Bruch ertragen, was sich in einer scheinbar höheren Festigkeit im Vergleich zu einem homogenen Spannungszustand äußert. Die Stützwirkung ist umso größer, je steiler der Spannungsgradient ist. Dieser Effekt nimmt mit zunehmender Werkstofffestigkeit ab.

Die Mikrostützwirkung dient der rechnerischen Bestimmung der Kerbwirkungszahlen aus den Formzahlen. Im Schrifttum sind verschiedene, unterschiedliche Varianten zur Erfassung dieses Effektes vorgeschlagen, z.B. /Neu68/, /Thu60/, /Sti54/ und /Die85/.

Im **Abschnitt 2.4.6.2** wird auf weitere Ausführungen zur Thematik der Stützwirkungsmodelle eingegangen.

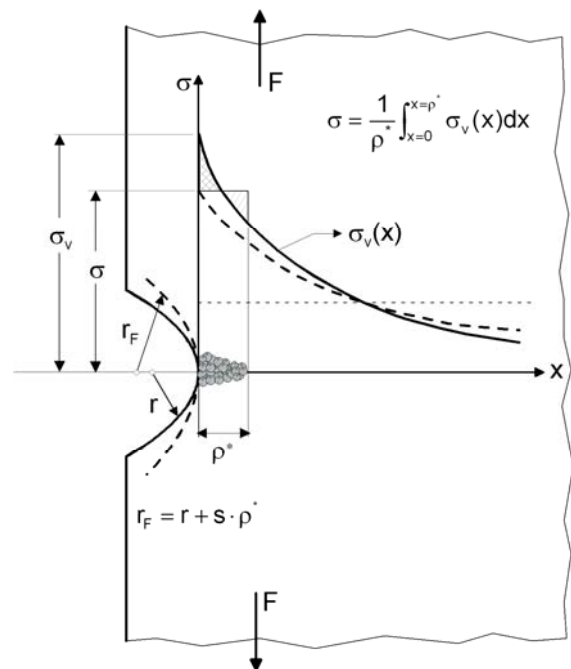


Bild 2.26: Modell der Mikrostützwirkung an einer elliptischen Spitzkerbe in einer halb-unendlichen Scheibe nach /Neu68/

Für die Berechnung der Sicherheit gegen plastische Verformung und Risseinleitung im Bereich der Kurzzeitfestigkeit ($N \leq 10^2 \dots 10^4$) reicht das Konzept der Mikrostützwirkung nicht aus, die Kerbwirkungsminderung zu begründen. Deshalb wird das Konzept der Makrostützwirkung eingesetzt.

Makrostützwirkung

Während die Mikrostützwirkung nur einen kleinen Bauteilbereich erfasst und über den gesamten Lebensdauerbereich (Zeit- und Dauerfestigkeit) wirksam ist, erstreckt sich die Makrostützwirkung auf einen größeren Bauteilbereich und gewinnt erst im Kurzzeitfestigkeitsbereich an Bedeutung /Neu68/.

Sie beschreibt den Effekt der Reduzierung der Spannungsspitze durch lokale Fließvorgänge des Werkstoffes und ein stärkeres Mittragen der weiter innen liegenden Werkstoffbereiche, d.h. sie berücksichtigt dabei eine in kleinen Bereichen zulässige Plastizierung des Werkstoffes. Die Berücksichtigung einer Makrostützwirkung, bleibt deshalb auf duktile Werkstoffe beschränkt. Für spröde Werkstoffe und für Bauteile mit spröder Randschicht ohne hinreichende plastische Verformungsfähigkeit ist die Anwendung einer plastischen Stützzahl nicht zulässig /Hän95/.

In Anlehnung an die DIN 743 /N3/ wird bei den Wellen für die Berechnung der Sicherheitszahl gegen bleibende plastische Verformung unter Maximalbelastung die Berechnung der Bauteilfließgrenzen an der Kerbe $\sigma_{zd,bFK}$ für Biegung und Zug/Druck nach Gl. (2.41) und τ_{tFK} für Torsion nach Gl. (2.42) benötigt.

$$\sigma_{zd,bFK} = K_1(d_{eff}) \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot \sigma_S(d_B) \quad (2.41)$$

$$\tau_{tFK} = K_1(d_{eff}) \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot \frac{\sigma_S(d_B)}{\sqrt{3}} \quad (2.42)$$

Zur Bestimmung von σ_{bFK} und τ_{tFK} sind die Streckgrenze σ_S , die statische Stützwirkung K_{2F} (Stützwirkungsanteil bei ungekerbten Querschnitten) und der Erhöhungsfaktor der Fließgrenze durch mehrachsigen Spannungszustand bei Umdrehungskernen γ_F notwendig. Übliche Modellvorstellungen gehen davon aus, dass sich hier Spannungskonzentrationen und Stützwirkung in etwa aufheben.

Die statische Stützziffer K_{2F} ist von der Belastungsart, der Art der Welle (Voll- oder Hohlwelle) und vom Werkstoff (mit harter oder ohne harte Randschicht) abhängig. Sie ist vom bezogenen Spannungsgefälle unabhängig.

Der Faktor K_{2F} liegt im Bereich zwischen 1 und 1,2 nach **/N3/**. Der Faktor der Fließbehinderung γ_F liegt bei Zug/druck oder Biegung im Bereich $1 < \gamma_F < 1,15$ **/N3/** (bzw. $1 < \gamma_F < 1,3$ nach **/TGL1/**). Für Torsion gilt $\gamma_F = 1$. Die Werte für K_{2F} und γ_F liegen gegenwärtig nicht umfassend genau vor.

In der Vergangenheit wurde eine Vielzahl von Näherungsgleichungen zur Abschätzung der Makrostützwirkung entwickelt. Eine zusammenfassende Darstellung ist in der Arbeit von *Dittmann* **/Dit91/** enthalten.

2.4.5 Kerbwirkungszahl

Infolge der Stützwirkung wird die Wirkung der aus der Formzahl berechneten theoretischen Spannungsmaxima durch die benachbarten Gebiete vermindert. Daher ist die Kerbwirkungszahl im Allgemeinen wesentlich kleiner als die Formzahl, es gilt $\beta_\sigma \leq \alpha_\sigma$. Demnach ist für den Konstrukteur nicht so sehr die Spannungsspitze $\alpha_\sigma \cdot \sigma_{nenn}$ im Kerbgrund, sondern die kleinere Spannung $\beta_\sigma \cdot \sigma_{nenn}$ als Ursache für den Dauerbruch und als Grundlage für die Festigkeitsberechnung maßgebend, z.B. **/N3/**, **/Sch79/** und **/Iss03/**.

Die Kerbwirkungszahl charakterisiert das Verhältnis der Wechselfestigkeit einer glatten, ungekerbten polierten Werkstoffprobe ($\sigma_{zd,bW}$ bzw. τ_{tW}) mit dem Durchmesser d zur Wechselfestigkeit einer gekerbten Probe ($\sigma_{zd,bWK}$ bzw. τ_{tWK}) mit dem Durchmesser d im Kerbquerschnitt, mit jeweils idealglatter Oberfläche und mit gleichen Werkstoffeigenschaften, (**/N3/**, **/Sch79/**, **/Die85/** und **/Rad03/**). Sie wird mit Gl. (2.43) für Zug/Druck und Biegung und mit Gl. (2.44) für Torsion bestimmt.

$$\beta_{\sigma d.b} = \frac{\sigma_{zd.bW}}{\sigma_{zd.bWK}} \quad (2.43) \quad \beta_\tau = \frac{\tau_{tW}}{\tau_{tWK}} \quad (2.44)$$

Bei einem schwingbeanspruchten Bauteil mit konstruktiven Kerben ist also mit dem Versagen durch Ermüdungsbruch zu rechnen, wenn die Nennspannungsamplitude die Gestaltfestigkeit des Bauteils erreicht. Die Kerbwirkungszahl erfasst den Einfluss von Form und Größe der Kerbe auf die Ermüdungsfestigkeit in Abhängigkeit von der Beanspruchungsart, der Bauteilgröße und den spezifischen Werkstoffeigenschaften, z.B. **/Die92/** und **/Rad03/**.

Für gekerbte Bauteile mit identischer Kerbgeometrie (bzw. mit gleicher Formzahl) hat das große Bauteil mit großem Kerbradius oder Durchmesser und damit verbunden mit geringerem Spannungsgradienten die höhere Kerbwirkungszahl. Bei spröden (kerbempfindlichen) Werkstoffen bzw. bei einer höheren Zugfestigkeit von Bauteilen mit ähnlicher Geometrie werden auch höhere Kerbwirkungszahlen ermittelt /**Rad03**/. Hierbei besteht ein sehr geringer Unterschied zwischen Kerbwirkungszahl und Formzahl infolge des schwächeren Einflusses der Stützwirkung. Es kann $\beta_{\sigma,\tau} = \alpha_{\sigma,\tau}$ gelten, (/**Thu60**/, /**Lin96**/, /**Iss03**/ und /**Rad03**/).

Die Größe der Kerbwirkungszahl nach der Definition in Gl. (2.43) bzw. Gl. (2.44) ist begrenzt durch die Bedingung $1 \leq \beta_{\sigma,\tau} \leq \alpha_{\sigma,\tau}$, nach oben hin durch die Formzahl und nach unten hin durch eins. Der untere Grenzwert $\beta_{\sigma,\tau} = 1$ kennzeichnet einen völlig kerbunempfindlichen Werkstoff oder umgekehrt. Der obere Grenzwert $\beta_{\sigma,\tau} = \alpha_{\sigma,\tau}$ bedeutet überhaupt höchstmögliche Kerbwirkung bei schwingender Beanspruchung. Im technischen Bereich ($N \approx 10^6$) überschreiten die Kerbwirkungszahlen für schwingend beanspruchte gekerbte Bauteile aus Stahl kaum den Wert $\beta_{\sigma,\tau} \leq 6$ (/**N3**/, /**Sch79**/, /**Die92**/ und /**Rad03**/).

Während es für die Bestimmung der Formzahl rechnerische Lösungen gibt, basiert die Ermittlung der Kerbwirkungszahl auf erfahrungsgemäßen bzw. empirischen Ansätzen. Da in dieser Arbeit verschiedene Kerbgeometrien mit unterschiedlichen Rundungsradien behandelt und entsprechende Formzahlen berechnet werden, wird im **Abschnitt 2.4.6** auf die Vorstellung der Bestimmungsmöglichkeit der Kerbwirkungszahlen eingegangen.

2.4.6 Bestimmungsmöglichkeiten der Kerbwirkungszahl bzw. der Stützziffer

2.4.6.1 Experimentelle Verfahren

Nicht immer stehen Formzahlen oder FE-Ergebnisse zur Verfügung. Hierfür wird die Anwendung experimentell ermittelter Kerbwirkungszahlen durch Dauerversuche an glatten und gekerbten Bauteilen als erste Bestimmungsmöglichkeit empfohlen, sofern diese verfügbar sind, /TGL1/ und /N3/. Oftmals werden mit diesen experimentellen Werten auch Einflüsse erfasst, die rechnerisch nicht bestimmbar sind (z.B. Tribokorrosion).

Da die Versuchswerte in der Regel für kleine Proben bei einem bestimmten Bezugsdurchmesser d_{BK} ermittelt wurden oder werden, lassen sich diese nicht ohne weiteres auf andere Bauteilgrößen übertragen. Für veränderte Durchmesser bei Beibehaltung der geometrischen Größenverhältnisse kann der veränderte Spannungsgradient durch den Größeneinflussfaktor $K_3(d)$ erfasst werden, siehe Gl. (2.45). Der Faktor $K_3(d)$ wird nach DIN 743 /N3/ mit den Gleichungen (2.46) oder (2.47) bestimmt.

$$\beta_{\sigma,\tau}(d) = \beta_{\sigma,\tau}(d_{BK}) \cdot \frac{K_3(d_{BK})}{K_3(d)} \quad (2.45)$$

$$\text{für } 7,5 \text{ mm} \leq d < 150 \text{ mm gilt: } K_3(d) = 1 - 0,2 \cdot \lg \alpha_{\sigma,\tau} \cdot \frac{\lg(d/7,5)}{\lg 20} \quad (2.46)$$

$$\text{für } d \geq 150 \text{ mm gilt: } K_3(d) = 1 - 0,2 \cdot \lg \alpha_{\sigma,\tau} \text{ nach /N3/ bzw. } K_3(d) = 0,98 \text{ nach /TGL1/} \quad (2.47)$$

Anmerkung: Die Formzahl $\alpha_{\sigma,\tau}$ kann durch $\beta_{\sigma,\tau}(d_{BK})$ näherungsweise ersetzt werden.

Dividiert man die „modifizierte“ Kerbwirkungszahl durch den geometrischen Größeneinflussfaktor $K_2(d)$ so ergibt sich der Gestalteinflussfaktor $K'_{\sigma,\tau}$ mit Gl. (2.48) für Wellen ohne harte Randschicht /TGL1/.

$$K'_{\sigma,\tau} = \frac{\beta_{\sigma,\tau}(d)}{K_2(d)} \quad (2.48)$$

Die experimentell bestimmten Kerbwirkungszahlen gelten im Allgemeinen für Stahlwerkstoffe. Für Eisengusswerkstoffe sind sie kleiner als für Stahl, da die Stützzahlen größer sind. Die Umrechnung erfolgt je nach Belastungsart näherungsweise gemäß Gl. (2.49) nach /FKM1/:

$$\beta_{\sigma,\tau_G} = \beta_{\sigma,\tau_St} \cdot \frac{n_{\sigma,\tau_St}}{n_{\sigma,\tau_G}} \quad (2.49)$$

2.4.6.2 Theoretische Verfahren

Wegen des hohen Aufwandes einer unmittelbaren experimentellen Bestimmung der Kerbwirkungszahl aus dem Dauerfestigkeitsversuch, existieren in verschiedenen Veröffentlichungen auf dem Gebiet der Festigkeitsberechnung metallischer Bauteile eine ganze Reihe von unterschiedlichen Berechnungskonzepten, Näherungsgleichungen und Bemühungen zur Bestimmung der Kerbwirkungszahl ausgehend von der Formzahl und der Größe der Stützwirkung (z.B. /Sti54/, /Thu60/, /Neu68/, /Hän81/, /Die85/, /Jae88/, /Klo89/, /FKM1/ und /N3/). Die meisten Berechnungsverfahren berücksichtigen den Werkstoffeinfluss (Zugfestigkeit, Streck-

grenze), die Belastungsart und die Bauteilgeometrie und gehen von einer linearen Proportionalität zwischen Kerbwirkungszahl und Formzahl aus.

Die vorhandenen Näherungsformeln gehen im Allgemeinen auf zwei Grundbeziehungen; auf die Kerbempfindlichkeit nach *Thum* oder auf die Stützziffer nach *Siebel* zurück. Sie unterscheiden sich in den theoretischen Vorstellungen über das Wesen der Kerbwirkung bei schwingender Beanspruchung, und sie kommen dementsprechend auch zu mehr oder weniger unterschiedlichen Ergebnissen, (/Die85/, /Rad03/, /Iss03/ und /Nie03/). Da sie in dieser Arbeit gebraucht werden, werden im Folgenden einige der bekannten Konzepte kurz vorgestellt.

Ansatz der bezogenen Spannungsgradienten nach SIEBEL und STIELER

Eine am häufigsten angewendete Methode zur Berechnung der Kerbwirkungszahl wurde nach *Siebel* /Sie95/ und *Stieler* /Sti54/ entwickelt. Sie definiert eine Stützziffer n , die im Wesentlichen nicht nur von der Kerbform des Bauteils, der Beanspruchungsart, der Kerbempfindlichkeit des verwendeten Werkstoffs (spröde, duktil) abhängt, sondern auch vom bezogenen Spannungsgefälle G^* . Die Stützziffer ist jedoch unabhängig von der Formzahl. Danach ist die Kerbwirkungszahl $\beta_{\sigma,\tau}$ nach Gl. (2.50) definiert als das Verhältnis der Formzahl $\alpha_{\sigma,\tau}$ zur Stützziffer n . Die Stützziffer ergibt sich aus Gl. (2.51) durch einfache Umformung von Gl. (2.50).

$$\beta_{\sigma,\tau} = \frac{\alpha_{\sigma,\tau}}{n} \quad (2.50) \quad n = \frac{\alpha_{\sigma,\tau}}{\beta_{\sigma,\tau}} \quad (2.51)$$

Die empirische Näherungsformel zur rechnerischen Ermittlung der Stützziffer n wird im Normalfall wie im Tragfähigkeitsnachweis von *DIN 743* /N3/ mit Gl. (2.52) für Wellen ohne harte Randschicht und mit (2.53) für Wellen mit harter Randschicht angegeben.

$$n = 1 + \sqrt{G^* \cdot mm} \cdot 10^{\left(0,33 + \frac{\sigma_s(d)}{712 \frac{N}{mm^2}}\right)} \quad (2.52) \quad n = 1 + \sqrt{G^* \cdot mm} \cdot 10^{-0,7} \quad (2.53)$$

Diese Unterscheidung betrifft keine generell spröden Werkstoffe. Die Stützwirkung bei harten Randschichten beruht auf den hohen Druckeigenstressungen.

Eine weitere Möglichkeit zur Einschätzung der Stützziffer ergibt sich aus Diagramm nach *Siebel* (z.B. in /N3/), siehe **Bild 2.27**.

Anmerkung

Es ist wichtig, die Streckgrenze $\sigma_s(d)$ für das Bauteil einzusetzen.

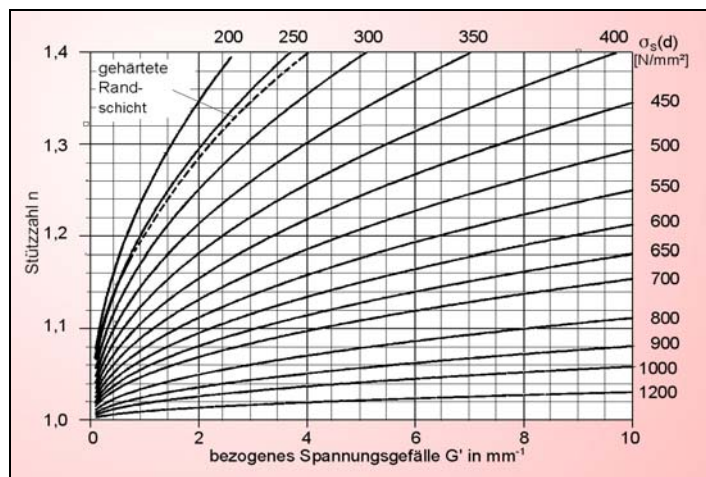


Bild 2.27: Stützzahlen n in Abhängigkeit vom bezogenen Spannungsgradienten nach /N3/

Vorgehensweise nach der FKM-Richtlinie

Die *FKM-Richtlinie* /**FKM1**/ bietet einen rechnerischen Festigkeitsnachweis für stabförmige (z.B. Welle), für flächenförmige (z.B. Platte) und für volumenförmige Bauteile (z.B. Verdichtterzylinder) aus Eisen- oder auch aus Aluminiumwerkstoffen unter Beachtung der relevanten Einflüsse /**Hän95**/. Ferner wird zwischen geschweißten und nichtgeschweißten Bauteilen unterschieden. Während die Festigkeitsnachweise (statischer Nachweis und Ermüdungsnachweis) bei volumenförmigen Bauteilen grundsätzlich auf der Basis örtlicher Spannungen durchzuführen sind, werden sie bei stab- und flächenförmigen Bauteilen sowohl auf der Basis von Nennspannungen (Formzahl bekannt) als auch auf der Basis von örtlichen Spannungen im elastischen Bereich durchgeführt.

Bestimmung der Kerbwirkungszahlen

Die Kerbwirkungszahl wird in der *FKM-Richtlinie* bei stabförmigen Bauteilen mit dem Ansatz von *Siebel* und *Stieler* mit Gl. (2.54) je nach Spannungsart bestimmt. Bei Zug/Druck oder Schub entfällt der Anteil $n_{\sigma,\tau}(d)$.

$$\beta_{\sigma,\tau} = \frac{\alpha_{\sigma,\tau}}{n_{\sigma,\tau}(r) \cdot n_{\sigma,\tau}(d)} \quad (2.54)$$

Bestimmung der bezogenen Spannungsgefälle

Zur Durchführung des auf den Nennspannungen basierten Ermüdungsfestigkeitsnachweises für ein nichtgeschweißtes Bauteil wird in der *FKM-Richtlinie* das bezogene Spannungsgefälle benötigt. Es setzt sich zusammen aus dem Anteil $G_{\sigma,\tau}^*(d)$, der sich ohne Kerbe allein durch die Erfassung der Beanspruchungsart bzw. des Biegespannungsgefälles $2/d$ ergibt, und einem zusätzlichen, nur von der Kerbgeometrie abhängigen Anteil $G_{\sigma,\tau}^*(r)$. Während bei ungekerbten Proben unter Zug/Druck $G_{\sigma}^*(d) = 0$ ist, existiert unter Biegung und Torsion ein Spannungsgefälle $G_{\sigma,\tau}^*(d) = 2/d$. Der kerbbedingte Anteil $G_{\sigma,\tau}^*(r)$ wird je Belastungsart und Kerbgeometrie nach den in *Tabelle 2.1* vorhandenen Näherungsformeln erfasst.

Zur Berechnung des Festigkeitsnachweises für ein nichtgeschweißtes Bauteil mit örtlichen Spannungen ist das bezogene Spannungsgefälle normal zur Spannungsrichtung durch die punktweise Ermittlung der Spannungsamplituden festzulegen. Liegen keine Spannungstiefenverläufe vor, so ist es nach *Tabelle 2.1* zu bestimmen.

Bestimmung der Stützzahlen

Die Berechnung der Teilstützzahlen erfolgt beim Ermüdungsfestigkeitsnachweis auf der Basis von Nennspannungen oder örtlicher Spannungen auf der Grundlage des bezogenen Spannungsgradienten nach *Tabelle 2.2*. Die Gleichungen gelten für Stahl-, Eisen- und Aluminiumwerkstoffe.

Die Teilstützzahlen $n_{\sigma,\tau}(r)$ (abhängig vom Kerbradius) und $n_{\sigma,\tau}(d)$ (abhängig vom Bauteildurchmesser und vom Werkstoff) für Normal- und Schubspannungen werden in Abhängigkeit von bezogenen Spannungsgradienten $G_{\sigma,\tau}^*(r)$ und $G_{\sigma,\tau}^*(d)$ einzeln berechnet.

Tabelle 2.2: Berechnung der Stützzahlen für Normal- und Schubspannungen nach /FKM1/

$n_{\sigma,\tau} = 1 + G_{\sigma,\tau}^* \cdot 10^{-\left(a_G - 0,5 + \frac{R_m}{b_G}\right)}$	$n_{\sigma,\tau} = 1 + \sqrt{G_{\sigma,\tau}^*} \cdot 10^{-\left(a_G + \frac{R_m}{b_G}\right)}$	$n_{\sigma,\tau} = 1 + \sqrt[4]{G_{\sigma,\tau}^*} \cdot 10^{-\left(a_G + \frac{R_m}{b_G}\right)}$
$0 \leq G_{\sigma,\tau}^* \leq 0,1 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$	$0,1 < G_{\sigma,\tau}^* \leq 1 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$	$1 < G_{\sigma,\tau}^* \text{ [mm}^{-1}\text{]}$

Bei der Bestimmung der Teilstützzahlen für Schubspannungen $n_{\tau}(r)$ und $n_{\tau}(d)$ wird die Zugfestigkeit R_m durch $R_m \cdot f_{W,\tau}$ ersetzt, wobei $f_{W,\tau}$ der Schubwechselfestigkeitsfaktor ist /FKM1/. Die Größen a_G und b_G sind von der Werkstoffart abhängig (**Tabelle 2.3**).

Tabelle 2.3: Konstanten a_G und b_G für Stahl-, Eisen- und Aluminiumwerkstoffe nach /FKM1/

Werkstoff	Nichtrost. Stahl	Anderer Stahl	GS	GGG	GT	GG	Aluknet.	Aluguss.
a_G	0,4	0,5	0,25	0,05	-0,05		0,05	-0,05
b_G	2400	2700	2000	3200	3200		850	3200

Anschließend ergibt sich die Gesamtstützzahl $n_{\sigma,\tau}$ durch die Multiplikation der Teilstützzahlen $n_{\sigma,\tau}(r)$ und $n_{\sigma,\tau}(d)$ nach Gl. (2.55). Die Stützzahl ungekerbter Bauteile $n_{\sigma,\tau}(d)$ ist mit $G_{\sigma,\tau}^*(d) = 2/d$ zu berechnen.

$$n_{\sigma,\tau} = n_{\sigma,\tau}(r) \cdot n_{\sigma,\tau}(d) \quad (2.55)$$

Die Stützzahlen nach /FKM1/ sind bei randschichtgehärteten Bauteilen niedriger als bei Bauteilen ohne harte Randschicht. Bei einem Anrißort am Rand ist die Stützzahl niedriger wegen der höheren Rand-Zugfestigkeit R_m des Bauteils. Liegt der Anrißort unterhalb der Randschicht, ist die Stützzahl niedriger wegen des geringeren bezogenen Spannungsgefälles, im Vergleich zum bezogenen Spannungsgefälle am Rand.

Die in der *FKM-Richtlinie* (siehe auch *DIN 743 /N3/*) angegebenen bezogenen Spannungsgradienten beschränken sich auf Werte $G^* \leq 10 \text{ mm}^{-1}$. Dies entspricht in etwa einem Kerbradius von 0,2 mm bei abgesetzten Stäben. *Niessner /Nie03/* befasste sich in seiner Arbeit unter anderen mit der Erweiterung des Gültigkeitsbandes der Stützzahlen (**Tabelle 2.4**) auf Basis von theoretischen und experimentellen Untersuchungen für verschiedene Probenformen und Werkstoffe mit sehr scharfen Kerbradien (z.B. $r = 0,04 \text{ mm}$).

Tabelle 2.4: Modifikation der Stützzahlen für Normalspannungen nach *Niessner /Nie03/*

$n_{\sigma} = 1 + (G_{\sigma}^*)^{\frac{1}{1+0,0025 \cdot R_m}} \cdot 10^{-\left(a_G + \frac{R_m}{b_G}\right)}$	$n_{\sigma} = 1 + \sqrt{G_{\sigma}^*} \cdot 10^{-\left(a_G + 0,25 + \frac{R_m}{b_G}\right)}$
für $1 < G^*$ bei niedrigfesten Stahl- und Eisenwerkstoffen	für $10 < G^*$ bei Aluminiumwerkstoffen

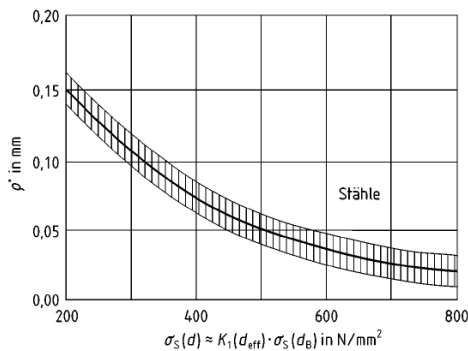
Verfahren des Strukturradius von NEUBER

Die rechnerische Berücksichtigung der Mikrostützwirkung nach dem *Neuberschen* Ansatz /**Neu68**/ erfolgt durch die Einführung einer werkstoffspezifischen Ersatzstrukturlänge ρ^* , mit der der ursprüngliche Kerbradius r durch einen fiktiven Ersatzkerbradius r_F nach Gl. (2.56) ersetzt wird. Hiernach vergrößert sich der Kerbradius r um eine kleine Zusatzlänge $s \cdot \rho^*$ von einigen hundertstel Millimetern und somit reduziert sich die Formzahl.

$$r_F = r + s \cdot \rho^* \quad (2.56)$$

Die *Neubersche* Strukturlänge hängt von der Zusammensetzung und den Eigenschaften des Werkstoffes (Korngröße) und der Art des zeitlichen Belastungsverlaufes ab, sie ist aber unabhängig von Probenform und Probengröße (z.B. in /**Rad03**/). Die entsprechenden Werte können als Funktion der Fließgrenze nach Gl. (2.57) berechnet oder aus **Bild 2.28** für Stähle abgelesen werden (z.B. in /**N3**/).

$$\rho^* = 10^{-(0,514 + 0,00152 \cdot \sigma_s(d))} \quad (2.57)$$



Werkstoff	ρ^* [mm]
Austenitischer Stahl	0,3
Stahl mit $R_m \leq 500$ MPa	0,1
Stahl mit $R_m > 500$ MPa	0,05
Stahlguss und GGG	0,4

a) nach DIN 743 /**N3**/

b) nach FKM-Richtlinie /**FKM1**/

Bild 2.28: Neuberscher Strukturradius ρ^* , z.B. (a) in DIN 743 /**N3**/ oder (b) in FKM-Richtlinie /**FKM1**/

Der Faktor s ist ein dimensionsloser Faktor der Stützwirkung, der in Abhängigkeit von der Beanspruchungsart, vom in der Kerbe herrschenden Spannungszustand bzw. vom Grad der Mehrachsigkeit sowie von der verwendeten Festigkeitshypothese angegeben wird /**Neu68**/.

Unter der Annahme eines zweidimensionalen Spannungszustandes ist $s = 2$ bei Verwendung der NSH und $s = 2,9$ nach der GEH für Rundstab mit Umlaufkerbe bei Zug/Druck oder Biegung, für Torsion und Querkraftschub gilt $s = 1$. Weitere Faktoren können *Neuber* /**Neu68**/ oder *Radaj* /**Rad03**/ entnommen werden. Unter Einhaltung des fiktiven Kerbradius r_F wird die Kerbwirkungszahl für „milde“ Kerben mit Gl. (2.58) berechnet. Die Stützziffer ergibt sich in Anlehnung an /**Sti54**/ aus Gl. (2.59).

$$\beta_{\sigma,\tau} = \alpha_{\sigma,\tau} \cdot \left(\frac{r}{r_F} \right)^{0,5} \quad (2.58) \quad n = \frac{\alpha_{\sigma,\tau}}{\beta_{\sigma,\tau}} = \left(\frac{r_F}{r} \right)^{0,5} \quad (2.59)$$

Für sehr scharfe Kerben ($r \rightarrow 0$) empfiehlt *Neuber* die Berechnung der Kerbwirkungszahl als Formzahl mit r_F anstelle mit r nach Gl. (2.60). In diesem Falle nimmt der Radius r_F den Betrag von $r_F \approx s \cdot \rho^*$ an.

$$\beta_{\sigma,\tau} = \alpha_{\sigma,\tau}(r_F) \quad (2.60)$$

Verfahren der Kerbempfindlichkeit nach THUM

Auf *Thum* /**Thu60**/ geht die empirische Formel für eine Empfindlichkeit des Werkstoffes gegenüber der Kerbwirkung zurück. Durch *Thum* wurde das Verhältnis Kerbwirkungszahlüberhöhung zu Formzahlüberhöhung unter dem Begriff werkstoffabhängiger Empfindlichkeitsfaktor η eingeführt, Gl. (2.61). Die Kerbwirkungszahl errechnet sich dann durch einfache Umformung von Gl. (2.61). Durch eine Zusammenfassung der Gl. (2.51) und der Gl. (2.61) ergibt sich die Stützzahl gemäß Gl. (2.62).

$$\eta = \frac{\beta_{\sigma,\tau} - 1}{\alpha_{\sigma,\tau} - 1} \quad (2.61) \quad n = \frac{\alpha_{\sigma,\tau}}{1 + \eta \cdot (\alpha_{\sigma,\tau} - 1)} \quad (2.62)$$

Die Kerbempfindlichkeit η von Stählen ist experimentell oder rechnerisch in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit und vom Kerbradius nach *Peterson* (z.B. in /**Rad03**/) zu ermitteln. Der Faktor η ist damit nicht nur vom Werkstoff, sondern auch von der Kerbform und der Beanspruchungsart abhängig. Der Werkstoff weist eine vollkommene Kerbempfindlichkeit auf, wenn $\eta = 1$ ist. Bei $\eta = 0$ ist der Werkstoff an der Kerbstelle kerbunempfindlich /**Hän60**/.

Ansatz der Ersatzkerbe von PETERSON

Zur Berechnung der Kerbwirkungszahl wurde von *Peterson* (z.B. in /**Iss03**/ und /**Rad03**/) eine auf den Ansatz von *Thum* basierende Näherungsformel (2.63) entwickelt, in der die Kerbempfindlichkeit η mit der inneren Kerbwirkung (z.B. Inhomogenität) in Verbindung gebracht wird. Der Faktor η ergibt sich für Stahlwerkstoffe nach Gl. (2.64) bei Zug/Druck- und Biegebeanspruchung (z.B. in /**TGL1**/). Bei Torsionsbelastung ist näherungsweise der Faktor 0,6 vor a^* in Gl. (2.64) einzuführen, /**Rad03**/.

$$\beta_{\sigma,\tau} = 1 + \frac{\alpha_{\sigma,\tau} - 1}{1 + a^*/r} \quad (2.63) \quad \eta = \frac{1}{1 + a^*/r} = \frac{1}{1 + \frac{8}{r} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_B}\right)^3} \quad (2.64)$$

Neben dem Kerbradius r in Gl. (2.64) ist eine Konstante a^* enthalten. Die Größe a^* wird als kritischer Spannungsabstand bezeichnet /**Rad03**/, der den angenommenen, linearen Kerbspannungsabfall in die Tiefe unter der Kerboberfläche in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit des Werkstoffes beschreibt. Die Größe a^* kann der **Tabelle 2.5** für Stähle unterschiedlicher Zugfestigkeiten bei Biegung entnommen werden.

Tabelle 2.5: Größe a^* gekerbter Bauteile aus Stahl bei Biegung nach *Peterson*, entnommen bei /**Rad03**/

Zugfestigkeit [N/mm ²]	345	518	690	863	1035	1380	1725
a^* [mm]	0,38	0,25	0,18	0,13	0,089	0,051	0,033

Ansatz der Ersatzkerbe von PETERSEN

Die Beschreibung der Stützwirkung zur Reduzierung der Formzahl nach *Petersen* (z.B. in /**Die85**/, /**Rad03**/) erfolgt mit der Näherungsgleichung (2.65) durch die Einführung eines werkstoffabhängigen Ersatzkerbradius ρ^* . Dieser Radius wird für Stähle in Abhängigkeit von der Härte bzw. der Zugfestigkeit nach Gl. (2.66) angegeben, wobei für H die Härte nach Vi-

ckers- oder Brinellhärte eingesetzt wird. $H_0 = 40$ HV ist für Stähle ein Bezugswert, wenn für H ein Vickershärtewert verwendet wird.

$$n_{\sigma,\tau} = 1 + \sqrt{\rho^* \cdot G_{\sigma,\tau}^*} \quad (2.65) \quad \rho^* = \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 \quad (2.66)$$

Die Kerbwirkungszahl ergibt sich aus Gl. (2.67). Hierbei ist $G_{\sigma,\tau,u}^*$ das bezogene Spannungsgelände für den ungekerbten Stab und $G_{\sigma,\tau,K}^*$ für den gekerbten Stab.

$$\beta_{\sigma,\tau} = \frac{1 + \sqrt{\rho^* \cdot G_{\sigma,\tau,u}^*}}{1 + \sqrt{\rho^* \cdot G_{\sigma,\tau,K}^*}} \cdot \alpha_{\sigma,\tau} \quad (2.67)$$

Verfahren nach DIETMANN

Auf der Basis der Berechnungsverfahren und der Versuchsergebnisse von *Siebel* sowie von *Petersen* schlug *Dietmann* /Die85/ eine einfache, für die praktische Anwendung geeignete Berechnungsformel (2.68) für die Stützziffer des Werkstoffes vor. Die Kerbwirkungszahl berechnet sich mit Gl. (2.69).

$$n = 1 + \left(\frac{c_1}{k} \right)^m \cdot \sqrt{\frac{c_2}{r}} \quad (2.68) \quad \beta_{\sigma,\tau} = \frac{\alpha_{\sigma,\tau}}{1 + \left(\frac{c_1}{k} \right)^m \cdot \sqrt{\frac{c_2}{r}}} \quad (2.69)$$

In Abhängigkeit von der Belastungsart ist die Konstante $c_2 = 2$ für Zug/Druck oder Biegung und $c_2 = 1$ für Torsion. Die Größe k in N/mm² steht für die statischen Werkstoffkennwerte $k = \sigma_B$ bei spröden Werkstoffen bzw. $k = \sigma_s$ bei duktilen. Der Exponent m ist eine zusätzliche werkstoffabhängige Konstante; r ist der Kerbradius. Die Größen c_1 , k und m sind **Tabelle 2.6** zu entnehmen.

Tabelle 2.6: Berechnungsgrößen für die Stützziffern nach Dietmann /Die85/

Werkstoffart	k	c ₁	m
Ferritische Stähle (Vergütungs-, Kohlenstoff- und Federstähle)	σ_s	55	1
Austenitische Stähle	σ_s	28	0,45
Grauguß; Stahlguß	σ_B	12	0,2

Verfahren des Anrissstreckens nach KOGAEV und SERENSEN

Nach /TGL1/ wird der Ansatz von *Kogaev* und *Serensen* (z.B. in /Rad03/, /Hän81/) als zweite Möglichkeit zur Bestimmung der Kerbwirkungszahl angegeben. In der Näherungsformel nach diesem Verfahren wird der statistische Größeneinfluss durch eine Kombination von Kerb- und Größenempfindlichkeit berücksichtigt.

Damit lässt sich der Gestalteinflussfaktor $K'_{\sigma,\tau}$ über einen Ähnlichkeitsfaktor F_0 (nach /TGL1/ genannt) bzw. Kerbempfindlichkeitsfaktor $\eta_{\sigma,\tau} = \beta_{\sigma,\tau}/\alpha_{\sigma,\tau}$ (nach /Rad03/ genannt) direkt aus

der Formzahl $\alpha_{\sigma,\tau}$ nach Gl. (2.70) berechnen. Der Faktor F_θ kann basierend auf einer statistischen Festigkeitstheorie nach *Weibull* mit Gl. (2.71) ermittelt oder als Funktion des Verhältnisses $L/(88,3G^*)$ abhängig von σ_B und ν nach *Kogaev* (z.B. in /Rad03/) abgelesen werden.

$$K'_{\sigma,\tau} = F_\theta \cdot \alpha_{\sigma,\tau} \quad (2.70) \quad F_\theta = \frac{2}{1 + \left(\frac{L/G^*}{88,3 \text{ mm}^2} \right)^{-\nu}} \quad (2.71)$$

Die wirksame Länge $L = \pi \cdot d$ nach /TGL1/ (bzw. die Anrissstreckenlänge L nach /Rad03/ genannt), bezeichnet die Linie möglicher Anrissorte im Kerbgrund. Nach Gl. (2.71) ist die Kerbempfindlichkeit F_θ vom bezogenen Spannungsgefälle G^* und über den Exponenten ν von der Werkstoff-Zugfestigkeit σ_B abhängig. Die Werkstoffkonstante ν wird mit Gl. (2.72) für Zug/Druck und Biegung und mit Gl. (2.73) für Torsion angegeben. Anschließend ergibt sich die Kerbwirkungszahl durch die Umrechnung von Gl. (2.48), /TGL1/.

$$\nu_\sigma = 0,2 - 0,0001 \frac{\text{mm}^2}{N} \cdot \sigma_B \quad (2.72) \quad \nu_\tau = 1,5 \cdot \nu_\sigma \quad (2.73)$$

Aus der Literatur sind weitere Wege zur Bestimmung der Kerbwirkungszahl bekannt, auf die hier nicht ausführlich eingegangen werden soll. Einen umfassenden Überblick über diese Berechnungsverfahren mögen die Literaturquellen (z.B. /Wel76/, /Hei84/, /Jae88/, /Hai89/, /Klo89/, /Rad03/ und /Nie03/) geben.

2.4.6.3 Resümee: Bewertung und Kritikpunkte der Ansätze

Die meisten beschriebenen Berechnungsansätze entstanden durch Untersuchungen an einfachen gekerbten Proben (Flachproben mit halbkreisförmigen Außenkerben und Rundproben mit Umlaufkerben) /Mag81/, und sind mit relativ geringem Aufwand zu handhaben und zu bestimmen. Allen Verfahren ist gemeinsam, dass die Kerbwirkungszahl mehr oder weniger unterhalb der Formzahl liegt und dass sie aus der Formzahl und einer Stützwirkung bzw. einer Kerbempfindlichkeit bei schwingender Beanspruchung berechnet wird. Die meisten Ansätze basieren auf dem Nennspannungskonzept (z.B. /Sti54/, /Thu60/, /Neu68/ und /Die85/).

Die jeweiligen Stärken und Schwächen der meisten Ansätze wurden durch Vergleiche mit den vorliegenden experimentellen Ergebnissen bei *Wellinger* und *Dietmann* /Wel76/, *Buch* /Buc76/ und *Magin* /Mag81/ gegeben. Es wurden größere Abweichungen zwischen den Kerbwirkungszahlen festgestellt, die im technisch besonders wichtigen Bereich mittlerer Formzahlen $\alpha_{\sigma,\tau} \leq 3$ aufgetreten sind.

Buch /Buc76/ verglich Kerbwirkungszahlen nach den Verfahren von *Neuber* /Neu68/, *Stieler* /Sti54/ und *Bollenrath* (z.B. in /Rad03/) mit experimentellen Werten aus der *TGL 19340* /TGL1/ „Ausg. 1974“. Danach liegen die Kerbwirkungszahlen nach *Stieler* immer höher als die experimentellen Ergebnisse aus der /TGL1/ und liegen damit im Vergleich zu diesen Versuchswerten jeweils auf der sicheren Seite. *Magin* /Mag81/ überprüfte verschiedene Berechnungsformeln aus der Literatur mit Ergebnissen aus Dauerfestigkeitsversuchen an umlaufenden V-60°-Spitzkerben bei Umlaufbiegung und Zug/Druck und zeigte, dass die berechneten

Kerbwirkungszahlen auf der sicheren Seite liegen. Die Abweichungen der Kerbwirkungszahlen betragen zwischen -24 % bis +29 %.

In der Arbeit von *Niessner* /**Nie03**/ wurde unter anderem eine Recherche zu den in der Fachliteratur vorhandenen Verfahren zur Berechnung der Stützzahlen durchgeführt. Die Vor- und Nachteile der betrachteten Verfahren wurden ausführlich diskutiert und analysiert. Durch die Zusammenstellung der Berechnungskonzepte kann festgestellt werden, dass fast kein Ansatz (außer dem *Neuber*-Ansatz) den Grenzfall sehr scharfer Kerben beschreiben kann.

Die Übertragbarkeit von Festigkeitswerten an ungekerbten kleinen Proben auf größere ungekerbte Proben ist bei den vorgestellten Berechnungsmodellen unvollkommen erfasst. Sie berücksichtigen meist nur den Spannungsgradienten, nicht aber den statistischen Einfluss. Sie können den festigkeitsvermindernden Größeneinfluss nicht eindeutig abbilden.

Obgleich die Festigkeit mit zunehmendem Bauteildurchmesser unter identischer Kerbgeometrie abnimmt, werden im Allgemeinen für die gekerbten Bauteile unterschiedlicher Größen mit identischer Kerbgeometrie und gleichen Bedingungen gleiche Stützziffern bestimmt. Die Stützzahlberechnung müsste für unterschiedliche Bauteilgrößen zu niedrigeren bzw. unterschiedlichen Stützziffern führen. In /**TGL1**/, /**N3**/ und /**FKM1**/ ist dies der Fall, da dieser Stützwirkungsanteil näherungsweise in $K_2(d)$ bzw. $G^*(d)$ erfasst wird.

Weitere Kritikpunkte liegen daran, dass diese Konzepte nicht in der Lage sind, die fertigungstechnischen Einflüsse (z.B. Eigenspannungen durch spanende Fertigungsverfahren) und die plastische Stützwirkung explizit zu erfassen. Zur Zeit erfolgt eine Anpassung durch weitere Einflussgrößen, die aus Versuchen abgeleitet wurden und in die Berechnung einfließen.

Vor diesem Hintergrund entwickelte *Niessner* /**Nie03**/ den Ansatz der Fehlstellen weiter, der von einer statistischen Verteilung von den Fehlstellen in einem Werkstoff ausgeht. Das Fehlstellenmodell ist in der Lage, den Einfluss der Probengröße quantitativ zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck wird ein Spannungsintegral gebildet, welches den Spannungsverlauf über der Oberfläche integriert.

Der *Thum*-Ansatz der Kerbempfindlichkeitszahl /**Thu60**/ unterscheidet sich von den anderen Verfahren durch seine Formzahlabhängigkeit. Dieser Ansatz setzt die Kenntnis einer Formzahl bzw. einer Nennspannungsdefinition voraus. Deshalb ist er nur für die Berechnung mit Nennspannungen geeignet /**Hän95**/ . Das Gleiche gilt auch für das physikalische *Kogaev*-Verfahren auf der Grundlage der Weibulltheorie (z.B. in: /**Hän81**/).

Neben der Anschaulichkeit und der Einfachheit auf Grund der Verwendung des modifizierten Strukturradius zeichnet sich der Ansatz nach *Neuber* /**Neu68**/ dadurch aus, dass auch unterschiedliche Mehrachsigsigkeitsgrade und Festigkeitshypothesen berücksichtigt werden. Im Gegensatz zu anderen Berechnungsverfahren eignet sich der *Neubersche* Ansatz sehr gut für rechnerische Bestimmung der Kerbwirkungszahlen von Kerben mit sehr scharfen Radien ($r < 0,2 \text{ mm}$), wie z.B. Spitzkerben und SR-Nuten /**Hei84**/ . Bei FEM-Berechnungen ist die Erstellung eines neuen FE-Modells mit dem *Neuberschen* fiktiven Ersatzkerbradius notwendig. Diese Modellerstellung führt allerdings zu einem größeren Aufwand.

Obwohl der Ansatz der Spannungsgradienten von *Siebel* und *Stieler* /**Sti54**/ den Nachteil hat, dass der Grenzfall sehr scharfer Kerben nicht beschrieben werden kann, hat er in der praktischen Anwendung die größte Verbreitung gefunden und liegt damit mehreren Normen, Richt-

linien (/TGL1/, /FKM1/ und /N3/) und Handbüchern (z.B. /Die92/, /Nie01/ und /Iss03/) zugrunde. Diese Vorgehensweise ist besonderes bei mittleren und weniger scharfen Kerben sowie bei biege- oder torsionsbelasteten ungekerbten Stäben aussagefähig /Rad03/.

Das *Siebel-Stieler*-Verfahren ist durch viele Versuchsergebnisse verschiedener Bestimmungsmöglichkeiten hinreichend bestätigt /Die92/, und gilt somit als ein der sichersten Berechnungskonzepte der Kerbwirkungszahl. Da die Formzahl nach diesem Ansatz nicht direkt in die Stützzahlberechnung einfließt, kann dieses Verfahren für die Ermüdungsfestigkeitsberechnung bei Bauteilen mit Nennspannungen und örtlichen Spannungen (z.B. Nettoquerschnitte undefinierbar), wie in der *FKM-Richtlinie*, gleichermaßen angewendet werden. Und somit kann die Stützzahlberechnung grundsätzlich auf der Basis von FEM verwendet werden.

Anmerkung

Für künftige rechnerische Bestimmung von Kerbwirkungszahlen in dieser Arbeit wird auf die Ansätze nach *Siebel/Stieler* und nach *Neuber* Bezug genommen (**Abschnitt 6.3**).

2.5 Form- und Kerbwirkungszahlen von Profilwellen und von SR-Nuten

Kerbwirkungszahlen nach DIN 743

DIN 743 /N3/ enthält Festigkeitswerte und die Berechnungsmethode für den Tragfähigkeitsnachweis für Wellen und Achsen zur Vermeidung von Ermüdungsbrüchen und bleibender Verformung. Der Geltungsbereich der *DIN 743* ist begrenzt auf übliche Wellenwerkstoffe und Kerbformen. Sie beinhaltet Grundgleichungen, Angaben zu Formzahlen und Kerbwirkungszahlen für diverse Wellengeometrien sowie für WNVen, denen sich in den letzten Jahren intensive Untersuchungen widmeten (z.B. /Hei84/, /Per84/, /Ecc00/ und /Mel03/). Dagegen liegen bisher keine neueren Angaben zur Kerbwirkung bei ZWVen vor.

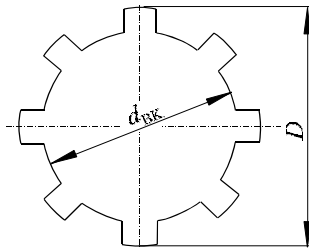
Nach dieser Norm können die Kerbwirkungszahlen für Keil-, Kerbzahn- und Zahnwellen bei Torsion und Biegung, bezogen auf den Fußkreisdurchmesser, näherungsweise unmittelbar nach **Tabelle 2.7** bestimmt oder nach **Bild 2.29** je nach Belastungsart abgelesen werden. Für Zug-Druck-Belastung gelten näherungsweise dieselben Werte wie für Biegung. Die Kerbwirkungszahlen gelten für die profilierten Wellen in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit σ_B des Werkstoffes ohne Nabeneinfluss sowie ohne Berücksichtigung der Auslaufgeometrie.

Durch den Vergleich der in **Tabelle 2.7** angegebenen Gleichungen wird ersichtlich, dass die Kerbwirkungszahl eines Zahnwellenprofils bei Torsionsbeanspruchung deutlich geringer ist als die für ein Keilwellen- bzw. Kerbzahnwellenprofil für die gleichen Materialeigenschaften. Zahnprofile schwächen die Wellen weniger als die Vielkeilprofile. Der Grund dafür liegt in der Richtung der zu übertragenden Kraft auf den Zahn-, Keil- oder Kerbzahnflanken. Da viele Zähne tragen, ist die Flächenpressung meistens gering.

Im Gegensatz zu *DIN 743* gelten diese Kerbwirkungszahlen nach *FKM-Richtlinie /FKM1/* auch für den Übergang des gekerbten in den ungekerbten Teil der Profilwelle. Außerdem gilt die Annahme, dass die Kerbwirkungszahl bei Biegung für die Zahnwellen und Kerbzahnwellen gleich ist. Sie errechnet sich nach der für die Kerbzahnwellen geltenden Gleichung.

Tabelle 2.7: Näherungsformeln zur Berechnung der Kerbwirkungszahlen für Keil-, Kerbzahn- und Zahnwellen bei Torsion oder Biegung nach /N3/

Kerbwirkungszahlen $\beta_{\sigma,\tau}$ nach DIN 743	
Torsion	Biegung bzw. Zug/Druck
Zahnwellen mit Evolventenflanken	
$\beta_{\tau}(d_{BK}) = 1 + 0,75 \cdot (e^{4,2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\sigma_B(d)}{N/mm^2} \right]^2} - 1)$	$\beta_{\sigma}(d_{BK}) = 1 + 0,49 \cdot (e^{4,2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\sigma_B(d)}{N/mm^2} \right]^2} - 1)$
Keilwellen	
$\beta_{\tau}(d_{BK}) = e^{4,2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\sigma_B(d)}{N/mm^2} \right]^2}$	$\beta_{\sigma}(d_{BK}) = 1 + 0,45 \cdot (e^{4,2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\sigma_B(d)}{N/mm^2} \right]^2} - 1)$
Kerbzahnwellen	
$\beta_{\tau}(d_{BK}) = e^{4,2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\sigma_B(d)}{N/mm^2} \right]^2}$	$\beta_{\sigma}(d_{BK}) = 1 + 0,65 \cdot (e^{4,2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\sigma_B(d)}{N/mm^2} \right]^2} - 1)$



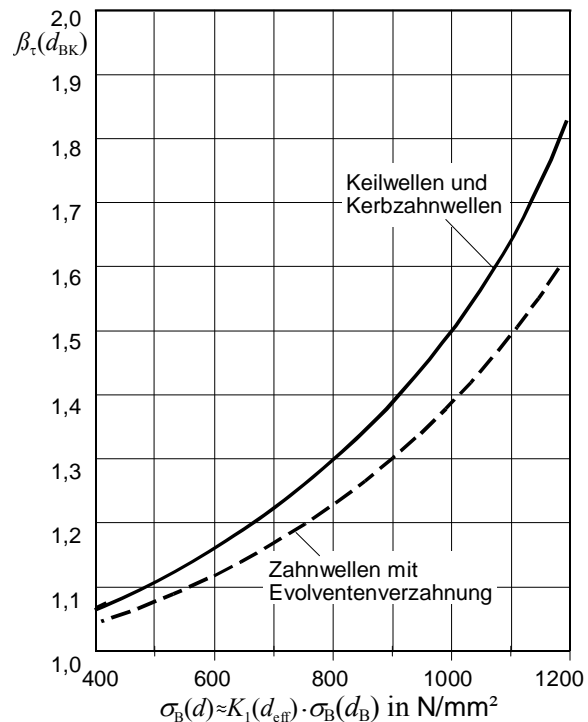
Proben-Bezugsdurchmesser: $d_{BK} = 29 \text{ mm}$

Nennspannungen für Vollwelle:

$$\text{Torsion: } \tau_t = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d_{BK}^3}$$

$$\text{Biegung: } \sigma_b = \frac{32 \cdot M_b}{\pi \cdot d_{BK}^3}$$

Torsions- oder Biegemoment wird über die Nahe übertragen.

**Bild 2.29:** Kerbwirkungszahlen für Profilwellen bei Torsion oder Biegung nach DIN 743 /N3/

Anmerkung

Einflussfaktor der Oberflächenrauheit (für polierte Wellenprofile): $K_{F\tau} = 1$ oder $K_{F\sigma} = 1$

Für einsatzgehärtete Einsatzstähle ohne Randschichtverfestigung ($K_v = 1$) sind Kerbwirkungszahlen für Keilwellen nach DIN 743 für Biegung und Torsion $\beta_{\tau}(d_{BK}) = \beta_{\sigma}(d_{BK}) = 1$ angegeben.

Nach TGL 19340 /TGL1/ gilt:

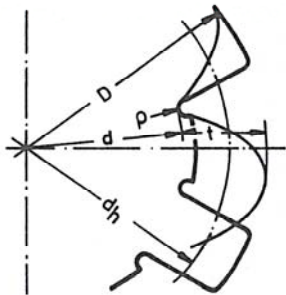
- Keilwellen bei Biegung: $\beta_{\sigma}(d_{BK}) = 0,75 \cdot \beta_{\tau}(d_{BK})$
- Kerbzahnwellen und Zahnwellen bei Biegung: $\beta_{\sigma}(d_{BK}) = 0,85 \cdot \beta_{\tau}(d_{BK})$

Für $d_{BK} = D$ gilt: $\beta_{\sigma,\tau}(D) = \beta_{\sigma,\tau}(d_{BK}) \cdot (D/d_{BK})^3$

Formzahlen nach NAKAZAWA und YOSHITAKE

Nakazawa /**Nak51**/ stellte schon 1951 eine Näherungsgleichung (2.74) für die Formzahlermittlung im Zahnfußbereich torsionsbeanspruchter Vielkeil- und Zahnwellen auf. Der rechnerische Querschnitt besitzt die in **Bild 2.30** gezeigte Begrenzung. Die Nennspannung berechnet sich aus einer glatten Welle mit gleichem Torsionsträgheitsmoment mit dem Durchmesser d_h . Die Ergebnisse dieser Gleichung sind aus heutiger Sicht als grobe Näherungswerte zu verstehen. Zur Bestimmung der Biegeformzahlen ist keine Formel nach *Nakazawa* bekannt.

$$\alpha_{\pi} = \frac{\tau_{t-\max}}{\tau_{t-nenn-d_h}} = \frac{d}{D} \cdot \left\{ 1 + 0,17 \cdot \frac{t}{\rho} \left(1 + \frac{3,94}{0,1 + \frac{t}{\rho}} \right) + \frac{6,38 \cdot \left(1 + 0,1 \cdot \frac{t}{\rho} \right)}{\left[2,48 + \frac{d}{2t} \cdot \left(\frac{t}{\rho} + 0,04 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2} \right\} \quad (2.74)$$



Der Gültigkeitsbereich: $0,5 \geq \frac{\rho}{t} \geq 0,1$ und $\frac{D}{d} \leq 2$

Rechnerische Nutanzahl: $N = 0,7 + 1,09 \cdot \frac{d}{2 \cdot t} \cdot \left(\frac{t}{\rho} + 0,04 \right)^{\frac{1}{3}}$

Bild 2.30: Rechnerisches Ersatzmodell nach Nakazawa /**Nak51**/

In der Arbeit von Dietz /**Die78**/ ist eine ausführliche Auswertung der Gleichung von *Nakazawa* /**Nak51**/ zu finden. Da die Frage nach dem Durchmesser zur Berechnung von Nennspannungen bei verschiedenen Verfassern unterschiedlich behandelt wird, wurden die Formzahlen in Abhängigkeit von Zähnezahlen für unterschiedliche Nenndurchmesser d_B , d_{a1} , d_{f1} und d_{h1} dargestellt.

Beim Vergleich verschiedener Näherungsformeln mit Versuchsergebnissen aus der Literatur wurde von Dietz eine eindeutige Überlegenheit der Gleichung von *Nakazawa* mit einer Genauigkeit von ± 10 % festgestellt. Spätere Arbeiten /**Wes96**/ liefern Formzahlen, die im Bereich von ca. 9 % zu den Formzahlen von *Nakazawa* abweichen, sofern die Kerbparameter innerhalb des festgelegten Geltungsbereiches liegen. Außerhalb dieses Geltungsbereiches liegt die Abweichung oberhalb von 20 %.

Yoshitake (z.B. in /**Pet88**/) untersuchte im Jahre 1962 mit Hilfe der räumlichen Spannungsoptik Keilwellen mit 8 Keilen mit und ohne Nabenbeeinflussung unter Torsion. Unter Variation des Keilfußrundungsradius entwickelte er eine Näherungsgleichung (2.75) zur Ermittlung der Torsionsformzahlen in der Keilfußausrundung ohne Nabeneinfluss für einen einzelnen Durchmesser. Eine Untersuchung einer verzahnten Welle mit Evolventenflanken ohne Nabeneinfluss mit einer Fußvollausrundung ergab hierbei eine Formzahl von $\alpha_{\tau} = 2,8$. Eine andere Untersuchung unter Berücksichtigung des Vorhandenseins einer Nabe mit dem Verhältnis Verbindungsbreite zu Außendurchmesser ca. $b/D \approx 1$ ergab, dass die maximalen Kerbspannungen bei Biegung und Torsion gleich sind und an derselben Stelle am Verzahnungsende auftreten.

$$\alpha_{\pi} = 6,083 - 14,775 \cdot \left(\frac{10 \cdot \rho}{D} \right) + 18,25 \cdot \left(\frac{10 \cdot \rho}{D} \right)^2 \quad (2.75)$$

Gültigkeitsbereich: *Verhältnis Keilfußradius zu Außendurchmesser: $0,01 \leq \rho/D \leq 0,04$*
Anzahl der Keile = 8 Keilhöhe = $0,079 \cdot d$ Keilbreite = $0,158 \cdot d$

Die Nennspannung bei Torsion ist auf den Außendurchmesser D der Keilwelle bezogen.

Formzahlen und Kerbwirkungszahlen aus weiteren Quellen

Weiterhin werden Anhaltswerte für die Kerbwirkungszahlen von Zahn-, Keil- und Kerbzahnwellen aus der Fachliteratur in den **Tabellen 2.8** und **2.9** zusammengefasst. Sie richten sich nach Niemann /Nie01/, TGL19340 /TGL1/ und Kollmann /Kol84/ (Tabelle 2.8). Der Tabelle 2.9 sind weitere Anhaltswerte zu entnehmen.

Tabelle 2.8: Anhaltswerte für Kerbwirkungszahlen bei Torsion für Profilwellen nach /TGL1/

Anhaltswerte für Kerbwirkungszahlen nach <i>Kollmann, Niemann</i> und <i>TGL 19340</i>			
Kerbform	Geometriebezeichnung	Wellenwerkstoff	$\beta_{\tau t}$
Keilwellen	(8) x 32 x <u>36</u> x 6	34Cr4 (37 MnSi5)*	2,0
	(8) x 32 x <u>38</u> x 6		2,3
	(10) x 32 x <u>40</u> x 5		2,8
	(A4) x 32 x <u>38</u> x 10		2,3
	(6) x 28 x <u>34</u> x 7	S235 (St 38)*	1,9
		E295 (St 50)*	2,0
		C35	2,1
		36CrNiMo4	3,1
Keilwellen für Landmaschinen	(6) x 29 x <u>35</u> x 8,8	E335 (St 60)*	1,9
		C45	2,1
		34Cr (37 MnSi5)*	2,6
		51CrV4	3,2
		20MoCr5 ¹⁾	1,8
		20MnCr5 ¹⁾	
		20MnCrS5 ¹⁾	
Kerbzahnwellen	(30) x <u>34</u>	E295 (St 50)*	1,5
		C35	
Zahnwellen	(31) x <u>35</u>	20MnCr5 ¹⁾	1,4
		20MnCrS5 ¹⁾	
<div><div>Torsions-Nennspannungen für Vollwelle: $\tau_{t-nenn} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3}$</div><div>Bezugsdurchmesser = Außendurchmesser: $d_B = D = (34 \dots 40) \text{ mm}$ (unterstrichene Werte)</div><div>Zähne- bzw. Keilzahlen (eingeklammerte Werte)</div><div>(-)* alte Werkstoffbezeichnung; ¹⁾ Einsatzgehärtete Einsatzstähle</div><div>Oberflächenrauheitsfaktor: $K_{F\tau} = 1$; Torsionsmoment wird über die Nabe eingeleitet.</div></div>			

Tabelle 2.9: Anhaltswerte für die Kerbwirkungszahlen und Formzahlen an Profilwellen bei Torsion oder Biegung für den Zahnfußbereich ohne Nabeneinfluss nach /Dec98/ und /Rol03/

Anhaltswerte für die Form- und Kerbwirkungszahlen					
	nach Decker /Dec98/		nach Roloff und Matek /Rol03/		
Kerbform	$\alpha_{\sigma b}$	$\alpha_{\tau t}$	σ_B [N/mm ²]	$\beta_{\sigma b}$	$\beta_{\tau t}$
Zahnwellen	2,9	2	400-1200	1,3-2,0	1,7-2,6
Keilwellen	4,2	3,6		1,4-2,3	1,9-3,1
Kerbzahnwellen	3,5	2,3		1,6-2,6	1,9-3,1

Formzahlen nach DIN 5466

Die in der Berechnungsvorschrift nach DIN 5466-2 /N5/ enthaltenen Näherungsgleichungen zur Ermittlung der Formzahlen im Zahnfußbereich von Zahnwellen nach DIN 5480 /N1/ sind hauptsächlich auf die Ergebnisse der systematischen Untersuchungen von Wesolowski /Wes96/ zurückzuführen. Jedoch gelten diese Ergebnisse ausschließlich für verzahnte Wellen ohne Berücksichtigung des Vorhandenseins von Verzahnungsausläufen. Eine Übertragung auf Zahnwellen mit Auslauf wird in dieser Arbeit überprüft.

Wesolowski führte zahlreiche theoretische Grunduntersuchungen mit der FEM an torsionsbelasteten Zahnwellen- und Zahnnabenscheiben durch. Ziel war ein allgemeiner Ansatz zur Berechnung der maximalen Vergleichsspannungen im Zahnfuß infolge der Belastung durch Flankennormalkräfte. Dafür ermittelte er die von der Kerbgeometrie abhängigen Torsionsformfaktoren im Fußbereich der verzahnten Nabe oder Welle (Voll- und Hohlwellen).

Aus Erfahrungen sind biegebeanspruchte Profilwellen weniger empfindlich gegen Kerbwirkung als die torsionsbelasteten. Zur näherungsweisen Bestimmung der Formzahlen bei Biegung und Zug sind keine abgesicherten Erkenntnisse oder Formeln bekannt. Jedoch sind in DIN 5466-2 Anhaltswerte vorgeschlagen. Die Formzahlen im Zahnfuß der Welle oder Nabe sind durch die in der **Tabelle 2.10** angegebenen Näherungsformeln zu bestimmen.

Tabelle 2.10: Angaben zur Berechnung der Formzahlen je Belastungsart für Zahnwelle und Nabe nach /N5/

Belastungsart	für die Welle	für die Nabe
Torsion	$\alpha_{kt1} = 1,39 \cdot (\rho_{f1} / m)^{(-0,22)} + 0,08 - 0,03 \cdot e^{(1-z/8)}$	$\alpha_{kt2} = 1,47 \cdot (\rho_{f2} / m)^{(-0,19)}$
Biegung	$\alpha_{kb1} \approx 1$	$\alpha_{kb2} \approx 1,2$
Axialkraft	$\alpha_{kax1} \approx 1$	$\alpha_{kax2} \approx 1$

Aus Gründen der geometrischen Ähnlichkeit ist nur eine Abhängigkeit der Torsionsformzahl von der Zähnezah und dem Fußausrundungsverhältnis zu verzeichnen. Diese Abhängigkeiten zeigt **Bild 2.31**. Der Einfluss der Profilverschiebung kann vernachlässigt werden.

Mit Vergleichsrechnungen an Modellen voller und hohler Zahnwellen wurde bestätigt, dass die Berechnung von Hohlzahnwellen bis zu einem größten zulässigen Innendurchmesser $d_{i1\max}$ gültig ist. Dies bedeutet, dass die Torsionsformzahl und der Ersatzdurchmesser unabhängig vom Innendurchmesser sind, solange $d_{i1} < d_{i1\max}$ gilt. **Bild 2.32** veranschaulicht die Abhängigkeit von $d_{i1\max}$ bezogen auf den Modul m .

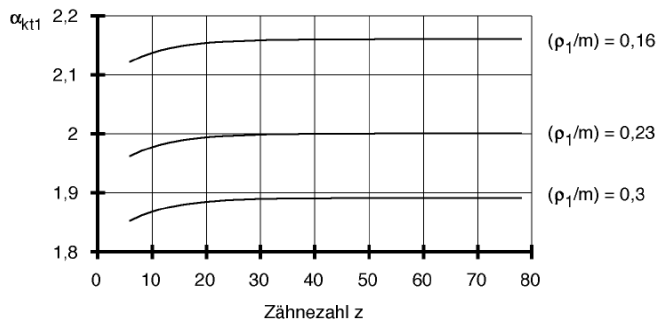


Bild 2.31: Torsionsformzahl als Funktion der Zähnezahl und des Fußausrundungsverhältnisses nach /N5/

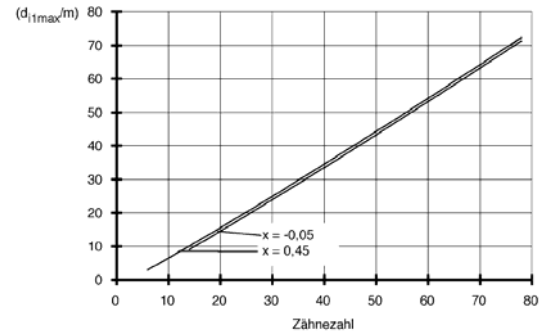


Bild 2.32: Abhängigkeit des Verhältnisses d_{i1max}/m von Zähnezahl nach /N5/

Der größte Innendurchmesser kann näherungsweise mit Gl. (2.76) für die Zahnwelle und mit Gl. (2.77) für die Nabe abgeschätzt werden.

$$d_{i1max} = m \cdot (0,7 \cdot z^{1,07} - 2,7 + 2 \cdot x) \quad (2.76) \quad d_{e2min} = m \cdot (0,7 \cdot z^{1,08} + 9 + 2 \cdot x) \quad (2.77)$$

Die für die Berechnung der Formzahlen benötigten Torsions-Trägheitsmomente errechnen sich nach Gl. (2.78) für die verzahnte Welle und nach Gl. (2.79) für die Zahnnahe.

$$W_{t,1} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(d_{h1}^4 - d_{i1}^4)}{d_{h1}} \quad (2.78) \quad W_{t,2} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(d_{e2}^4 - d_{h2}^4)}{d_{h2}} \quad (2.79)$$

Die Nennspannungen verzahnter Wellen sind mit dem Ersatzdurchmesser d_{h1} eines imaginären kreiszylindrischen Wellenquerschnitts mit gleicher Torsionssteifigkeit zu bestimmen, als ob eine unverzahnte Welle mit dem Durchmesser d_{h1} existierte. Der Ersatzdurchmesser verläuft zwischen dem Kopfkreis-, d_{a1} und dem Fußkreisdurchmesser d_{f1} , d.h. $d_{a1} > d_{h1} > d_{f1}$. Er lässt sich mit Gl. (2.80) für die verzahnte Welle und mit (2.81) für die Nabe berechnen.

$$d_{h1} = d_{f1} + c_{h1} \cdot \frac{d_{f1}}{d_{a1}} \cdot (d_{a1} - d_{f1}) \quad (2.80) \quad d_{h2} = |d_{f2}| - c_{h2} \cdot \frac{d_{a2}}{d_{f2}} \cdot |d_{a2} - d_{f2}| \quad (2.81)$$

Die Größen c_{h1} und c_{h2} stellen die Geometriefaktoren für die verzahnte Welle gemäß der Gleichung (2.82) und für die Nabe gemäß (2.83) dar. Sie hängen von der Zähnezahl und vom Fußausrundungsverhältnis ρ_f/m ab. Der Einfluss unterschiedlicher Fußradien auf die Änderung der Steifigkeit des imaginären Wellenquerschnitts kann vernachlässigt werden /Wes96/.

$$c_{h1} = 1,3 \cdot z^{(-1,2)} + 0,06 \cdot (\rho_{f1}/m) + 0,23 \quad (2.82)$$

$$c_{h2} = 0,15 \cdot z^{(-0,8)} + 0,06 \cdot (\rho_{f2}/m) + 0,23 \quad (2.83)$$

Zusammenfassung der Ergebnisse von HEINRICH

Heinrich /Hei84/ führte umfangreiche parametrische Untersuchungen mit der FEM über die Ermittlung von Formzahlen an verschiedenen gestalteten Sicherungsringnuten nach DIN 471 /N2/ bei Vollwellen durch. Sowohl bei Rechteknuten als auch bei Schrägnuten wurden die Belastungsarten Zug, Biegung und Torsion sowie Nutzug untersucht. Die Schrägnuten liefern auf Grund des großen Nutradius deutlich geringere Formzahlen als die Rechteknuten.

Bild 2.33 zeigt die Ausgleichgeraden der Formzahlen für Nuten in Vollwellen. In Tabelle 2.11 sind die die Ausgleichsgeraden beschreibenden Gleichungen aufgelistet.

$t = \text{Nuttiefe}; t = (D - d)/2$

$m = \text{Nutbreite}$

$n = \text{Bundbreite}$

$r = \text{Eckenradius}$

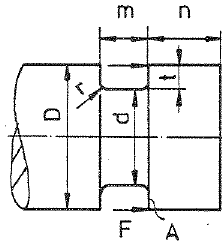
$D = \text{Wellendurchmesser}$

$d = \text{Nutdurchmesser}$

$A = \text{Fläche der Nutwand}$

$$A = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}$$

$F = \text{Axialkraft}$



Nenn-Flächenpressung:

$$P_{\text{nenn}} = \frac{F}{A}$$

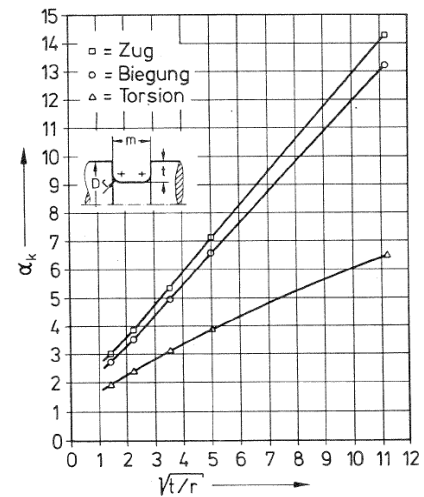


Bild 2.33: Charakteristische geometrische Verhältnisse und die Formzahlen für Zug, Biegung und Torsion für rechteckige SR-Nuten in Vollwellen nach DIN 471, bezogen auf den Nutgrunddurchmesser d , in Abhängigkeit von der Nuttiefe und dem Nutradius, gültig für $m/t \geq 1,4$; nach /Hei84/

Tabelle 2.11: Gleichungen zur Berechnung der Formzahlen an Wellen mit SR-Nuten nach /Hei84/

Biegung	Torsion	Zug/Druck
$\alpha_{\sigma,b_SRN} = 1,14 + 1,08 \cdot \sqrt{\frac{t}{r}}$	$\alpha_{\tau,t_SRN} = 1,48 + 0,45 \cdot \sqrt{\frac{t}{r}}$	$\alpha_{\sigma,zd_SRN} = 1,27 + 1,17 \cdot \sqrt{\frac{t}{r}}$

Die Ausführungen nach /Hei84/ zu den Formzahlen wurden als Grundlage für DIN 743 /N3/ sowie für die FKM-Richtlinie /FKM1/ verwendet. In beiden Vorschriften existieren keine Angaben zu den Formzahlen $\alpha_{\sigma,\tau}$, sondern Näherungsformeln zur Berechnung der Kerbwirkungszahlen $\beta_{\sigma,\tau}$ für Vollwellen mit genormten SR-Nuten nach DIN 471 /N2/, siehe **Tabelle 2.12**. Diese beruhen auf den Formzahlgleichungen von Heinrich unter Berücksichtigung des Strukturradius nach dem Neuberischen Verfahren zur Erfassung der Stützwirkung. Die Geometriebezeichnungen r , t , d und m sind aus **Bild 2.33** zu entnehmen. Die Nennspannungen sind auf den Nutdurchmesser d im Kerbgrund bezogen. Ergeben sich höhere Kerbwirkungszahlen bei Zug/Druck und Biegung $\beta_{\sigma,zd} > 4$ oder bei Torsion $\beta_{\tau} > 2,5$, sind mit den nach /N3/ bzw. /FKM1/ empfohlenen oberen Grenzwerten $\beta_{\sigma,b,zd} = 4$ bzw. $\beta_{\tau} = 2,5$ zu rechnen.

Tabelle 2.12: Näherungsformeln für die Kerbwirkungszahlen an Wellen mit SR-Nuten nach /N3/ bzw. /FKM1/

Kerbwirkungszahlen $\beta_{\sigma,\tau}$ nach DIN 743 /N3/		
Biegung	Torsion	Zug/Druck
$\beta_{\sigma,b} = a \cdot 0,9 \cdot \left(1,14 + 1,08 \cdot \sqrt{\frac{t}{r_F}} \right)$	$\beta_{\tau} = a \cdot \left(1,48 + 0,45 \cdot \sqrt{\frac{t}{r_F}} \right)$	$\beta_{\sigma,zd} = a \cdot 0,9 \cdot \left(1,27 + 1,17 \cdot \sqrt{\frac{t}{r_F}} \right)$
$\frac{m}{t} \geq 1,4: a = 1$	$\frac{m}{t} < 1,4: a = 1,08 \cdot \left(\frac{m}{t} \right)^{-0,2}$	

Anmerkung: siehe **Abschnitt 2.4.6.2**, Verfahren nach Neuber zur Bestimmung des modifizierten Strukturradius r_F . Danach ergibt sich bei Zug/Druck oder Biegung: $r_F = r + 2,9 \cdot \rho^*$ nach der GEH oder $r_F = r + 2 \cdot \rho^*$ bei Verwendung der NSH. Bei Torsion gilt: $r_F = r + \rho^*$. Die Neuberische Strukturlänge ρ^* wird nach Gl. (2.57) bestimmt.

Zusammenfassung der Ergebnisse von ECCARIUS und MELZER

Eccarius /Ecc00/ und *Melzer /Mel00/* führten umfangreiche Untersuchungen zu Gestaltoptimierungen und Berechnungen von Spannungskonzentrationen an Hohlwellen durch. Mit der FE-Methode untersuchten sie zahlreiche Modelle zur Ermittlung der Formzahlen sowie der bezogenen Spannungsgefälle bei Torsion, Biegung und Zug/Druck für Wellen mit verschiedenen konstruktiven Außen- und Innenkerbformen (Absatz und Umlaufkerben).

Eccarius /Ecc00/ zeigte, dass elliptische Übergangskonturen, bei Beachtung verschiedener Restriktionen, eine erhebliche Reduzierung der Formzahl vom im Einzelfall auf bis zu ca. 25 % in Bezug auf die Formzahl des kreisbogenförmigen Übergangs zur Folge haben. Er wies auch nach, dass ein aus zwei Kreisbögen mit unterschiedlichen Radien bestehender Übergang die Formzahl verkleinert.

Resultate der Arbeit nach *Melzer /Mel00/* bestätigen, dass die Größe einer Innenbohrung Einfluss auf die Formzahlen hat. Mit steigendem Innendurchmesser verringert sich die Formzahl entsprechend der jeweiligen Kerbform, Parameterkombination und Belastungsart. Die Änderung der Formzahl bei Biegung kann jedoch vernachlässigt werden. Für das bezogene Spannungsgefälle gilt, dass der Innendurchmesser einen vernachlässigbaren Einfluss hat. Weiterhin empfiehlt er für den Tragfähigkeitsnachweis, die Formzahlen der Außenkerben anzuwenden, da sie immer die größten Werte im Vergleich zu den Formzahlen der Innenkerben haben.

Aufbauend auf den Untersuchungen von *Heinrich* schlug *Melzer* eine neue Formel (2.84) für die Formzahlberechnung an (Hohl)-Wellen mit SR-Nut vor. Die Formzahlwerte liegen je nach Belastungsart etwas über den Werten des dazugehörigen Absatzes. Da das Untersuchungsspektrum eingeschränkt war, gelten die ermittelten Werte als Richtwerte.

$$\alpha_{\sigma, \tau - SRN} \approx 1,05 \cdot \alpha_{\sigma, \tau - Absatz} \quad (2.84)$$

Zur Bestimmung der Formzahlen für die Voll- und Hohlwellen mit Absatz oder mit Rundnut verwendete *Melzer* die Gleichung (2.85), die im Grundbau den in *DIN 743* vorhandenen Gleichungen ähnlich ist. Mit den Koeffizienten $f_1, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}$ und f_3 aus **Tabelle 2.13** wird die Formzahlberechnung realisiert. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die Formzahlwerte nach dieser Gleichung für Vergleiche verwendet, da sie sehr gut mit den mittels der FEM bestimmten Werten für die gleiche Kerbgeometrie übereinstimmen.

$$\alpha_{\sigma, \tau} = 1 + \frac{1}{\sqrt{f_1 \cdot \frac{r}{t} + \left(f_{21} \cdot \left(\frac{d_i}{d} \right)^2 + f_{22} \cdot \frac{d_i}{d} + f_{23} \right) \cdot \frac{r}{d - f_{24} \cdot d \cdot \left(\frac{d_i}{d} \right)^2} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{r}{d - f_{24} \cdot d \cdot \left(\frac{d_i}{d} \right)^2} \right)^2 + f_3 \cdot \frac{r}{t} \cdot \frac{d}{D}}} \quad (2.85)$$

Tabelle 2.13: Koeffizienten zur Formzahlberechnung bei Wellen mit Umdrehungskerten nach */Mel00/*

Kerbform	Wellen mit Absatz						Wellen mit Rundnut					
Formzahl	f_1	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_3	f_1	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_3
$\alpha_{\sigma b}$	0,65	0	0	7,8	0	0,1	0,14	0	0	4,4	0	0,06
α_{π}	1,55	0	0	33	0,8	1,3	0,2	0	0	16,5	0,8	0,8
$\alpha_{\sigma, d}$	0,6	9	-2,3	3,65	0	0,1	0,15	5,3	-1,3	2,25	0	0,06

2.6 Literaturübersicht zu Zahnwellenverbindungen

Vorbemerkung

Im folgenden Abschnitt werden einige der durchgeführten Untersuchungen und deren Ergebnisse insbesondere zum Stand der Forschung auf dem Gebiet der Zahnwellenverbindungen beschrieben. Die durchgeführte Literaturrecherche umfasst eine Reihe wichtiger Veröffentlichungen der letzten Jahre, die im Wesentlichen eine Bearbeitung der Aufgabenstellung unterstützen. Allerdings findet man bis zum Jahre 1998 eine umfassende Literaturzusammenstellung mit einer Vielzahl von Literaturangaben bei *Wesolowski /Wes96/* und später bei *Burgtorf /Bur98/* für die Untersuchungen zu Lastverteilung, Zahnfußspannungen und Gestaltfestigkeit von Zahnwellen-Verbindungen mit Schiebe- oder Presssitz.

Zusammenfassung der Ergebnisse von SCHÖPF

Als eine der wichtigsten Arbeiten zum Thema der Beanspruchung an Zahnwellenverbindungen ist die Arbeit von *Schöpf /Sch76/* zu nennen. Er berichtet als Erster von spannungsoptisch gewonnenen Formzahlen bei eingearbeiteten und aufgesetzten Verzahnungen unter Torsion.

Die spannungsoptischen Untersuchungen wurden mit Hilfe des Erstarrungsverfahrens (im Einfrierverfahren) speziell des Verfahrens der Isochromatenvervielfachung durchgeführt. Ein Vorteil dieses Verfahrens ist, dass ganze Verbindungen untersucht und zusätzlich Teilungsfehler berücksichtigt werden können. Dazu wird aus Epoxidharz ein Modell des zu untersuchenden Bauteils gegossen. Bei ca. 135 °C wird dem Modell eine äußere Belastung aufgeprägt und unter ihrer Wirkung anschließend langsam abgekühlt. Nach dem Abkühlvorgang bleiben Verformungen auch nach der Entlastung erhalten.

Schöpf erforschte zwei Zahnwellengeometrien (DIN 5480 40x2x18 und DIN 5480 60x3x18). Er definierte als Formzahl an einer eingearbeiteten Zahnwelle den charakteristischen Verlauf der Spannungsüberhöhung über der Verbindungslänge (**Bild 2.34**), die immer am Übergang der Welle in die W-N-V einen maximalen Wert erreichte und dann zum Ende der Verbindung hin stetig abfiel. Längs des Übergangsradius von der Verzahnung in den Wellenschaft konnte keine Kerbspannung und somit keine Formzahl im Auslaufbereich gemessen werden, da der Auslaufradius groß gewählt wurde. **Bild 2.35** veranschaulicht die charakteristische Randspannungsverteilung über der Zahnkontur der Welle und Nabe.

Bei den Versuchen zu den aufgesetzten Zahnwellenverbindungen wurde ein relativ großer Auslaufradius mit dem Verhältnis $r_w/d_{a1} = 0,21$ gewählt. Die Bestimmung der Formzahlen erfolgte ebenfalls unter der Vernachlässigung der Auswirkungen der Spannungsüberhöhung am Verzahnungsauslauf. Die kleinsten ermittelten Formzahlen für die Welle liegen bei $\alpha_{rt} = 3,85$. Das Widerstandsmoment bei Torsion wurde in erster Näherung für den Teilkreisdurchmesser berechnet. Die Ergebnisse für die Formzahl sind über dem Verhältnis z/d_{a1} aufgetragen.

Durch einen gezielten axialen kreisbogenförmigen Zahnzuschnitt (Zahnfußmodifikation) bei aufgesetzten Zahnwellen erreichte *Schöpf* eine Senkung der Maximalspannung um ca. 25 % gegenüber einer Normverzahnung und Verlagerung des Ortes der Maximalspannung in Richtung Wellenachse.

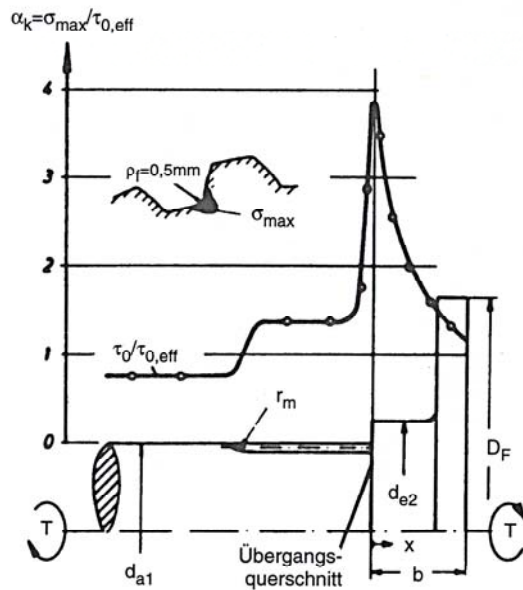


Bild 2.34: Charakteristischer Formzahlverlauf im Zahnfuß der eingearbeiteten Zahnwellenverbindung in Abhängigkeit von der axialen Koordinate x nach /Sch76/

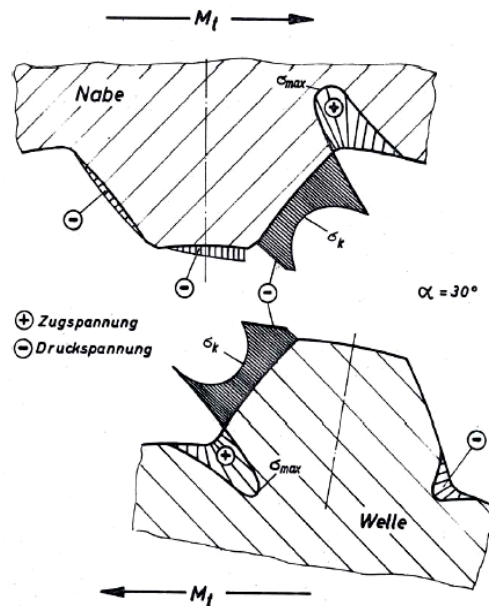


Bild 2.35: Spannungsverteilung über der Wellen- und Nabenzahnkontur sowie qualitativer Spannungsverlauf längs der gemeinsamen Berührfläche nach /Sch76/

Weiterhin untersuchte er den Einfluss der Verbindungsbreite b auf die Maximalspannung durch die Variationen $0,1 < b/d_{a1} < 2,25$ und stellte fest, dass mit zunehmender Kontaktlänge die Spannungsüberhöhung am Verbindungsanfang bis zu einem Grenzwert $b/d_{a1} \approx b/d_B \approx 0,5$ abnimmt. Er ließ dieses geometrische Ergebnis patentieren /Sch78/.

Für größere Verbindungsbreiten (Nabenlängen) als $b/d_B = 0,5$ lässt sich die maximale Zahnfußspannung bzw. Flächenpressung bei überwiegender Drehmomentbeanspruchung nicht weiter reduzieren (**Bild 2.36**).

Daher ist eine Vergrößerung der Nabenlänge über das Grenzverhältnis von $b/d_B = 0,5$ hinaus nicht sinnvoll, da keine Verbesserung der Festigkeit zu erreichen ist. Damit ist in Bezug auf die Verbindungsbreite eine gute Übereinstimmung zu den späteren Untersuchungen von /Vil84/ und /Wes96/ gegeben.

Weitere Untersuchungen zum Einfluss der Nabengeometrie auf die Maximalspannung durch die Variation des Verhältnisses Nabenaußendurchmesser d_{e2} bezogen auf den Wellenkopfkreisdurchmesser $1,2 < d_{e2}/d_{a1} < 3,5$ ergaben im untersuchten Bereich keine signifikanten Auswirkungen auf den Spannungsüberhöhungsfaktor am Verbindungsbeginn. Für ein konstantes Verhältnis b/d_{a1} treten die gleichen Maximalspannungen in der Welle bzw. Nabe auf, unabhängig davon, ob die Nabengeometrie aus einer langen elastischen Nabe mit Absatz (Schulter) oder einer sehr steifen Nabe ohne Absatz besteht. Eine Senkung der Maximalspan-

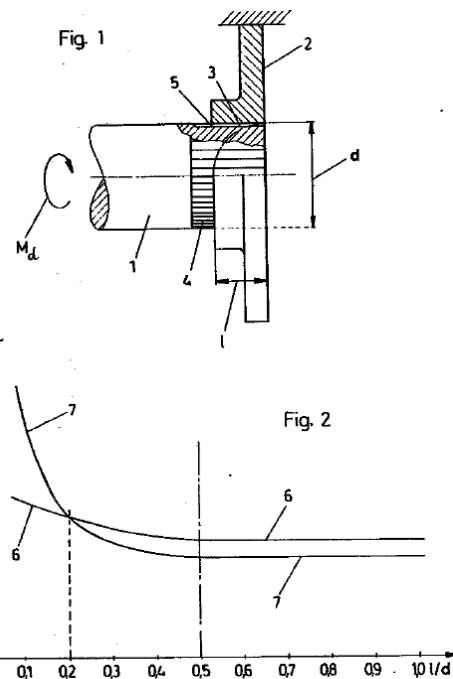


Bild 2.36: Zahnwellenverbindung mit optimalem Nabenverhältnis und der Verlauf der Belastung in der Nabe (7) und der Welle (6) nach /Sch78/

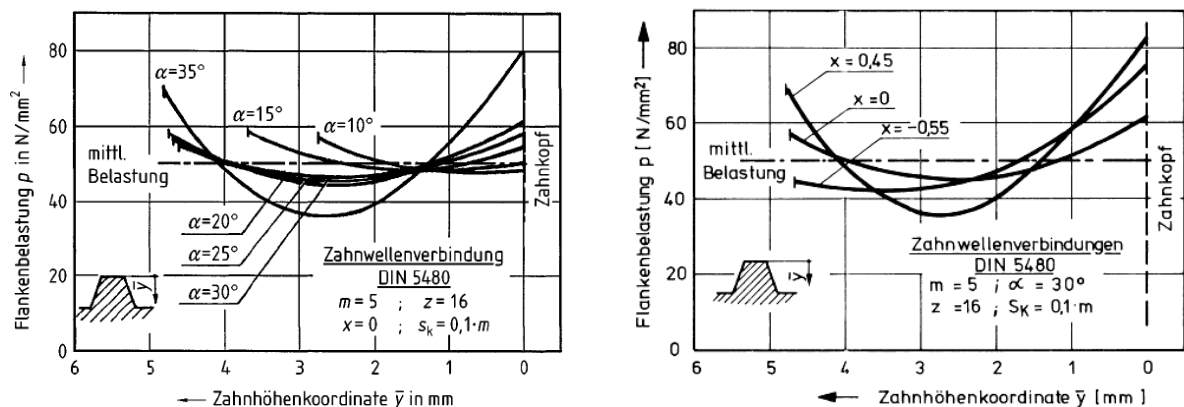
nungen durch Naben mit Schultern gegenüber versteiften Naben ist erst für das Verhältnis $d_{e2}/d_{a1} < 1,2$ zu erwarten.

Zusammenfassung der Ergebnisse von DIETZ

Dietz /**Die78**/ befasst sich mit der Entwicklung eines Berechnungsverfahrens für Lastaufteilung (auf Zähne oder Keile), Lastverteilung bzw. Flankenpressung (entlang der Keil- oder Zahnhöhe) und Zentrierverhalten von Zahn- und Keilwellenverbindungen. Er baut seinen Berechnungsansatz auf einer Auswertung der Literatur sowie zahlreichen eigenen theoretischen und experimentellen Untersuchungen auf. Bei der Auswertung geht *Dietz* von den in der Praxis an Profilwellen-Verbindungen auftretenden Schadensfällen aus. Ein Ergebnis der Bemühungen zur Beurteilung der geometrischen Gestalt eines Zahnpaars im Hinblick auf optimale Belastungsverteilung über der Zahnhöhe wird nachfolgend kurz zusammengefasst.

Grundsätzlich konnte für alle untersuchten Zahnformen ein allgemeiner parabolischer Verlauf der Flankenpressung über der Zahnhöhe ermittelt werden (**Bild 2.37**). Die trapezförmige Zahngeometrie bewirkt eine Lastüberhöhung über der Zahnhöhe an Kopf und Fuß.

Die Veränderung des Lastverlaufes über der Zahnhöhe im für die Fertigung vorteilhaften Eingriffswinkelbereich zwischen 20° und 30° ist so gering (**Bild 2.37-a**), dass eine Optimierung der Verzahnung bezüglich einer gleichmäßigen Lastverteilung durch Veränderung des Herstellungseingriffswinkels bei Festhalten der genormten Parameter (z.B. d_B , z und x_1) nicht sinnvoll erscheint. Die Zahnformänderung durch Profilverschiebung hat bewiesen, dass die Profilverschiebung die Lastverteilung beeinflusst (**Bild 2.37-b**). Mit zunehmendem Absolutwert der Profilverschiebung verringert sich die Neigung der Paarung (Zahn/Gegenzahn) zu Verschleiß oder Fressen.



a) Lastverteilung abhängig vom Eingriffswinkel

b) Lastverteilung abhängig von der Profilverschiebung

Bild 2.37: Parabolische Lastverteilung über der Zahnhöhe in Abhängigkeit vom Eingriffswinkel (a) und vom Profilverschiebungsfaktor (b) für Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480; nach **/Die78/**

Die Variation der Zähnezahl $z > 16$ oder der Fußausrundung auf die Lastverteilung zeigte keine bedeutende Abhängigkeit der Zähnezahl oder des Fußradius vom Lastverlauf über der Zahnhöhe für die Verbindungen nach DIN 5480. Selbst bei der Untersuchung vom vollausgerundeten Zahnfuß ergaben sich vernachlässigbar geringe Abweichungen. Ausgehend davon wurde eine von der Zähnezahl oder vom Fußradius unabhängige gleichartige Verteilung angenommen.

Zusammenfassung der Ergebnisse von VILLMER

Villmer /*Vil84*/ erforschte das Verhalten der Lastverteilung über der Verbindungslänge unter Berücksichtigung der Elastizität der Zahnpaare und der Wellen- und Nabenteile. In seiner Arbeit wurde nur der Zahn ohne Wellenkörper betrachtet und dann als ein auf Biegung und Torsion beanspruchter trapezförmiger Balken weiter untersucht. Die Übertragung der Momente und Kräfte erfolgte durch entsprechende Federsysteme. Mit Hilfe dieses Ersatzmodells wurden Parameteruntersuchungen durchgeführt und mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Dabei konnte eine gute Übereinstimmung erzielt werden. Die Ergebnisse im Rahmen dieser Untersuchungen bestätigen, dass der Verlauf der Flankenpressung und Zahnfußbeanspruchung über der Verbindungsbreite ungleichmäßig verteilt ist. Die maximale Flankenpressung ist bei Torsion am Verbindungsanfang zu verzeichnen.

Weiterhin stellte *Villmer* fest, dass ab einem Verhältnis Nabenaußen-/Bezugsdurchmesser $d_{e2}/d_B \geq 1,5$ die Nabeneinspannung und der Nabenaußendurchmesser einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Lastverteilung der Zahnflanken haben. Darüber hinaus wurde der Einfluss des Moduls der Verzahnung auf die Lastüberhöhung am Verbindungsanfang untersucht. Es konnte festgestellt werden, dass bei konstantem Bezugsdurchmesser und dem Tragen aller Zähne kleine Moduln zu steiferen Verzahnungen führen, während große Moduln nachgiebige Verzahnungen zur Folge haben.

Bild 2.38 zeigt als Ergebnis einer Vielzahl von Berechnungen über den gesamten Bereich genormter Verbindungen, dass sich die Lastüberhöhung am Verbindungsbeginn mit zunehmendem Modul bei konstanten Verhältnissen $b/d_B = 0,5$ und $d_{e2}/d_B = 3$ sowie bei kleiner Zähnezahzahl reduziert. Gleichzeitig sinkt jedoch auch die Verdrehsteifigkeit der Verzahnung. **Bild 2.39** veranschaulicht den Einfluss der Fußausrundungsradien auf die Zahnfußspannungen.

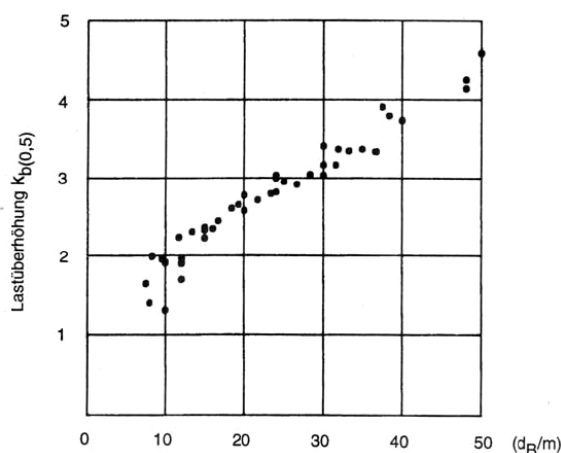


Bild 2.38: Max. Lastüberhöhung am Verbindungsbeginn als Funktion vom Verhältnis d_B/m bei $b = 0,5 \cdot d_B$; nach /*Vil84*/

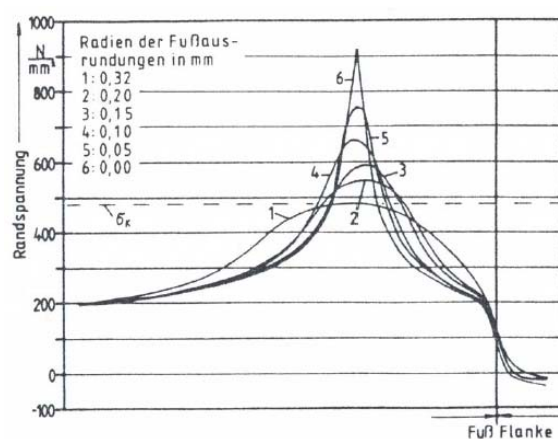


Bild 2.39: Verläufe der maximalen Zahnfußspannungen für verschiedene Fußausrundungsradien; nach /*Vil84*/

Die Zusammenfassung der Ergebnisse führte zur Ermittlung des Tragbreitenfaktors k_b zur Berücksichtigung der Lastüberhöhung am Anfang drehmomentbelasteter Verbindungen nach DIN 5480. Der Lastüberhöhungsfaktor ist abhängig vom Verhältnis d_B/m und wird bei einem optimalen Verhältnis $b/d_B = 0,5$ mit der Gleichung (2.86) ermittelt.

$$k_{b(0,5)} = 1,2 + \frac{1}{15} \cdot (d_B/m) \quad (2.86)$$

Die Lastüberhöhung für andere Verhältnisse b/d_B lässt sich mit Gl. (2.87) für $b/d_B > 0,5$ und mit Gl. (2.88) für $b/d_B < 0,5$ darstellen, sofern sie für das Verhältnis $b/d_B = 0,5$ bekannt ist.

$$k_b = 2 \cdot k_{b(0,5)} \cdot (b/d_B) \quad (2.87)$$

$$k_b = 1 + (2 \cdot k_{b(0,5)} - 4) \cdot (b/d_B) + 4 \cdot (b/d_B)^2 \quad (2.88)$$

Zusammenfassung der Ergebnisse von KOHL

Kohl /Koh86/ untersuchte mit Hilfe der FE-Methode und der ebenen und räumlichen Spannungsoptik die Spannungsverteilungen und die Beanspruchungen flankenzentrierter Verbindungen speziell im Zahnfußbereich. Hierbei umfasst die Untersuchung nur zwei Geometrien W60x6x8 und W170x5x32 nach DIN 5480.

Die Lastfunktion (Tragverhalten) der jeweils variierten Zahnflanke ergab sich aus einem konstanten eingeleiteten Drehmoment für Normal-, Kopf- und Fußträger. Er entwickelte einen auf den Vergleichsspannungshypothesen (GEH und SSH) basierenden Berechnungsansatz bei linearelastischem Materialverhalten.

Dieser ermittelt unter Verwendung von Teil-, $\alpha_{\sigma,\tau_{Z,D}}$ und Gesamtformzahlen $\alpha_{ges.,Z,D}$ die maximale auftretende Zahnfußvergleichsspannung $\sigma_{max,Z,D}$ jeweils für die belastete (Z) und lastfreie Seite (D) eines Zahnes, siehe die Gleichungen (2.89) bis (2.92). Wobei σ_{σ_nenn} und τ_{t_nenn} die aus Druck- und Biegebeanspruchung resultierenden Nennspannungsanteile zusammenfassen.

$$\sigma_{max,Z,D_GEH} = \sqrt{(\alpha_{\sigma} \cdot \sigma_{\sigma_nenn})_{Z,D}^2 + 3 \cdot (\alpha_{\tau} \cdot \tau_{t_nenn})_{Z,D}^2} \quad (2.89)$$

$$\sigma_{max,Z,D_GEH} = \alpha_{ges.,Z,D} \cdot \sqrt{(\sigma_{\sigma_nenn})_{Z,D}^2 + 3 \cdot (\tau_{t_nenn})_{Z,D}^2} \quad (2.90)$$

$$\sigma_{max,Z,D_SSH} = \sqrt{(\alpha_{\sigma} \cdot \sigma_{\sigma_nenn})_{Z,D}^2 + 4 \cdot (\alpha_{\tau} \cdot \tau_{t_nenn})_{Z,D}^2} \quad (2.91)$$

$$\sigma_{max,Z,D_SSH} = \alpha_{ges.,Z,D} \cdot \sqrt{(\sigma_{\sigma_nenn})_{Z,D}^2 + 4 \cdot (\tau_{t_nenn})_{Z,D}^2} \quad (2.92)$$

Insgesamt ermittelte Kohl somit für die Berechnung maximaler Zahnfußspannungen sechs mögliche Formzahlen. Sie wurden für Normal-, Kopf- und Fußträger abgeleitet und in Formzahlendiagrammen in Abhängigkeit von der Flankenseite, der Lastfunktion und vom Verhältnis Fußausrundungsradius zu Modul dargestellt.

Als Teilaspekt sind die Formzahlen der untersuchten Verzahnung sowie der Berechnungsansatz in die DIN 5466-2 /N5/ übernommen worden. Systematische Untersuchungen über den Einfluss von Profilverschiebung und Variation der Fußausrundungen wurden nicht durchgeführt.

Zusammenfassung der Ergebnisse von WESOLOWSKI

Umfangreiche numerische Untersuchungen wurden von *Wesolowski* /Wes96/ zur Ermittlung des dreidimensionalen Beanspruchungszustandes und Klärung des Verformungsverhaltens im Wellen- und Nabenzahnfuß drehmomentbelasteter Verbindungen nach *DIN 5480* /N1/ durchgeführt. Die verwendeten FE-Modelle sowie die Berechnungsergebnisse wurden durch den Vergleich mit den über Dehnungsmessstreifen ermittelten Ergebnissen sowie mit Ergebnissen aus der Literatur verifiziert. Eine gute Übereinstimmung zwischen der rechnerischen Abschätzung und dem praktischen Versuch konnte erreicht werden.

Das von *Wesolowski* berechnete Verhältnis $b/d_B \approx 0,6$ bestätigt das von *Schöpf* /Sch76/ und *Villmer* /Vil84/ ermittelte Verhältnis $b/d_B \approx 0,5$. Hinsichtlich der Auswirkung der Nabengeometrie stellt *Wesolowski* fest, dass die Kerbspannungen ab einem Verhältnis $d_{e2}/d_B \geq 2$ unabhängig vom Nabenaußendurchmesser sind. Mit zunehmender Zähnezahl konnte eine ausgeprägte maximale Zahnfußspannung am Verbindungsbeginn festgestellt werden (**Bild 2.40**). Eine Vergrößerung des Fußrundungsradius führt allerdings zur Reduzierung der Zahnfußspannungserhöhung.

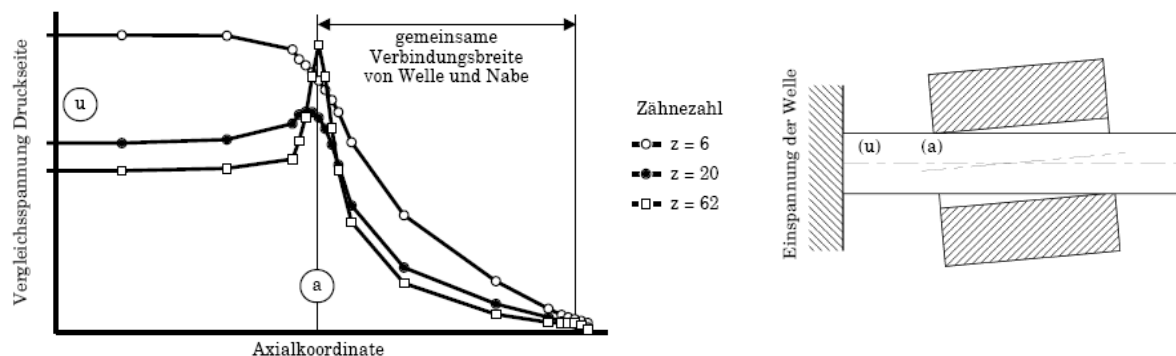


Bild 2.40: Vergleich der Vergleichsspannungsverläufe im Wellenzahnfuß drehmomentbelasteter Zahnwellenverbindungen nach *DIN 5480* über der Verbindungsbreite für unterschiedliche Zähnezahlen, ($d_{e2}/d_B = 2$), (a): Verbindungsanfang und (u): ungestörter Wellenbereich nach /Wes96/

Die Arbeit von *Wesolowski* beinhaltet auch verschiedene spezielle geometriespezifische Kenngrößen und Abhängigkeiten in Form von Näherungsformeln und graphischen Darstellungen zur Beschreibung der Einflüsse der Verzahnungsgeometrie, des Überstandes der Wellen- oder Nabenzahnverzahnung sowie des Druckwinkels auf die maximale Beanspruchung im Zahnfuß.

Der Druckwinkel beschreibt dabei den Winkel der Zahnflanke einer Zahnscheibe, der zwischen dem Flankennormalkraftvektor und der Sehne im Zahnfuß liegt. Mit zunehmendem Druckwinkel vergrößert sich die Zahnfußspannung im Zusammenhang mit dem Welleninnen- bzw. Nabenaußendurchmesser. Während ein Überstand der Wellenverzahnung die Beanspruchungsüberhöhung im Wellenzahnfuß reduziert, vergrößert er diese jedoch im Nabenzahnfuß.

Ein anderer Gegenstand seiner Arbeit ist die numerische und experimentelle Bestimmung der maximalen Beanspruchungen und der plastischen Dehnungen im Zahnfuß. Die ermittelten Drehmoment-Dehnungskurven sind das Resultat zahlreicher Torsionsversuche und FEM-Rechnungen an Zahnwellen bei idealplastischem Werkstoffverhalten.

Resümee

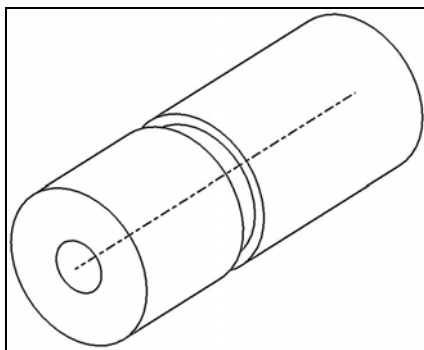
Auf dem Gebiet der Berechnung des Tragfähigkeitsverhaltens von Zahnwellenverbindungen sind in der Vergangenheit bereits zahlreiche theoretische und experimentelle Untersuchungen durchgeführt worden bzw. werden auch gegenwärtig noch Untersuchungen durchgeführt.

Allen gemeinsam ist, dass sie sich bislang auf Verbindungen ohne die Verzahnungsausläufe oder SR-Nuten konzentrierten. Die vorliegenden Ergebnisse zeigen übereinstimmend, dass die Zahnfußdauerfestigkeit entscheidend durch Kerbspannungen im Zahnfuß beeinflusst wird.

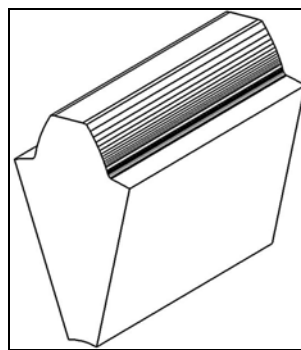
Zur Berechnung der Kerbwirkungszahlen im Fußbereich von Zahn-, und Keilwellen existieren Näherungsgleichungen sowie unsichere Angaben. Jedoch sind diese teilweise auf alte Literaturquellen zurückzuführen.

Die geometrischen Einflussgrößen der Verzahnungsausläufe auf die Kerbwirkung waren in der verfügbaren Fachliteratur noch nicht Gegenstand systematischer Abhandlungen. Die Berücksichtigung der Größe der Spannungsspitze im freien und gebundenen Auslaufbereich, deren Lage und die Stärke des Abklingverhaltens in Längs- und Tiefenrichtung wurden bisher nicht behandelt.

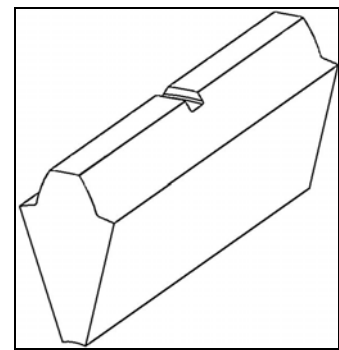
Trotz einiger vertiefter Untersuchungen über die SR-Nuten und über die verzahnten Wellen wurden die Überlagerungseinflüsse infolge des Zusammentreffens der Mehrfachkerbe Zahnwelle/SR-Nut (**Bild 2.41**) in der erfassten Fachliteratur noch nie betrachtet.



a) Welle mit SR-Nut nach DIN 471 (Heinrich und DIN 743)



b) Zahnwelle nach DIN 5480 (Wesolowski und DIN 5466)



c) Zahnwelle mit Nut durch FVA 467 für DIN 5466 und DIN 743

Bild 2.41: Untersuchung zur Mehrfachkerbwirkung beim Zusammentreffen von SR-Nut und Zahnfußausrundung

Deshalb bilden die nachfolgenden Untersuchungen zur Bestimmung der Formzahlen an Zahnwellen mit freiem oder gebundenem Auslauf sowie mit SR-Nuten einen zentralen Schwerpunkt dieser Arbeit. Die Weiterentwicklung des Standes der Technik hinsichtlich der Kerbwirkung bei Zahnwellen soll zu einer Ergänzung von DIN 743 führen.

3 Numerische Untersuchungen (FEM-Berechnungen)

3.1 Untersuchungsspektrum

Die Zahnwellen mit freiem bzw. mit gebundenem Auslauf werden im englischen Sprachgebrauch „stepped splined shafts“ bzw. „partially splined shafts“ genannt. Es handelt sich hierbei um Zahnwellenprofile mit einer ausgerundeten Übergangszone (Auslauf) der Verzahnung in den ungestörten Wellenbereich. In der Praxis sind vielfältige geometrische Gestaltungen dieses Verzahnungsauslaufs zu finden. In dieser Arbeit werden zwei gebräuchliche Geometrievarianten untersucht.

Die erste zu untersuchende Geometrievariante ist die Zahnwelle mit freiem Auslauf (auch „aufgesetzte Zahnwelle“ nach Schöpf /Sch76/ genannt) (**Bild 3.1**). Unter dieser häufig verwendeten Variante werden üblicherweise Zahnwellen verstanden, bei denen der glatte Teil der Welle auf den Nutgrund heruntergedreht ist, so dass der Wellendurchmesser d_w kleiner als der Fußkreisdurchmesser d_{f1} ist. Durch die Ausdrehung des Auslaufbereichs entsteht eine umlaufende Kerbe.

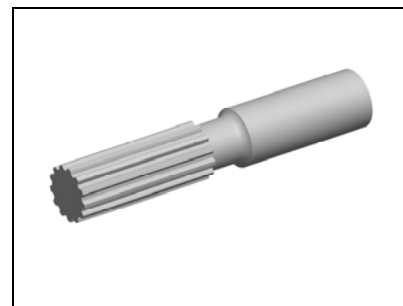
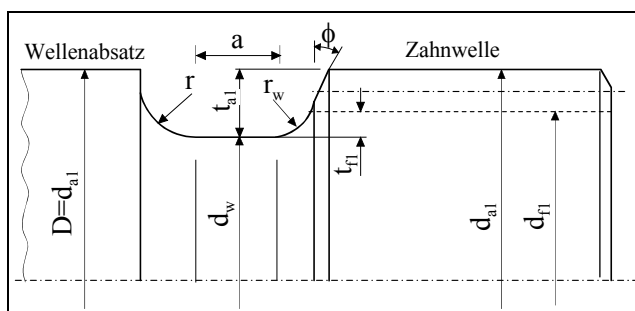


Bild 3.1: Geometrische Bezeichnungen der Zahnwelle mit freiem Auslauf (Welle mit aufgesetzter Verzahnung)

Bei der zweiten Variante handelt es sich um die klassische Zahnwelle mit gebundenem Auslauf (auch als „eingearbeitete Zahnwelle“ nach Schöpf /Sch76/ bezeichnet) mit und ohne Sicherungsringnut (**Bild 3.2**). Darunter werden Zahnwellen zusammengefasst, bei denen die über den Umfang verteilten Zahnnuten in die Welle durch Fräsen oder Walzen eingearbeitet sind. Der Außendurchmesser d_w des entsprechenden Wellenabschnitts soll dem Kopfkreisdurchmesser d_{a1} der Verzahnung entsprechen.

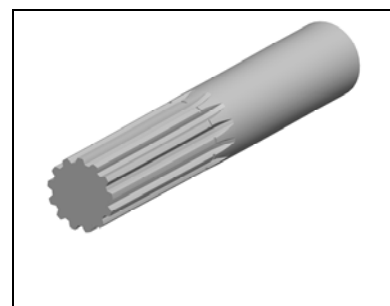
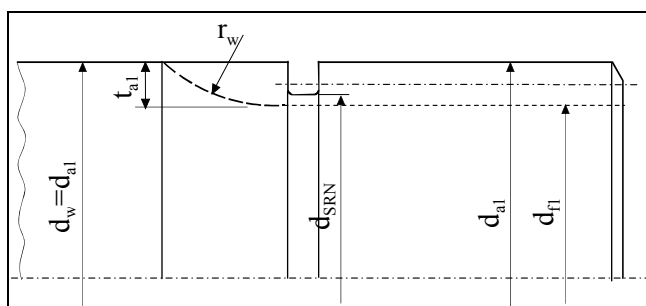


Bild 3.2: Geometrische Bezeichnungen der Zahnwelle mit gebundenem Auslauf und mit SR-Nut (Welle mit eingearbeiteter Verzahnung)

Die Gefährdung ist bei diesen Geometrievarianten gekennzeichnet durch die Kerben im freien und gebundenen Auslauf, im Zahnfußbereich sowie in der Sicherungsringnut. In den beiden Kerbgeometrien sind allerdings die Einflüsse einer Mehrfachkerbe enthalten. Mit den numeri-

schen Berechnungen sollen die Spannungsformzahlen für den gesamten standardisierten Zahnwellenbereich nach *DIN 5480 /N1/* ermittelt werden. Hierbei haben die Variationen der geometrischen Verzahnungsdaten (Zähnezahl z , Profilverschiebungsfaktor x_1 , Zahnfußausrundungsverhältnis ρ_{f-min}/m , Bezugsdurchmesser d_B etc.) sowie der Kerbparameter des Auslaufes (Kerbabstand a , Kerbschärfe r_w/t_{a1} und Absatzhöhe d_w/d_{a1}) einen Einfluss auf die Formzahlwerte und müssen deshalb variiert und untersucht werden.

Zusätzlich werden die Einflüsse der Variationen der Lage und Tiefe der standardisierten Sicherungsringnuten nach *DIN 471 /N2/* zur vorgegebenen Zahngrundgeometrie und die daraus resultierende mögliche Überlagerung von Kerbwirkungen auf die Spannungsverteilungen einbezogen. Dies bedeutet als Grenzwertbetrachtung die Untersuchung von Geometrien mit kleinem Modul bzw. mit großem Bezugsdurchmesser mit einer unter den Fußkreis gehenden SR-Nut und auf der anderen Seite des Untersuchungsfeldes die Geometrien mit großem Modul und im Verhältnis dazu flacher SR-Nut. Die gesamten neu verfügbaren Ergebnisse der numerischen Untersuchungen werden in einfachen Gleichungen und Diagrammen zusammenstellt.

Exemplarische Kontaktberechnungen der Zahnwellenverbindung für Biegung und Torsion werden an ausgewählten Parameterkombinationen von typischen Zahnwellen durchgeführt. Bei dieser Mehrkörper-Strukturanalyse wird die Nabe nicht mehr durch eine entsprechende Lastfunktion auf den Zahnflanken ersetzt, sondern als elastischer Körper mit der Welle in Kontakt gebracht.

Die in der industriellen Praxis auftretenden Montagefälle der Zahnnaben können durch zwei Einbaulagen repräsentiert werden (**Bild 3.3**). Die erste Position wird als definierte Lage (0) bezeichnet, d.h., die Nabe befindet sich direkt am Auslaufbeginn (mit Kerbüberlagerung). Die zweite Position wird als variable Lage (1) mit einem entsprechenden Abstand zum Auslaufbeginn bezeichnet (**Bild 3.4**).

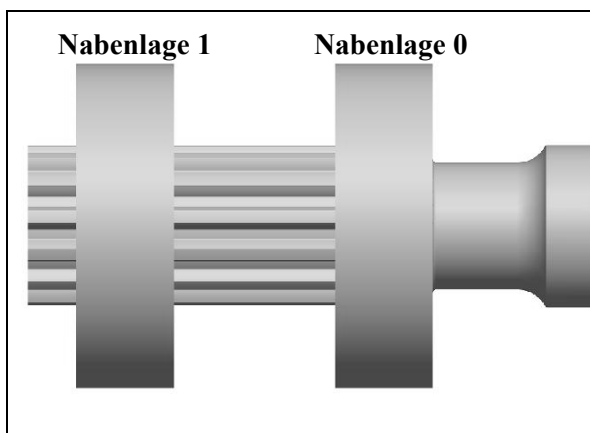


Bild 3.3: Mögliche Einbaulagen der Zahnnaben am Beispiel der Zahnwelle W25x1,75x13 mit freiem Auslauf

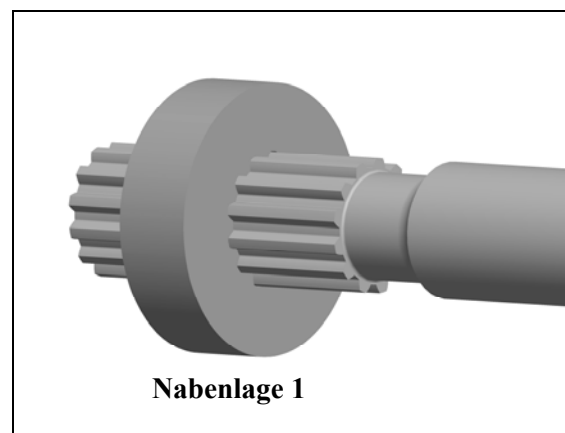


Bild 3.4: Position der Zahnnabe „Lage 1“ mit einer Entfernung vom freien Auslaufbeginn

3.2 FEM-Modellbildung

3.2.1 Allgemeines zu den Grundlagen der Finiten-Elemente-Methode FEM

Sowohl zur Berechnung der Spannungskonzentrationen dreidimensionaler Problemstellungen als auch zur Optimierung von Bauteileigenschaften haben heute in den unterschiedlichen industriellen Bereichen die numerischen Lösungsverfahren wie die FEM und die BEM verstärkt an Bedeutung gewonnen. Begünstigt wurde dies durch die rasche Entwicklung und Einführung leistungsfähiger Rechentechnik, die heute eine hohe Komplexität der Detailanalyse der Bauteile sowie eine hohe Flexibilität der Modellierungsmöglichkeiten erlaubt. Dadurch können umfangreiche Auslagerungsdateien realisiert werden.

Die Anwendung von numerischen Verfahren ist mit einem enormen Arbeitsaufwand verbunden und ermöglicht aber eine Reduzierung der Entwicklungskosten und –zeiten von Konstruktionsbauteilen, wie z.B. Profilwellen, die in einer hohen Anwendungsvielfalt im Bereich der Automobilindustrie und Maschinenkonstruktion benötigt werden.

Grundgedanke der FE-Simulation ist die Überführung des realen Bauteils in ein idealisiertes physikalisches Modell, d.h. die Zerlegung von komplizierten kontinuierlichen Strukturen in eine Vielzahl gleichartiger Elemente. Mit Hilfe dieses Modells können die Konstruktionsgrößen näherungsweise bestimmt werden.

Zu den Grundlagen, mathematischen Hintergründen und zu praktischen Anwendungen ist aus der Literatur eine Vielzahl von Veröffentlichungen bekannt, von denen hier nur die von /Frö95/, /Bet97/, /Mei00/, /Mül00/, /Rie03/ und /Kle05/ genannt sein sollen.

Trotz aller Fortschritte in der Entwicklung von leistungsfähigen FE-Programmen ist die Gefahr der Fehlinterpretation der numerischen Ergebnisse zu groß. Außerdem zählen die Generierung und Verifizierung von FEM-Netzen immer noch zu den personalintensivsten Arbeitsgängen. Die FE-Methode ist noch weit davon entfernt, ein Knopfdruckverfahren zu sein. Die Untersuchungsergebnisse des Spannungsverlaufes an einem Bauteil variieren je nach angewandtem Softwaresystem oder je nach verwendeter Untersuchungsmethode, wie z.B. BEM, FEM oder Spannungsoptik.

Für die Formzahlermittlung an den Modellen der Zahnwellen werden FE-Rechnungen unter der Voraussetzung des linear-elastischen Materialverhaltens unter Nutzung des FEM-Systems *MSC/PATRAN/NASTRAN/MSC/* durchgeführt. Dieses Programm eignet sich für unterschiedliche Aufgabenstellungen im Umfeld von Konstruktionsprozessen und steht am IMM zur Verfügung. *PATRAN* dient zur Erstellung der Strukturen und der Eingabedatei für die Berechnung sowie zur anschließenden Visualisierung der Ergebnisse.

Dieses Kapitel soll nur einen kleinen Einblick in die FEM geben und auf Besonderheiten der hier durchgeführten Berechnungen hinweisen.

3.2.2 FEM-Elementtypen

Bei den in dieser Arbeit zu untersuchenden Zahnwellengeometrien handelt es sich um eine dreidimensionale Kerbgeometrie infolge des Zusammentreffens Auslauf/Zahnfuß. Sie lässt sich nicht auf ein zweidimensionales Modell reduzieren. Es ist daher notwendig, die Vernetzung unter Verwendung dreidimensionaler FE-Volumenmodelle durchzuführen. Die wichtigsten FE-Volumenelementtypen (**Bild 3.5**) werden nachfolgend kurz vorgestellt:

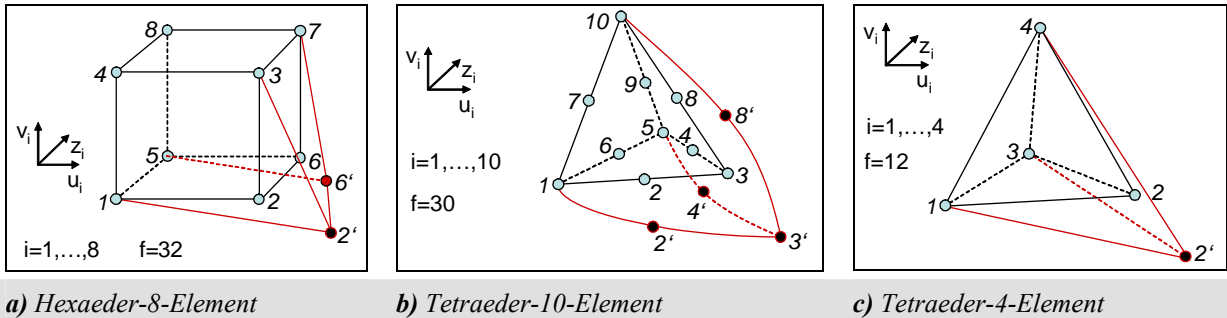


Bild 3.5: Dreidimensionale FE-Volumenelemente

Das Hexaeder-8-Element (**Bild 3.5–a**) verfügt über 8 Knoten in den Eckpunkten mit jeweils drei möglichen Verschiebungen. Es ergibt sich daraus ein linearer Formfunktionsansatz. Die Elementsteifigkeitsmatrix besitzt die Größe 24x24. Das Element hat, beim optimalen Seitenverhältnis von 1:1:1, eine in alle Richtungen gleiche Steifigkeit. Die Vernetzung mit Hexaeder-8-Elementen erfordert das Vorhandensein sechsflächig begrenzter, quaderähnlicher (isometrischer) Teilkörper.

Zu den Vorteilen dieses Elementes zählt die Aufbaumöglichkeit sehr homogener Netze. Daraus resultiert die Erzielung guter Ergebnisse mit relativ wenigen Elementen. Weiterhin ist die Approximation von Krümmungen wegen des linearen Ansatzes nur mit begrenzter Genauigkeit möglich. Bögen werden durch lineare Elemente immer „geradlinig facettiert“ **/Bet97/**.

Das Tetraeder-10-Element (**Bild 3.5–b**) besitzt 4 Knoten in den Eckpunkten und 6 Zwischenknoten in der Mitte jeder begrenzenden Tetraederkante mit drei möglichen Verschiebungen. Die sich ergebende Größe der Elementsteifigkeitsmatrix beträgt damit: 30x30. Entlang einer Kante stehen jetzt 3 Stützpunkte zur Verfügung. Damit lässt sich ein Polynom 2. Grades exakt definieren.

Die Tet-10-Elemente können nahezu jeden Körper mit sehr komplizierten Randkonfigurationen gut nachbilden. Außerdem ermöglichen sie einen schnelleren Netzstrukturübergang von einem groben zu einem feinen Teil des gesamten Netzwerkes. Es ist weiterhin eine lokale Verfeinerung des Netzes möglich. Eine relativ hohe Netzdichte kann z.B. durch den Einsatz der h-Methode (Genauigkeitssteigerung durch Verkleinerung der Elementgröße bzw. mehr Elementanzahl) erreicht werden.

Je nach Literaturquelle wird der prinzipielle Grad der Genauigkeit und der Ergebniszuverlässigkeit der Tet-10-Elemente mit dem der Hex-8-Elemente gleichgestellt (**/Bet97/**, **/Frö95/**) oder sogar als besser bezeichnet (**/Mül00/**, **/Rie03/**). So berichtet beispielsweise *Van-Phai Nguyen* **/Ngu82/** in seiner Arbeit zur automatischen Vernetzung für die Festigkeitsberechnung dreidimensionaler Bauteile, dass sich das Tet-10-Element mit dem quadratischen Verschiebungsansatz, als optimales Element für die FEM erwies. Das Tet-10-Element hat gegenüber den Elementen mit linearer Ansatzfunktion eine höhere Genauigkeit der numerischen Berech-

nung und auf Grund der Zwischenknoten eine bessere Anpassungsfähigkeit der Form und Verzerrungsgestalt an die Realgeometrie.

Das Tetraeder-4-Element (*Bild 3.5–c*) verfügt über vier Knoten mit jeweils drei translatorischen Freiheitsgraden und damit über einen linearen Formfunktionsansatz. Die Größe der Elementsteifigkeitsmatrix ergibt sich somit zu: 12×12 . Der Hauptvorteil dieser Elemente liegt in der Möglichkeit nahezu jeden Körper damit vernetzen zu können. Gekrümmte Flächen werden hier, auf Grund des linearen Ansatzes, wie schon bei den Hex-8-Elementen in ebene Teilflächen zerlegt.

Die mit Tet-4-Element erzielten Ergebnisse sind oft von minderer Qualität und bleiben deutlich hinter denen der Hex-8- oder Tet-10-Elemente zurück. Dies liegt am Zusammenwirken der Grundform des Elements und des linearen Formfunktionsansatzes. Diese Elemente eignen sich wegen der Erzeugung kleiner und numerisch gut zu lösender Gleichungssysteme und den damit verbundenen kurzen Lösungszeiten, zur Erstellung von überschlägigen Rechnungen. Mehr darf von ihnen nicht erwartet werden.

Die Ergebnisse eigener Vergleichsrechnungen zu diesen Elementen sind im **Abschnitt 3.4** zusammengefasst.

3.2.3 Vernetzungsprinzipien zur FE-Modellbildung

Vor Beginn der Vernetzung sollte die Beurteilung der verschiedenen Methoden zur Netzgenerierung überprüft und gegeneinander abgewogen werden. Ein Empfehlungsschema zur Erstellung eines FE-Modells wird entwickelt und vorgeschlagen. Damit kann der benötigte Zeitbedarf und die erreichbare Genauigkeit erstmals grob abgeschätzt werden.

Für die FE-Netzgenerierung existieren folgende Möglichkeiten: Die erste ist die Erstellung eines problemspezifischen *Preprozessors*, die zweite Möglichkeit ist die indirekte Netzgenerierung auf der Basis von CAD-Modellen. Es wird dabei zwischen den abbildenden Vernetzungsverfahren (*Mapped Meshing*) und den freien Verfahren (*Free Meshing*) unterschieden. Während mit den freien Vernetzungsverfahren ausschließlich die Erzeugung unregelmäßiger FE-Netze ermöglicht wird, lassen sich durch den Einsatz abbildender Verfahren regelmäßige Netze generieren.

Das Programmieren eines problemspezifischen Preprozessors war zur Zeit sehr einfacher kommerzieller FE-Programme ohne die heute übliche, umfangreiche Grafikoberfläche sehr verbreitet. Bei dieser Methode erfolgt die Knotenkoordinatenberechnung aus den Geometrieparametern nach eigens entwickelten Algorithmen in einer höheren Programmiersprache (z.B. C++ oder Delphi). Anschließend werden den einzelnen Knoten die Elemente zugewiesen. Das Programm muss am Ende die Knotenkoordinaten der Elemente, die Lastfälle und Randbedingungen in Datenfeldern festgelegter Form an einen Solver (z.B. Nastran) übergeben. Während der Programmierung können alle Netzeigenschaften festgelegt und beeinflusst werden.

Vorteile dieser Methode sind:

- Prinzipielle Übereinstimmung der Netze der verschiedenen Varianten und damit sehr gute Vergleichbarkeit der Berechnungsergebnisse untereinander.

- Schnelle Darstellungsmöglichkeit vieler Varianten einer Geometrie.
- Hohes Optimierungspotential des Netzes und damit praktisch kleinere Gleichungssysteme bei gleich bleibender Genauigkeit. Dies führt zu reduziertem Speicherbedarf und kürzeren Rechenzeiten bei gleichwertigen Ergebnissen des Untersuchungsproblems.

Diesen Vorteilen stehen folgende Nachteile gegenüber:

- Hoher programmiertechnischer Aufwand.
- Spätere Anpassung des Netzes, z.B. Verfeinerung in Zonen hoher Spannungsgradienten, ist nur schwer möglich und sehr zeitaufwendig.
- Beschränkung auf einfache Geometrien und auf Elemente ohne Zwischenknoten, da höhere Ansätze den Programmierungsaufwand weiter erhöhen.
- Räumlich oft nur unter Verwendung von Hexaeder-8-Elementen realisierbar. Dafür muss jedoch eine Zerlegung in quaderförmige Grundkörper erfolgen.
- Geometrievariation ist begrenzt, denn das Netz wird oft verzerrt.

Beim *Mapped Meshing* setzt die Generierung regelmäßiger FE-Volumennetze eine Unterteilung (Vorstrukturierung) der räumlichen Geometrie in hexaederförmige Netzgebiete aus zweidimensionalen Flächenmodellen oder quaderförmigen dreidimensionalen Teilkörpern voraus, die durch sechs zusammenhängende vierseitige Flächen begrenzt sind. Die Knoten auf den Berührungsflächen zweier Teilkörper werden anschließend beiden Einzelnetzen zugeschrieben. Dadurch erfolgt die Verknüpfung der Netze der Teilkörper.

Durch translatorisches Erweitern (radiales oder lineares Extrudieren) entlang der z-Achse aus einer vernetzten Fläche oder durch rotatorisches Erweitern entstehen aus den zweidimensionalen Elementen dreidimensionale, isoparametrische 8-knotige Elemente. Bei dieser Form der Diskretisierung kann die Gestalt des Netzes sehr vielfältig und effizient beeinflusst werden. Durch Vorgabe der Knotenanzahlen entlang der Rechteck- oder Quaderkanten lässt sich sowohl die Netzdichte als auch der Grad der Elementverzerrungen beeinflussen. Regelmäßige Netze weisen eine höhere Qualität und Genauigkeit im Vergleich zur unregelmäßigen Vernetzung auf und werden in der Praxis trotz des Arbeitsaufwandes überwiegend verwendet.

Vorteile des *Mapped Meshing* sind:

- Die Erstellung sehr gleichförmiger, harmonischer Netze und damit die Ermöglichung sehr guter Rechenergebnisse.
- Die Beeinflussung der Netzdichte an Stellen hoher Spannungsgradienten.
- Die Verhinderung des Entartens einzelner Elemente.
- Die Beibehaltung großer Teile des Netzes bei Variation von Einzelheiten.

Zu den Nachteilen zählen:

- Der hohe Zeitaufwand, vor allem bei immer wieder neu anzufertigenden Modellen einer Variantenrechnung.
- Die Notwendigkeit zur Zerlegung der Gesamtstruktur in Teilflächen oder Teilkörper.

Ist eine Zerlegung in Teilkörper geometrisch oder mit wirtschaftlichem Zeitaufwand nicht möglich, z.B. bei einer Nut im Verzahnungsauslauf, steht die Methode des *Free Meshing* unter Verwendung der sich gut einem beliebig berandeten Körper anpassbaren Tetraederelemente zur Verfügung. Da es sich in der Praxis oft um zunehmende Komplexität der Bauteilgeometrien handelt, erfolgt die Diskretisierung basierend auf dem CAD-Modell unter Verwendung von Algorithmen zur automatischen Netzbildung. Diese Methode gewinnt zunehmend an Bedeutung und hat sich in der Praxis weitestgehend bewährt. Gründe dafür sind die stetigen Verbesserungen der Hardware und die Weiterentwicklung der Vernetzungsalgorithmen. Dadurch können sehr große Gleichungssysteme gelöst werden.

Vorteile des *Free Meshing* sind:

- Schnelle Netzerstellung aus den oft schon existierenden CAD-Modellen.
- Wirtschaftlich sinnvolle Methode sehr komplexe Geometrien zu vernetzen.
- Freie Elementwahl, insofern das jeweilige Programm über Algorithmen zur Vernetzung mit den jeweiligen Elementen verfügt.
- Risikominimierung der Existenz von Fehlstellen im Netz.

Dem gegenüber stehen auch hier verfahrensspezifische Nachteile:

- Zur Erreichung guter Ergebnisgenauigkeit sind oft viele Elemente und Knoten nötig.
- Es entsteht bei jedem Modell ein neues Netz. Dies ist bei Variantenuntersuchungen ungünstig, da ein Netzeinfluss nicht ausgeschlossen werden kann.
- Zeitaufwendiges Antragen der Lastfälle und Randbedingungen bei Variantenrechnungen. Die entsprechenden Knotennummern ändern sich bei jeder neuen Vernetzung.

Bei der Entscheidungsfindung kann nach folgendem Schema vorgegangen werden (**Bild 3.6**):

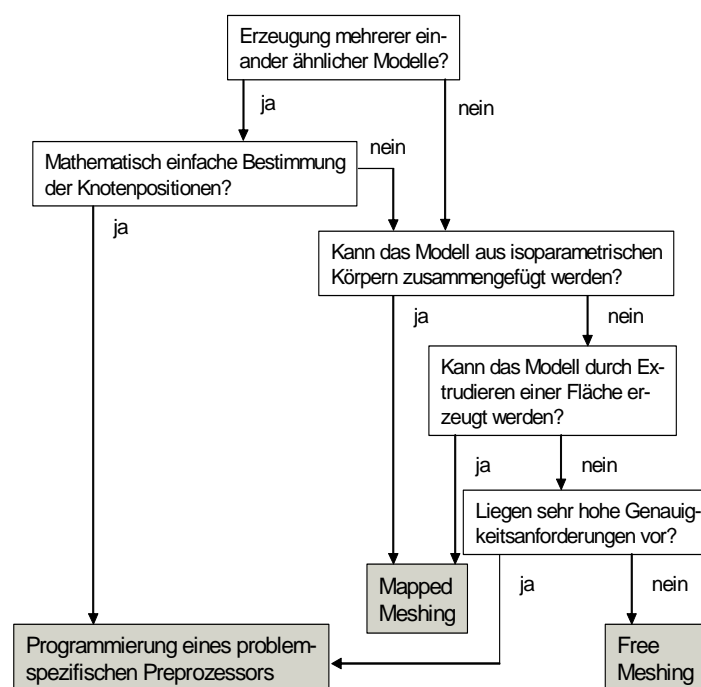


Bild 3.6: Schema zur FE-Modellerstellung /Bec04/

3.2.4 Vorgehensweise zur FE-Modellierung von Zahnwellen mit Auslauf

Die Vorgehensweise der FE-Modellerstellung und Ergebnisauswertung von Zahnwellen soll hier schrittweise vorgestellt und mit Bildern dokumentiert werden. Der rechnerunterstützte FE-Berechnungsprozess kann als Abfolge von folgenden Schritten dargestellt werden:

1. Erzeugung der Evolventenflanke mit dem Programm (*Zahngeometrie /ZGeo/*).
2. Modellierung der Zahnwellengeometrie im dem CAD-System (*Pro/Engineer /ProE/*).
3. IGES-Standardschnittstelle zur Übertragung von Geometriedaten zwischen dem CAD-System und dem FEM-Programm.
4. Geometrieänderungen an einem FEM-Netz (z.B. zur Vergrößerung oder Verkleinerung des Kerbradius) können jedoch nicht in das CAD-System zurückübertragen werden. Sie werden an der CAD-Geometrie vorgenommen und anschließend im FE-Modell abgebildet. Es ist eine unidirektionale Integration von CAD und FEM.
5. Preprocessing (*PATRAN*) für die Auswahl der geeigneten Elementtypen, Bereitstellung der Materialeigenschaften, für die FE-Netzgenerierung und schließlich für die Auswahl der Ergebnisanzeige. Die Randbedingungen (Einspannung und Belastung) können wahlweise auf das Solid Model oder das FE-Modell eingeführt werden.
6. Die Solution-Phase erfolgt mit dem Postprocessing (*NASTRAN*) zur Lösung des algebraischen Gleichungssystems.
7. Graphische Darstellung der FE-Ergebnisse in Diagrammformen (z.B. mit *MS-EXEL*).
8. Interpretation der Berechnungsergebnisse.

Bei der Vernetzung der FE-Modelle in dieser Arbeit wurden hauptsächlich die Hexaeder-8-Elemente angewendet. Grundsätzlich wurden alle räumlichen FE-Modelle aus geeigneten zweidimensionalen Flächenmodellen erstellt. Wo Vernetzungsprobleme entstanden, wurden die Tetraeder-10-Elemente zum Vergleich eingesetzt.

Die Zahnwelle besteht aus drei geometrischen Teilen, dem ungestörten Wellenbereich, der Außenkontur der Verzahnung und dem Zahnlückenauslauf. Die FE-Modellierung erfolgt in drei Schritten. Als erstes wird die glatte Welle (der innere Kern) durch Rotation einer entsprechenden Schnittfläche um die z-Achse erzeugt. Als zweites wird die Außenkontur durch mehrmaliges, translatorisches Erweitern bzw. Sweepen entlang der z-Achse aus einer vernetzten Zahnfläche abgebildet. Danach werden beide Teile fest miteinander verbunden. Als drittes muss das Netz hinsichtlich der Ergebnisgenauigkeit bei der Bestimmung der Spannungswerte im Bereich des Auslaufes feiner elementiert werden. Dies lässt sich durch Rotieren der in einer Ebene liegenden Knoten in die z-Richtung realisieren.

Die Modellierung der Zahnnabe ist vergleichbar mit der Modellierung der Zahnwelle. Grundlage ist wiederum eine vernetzte Fläche, die in die z-Achsrichtung translatorisch zu einem räumlichen FE-Modell erweitert wird.

In den **Bildern 3.7; 3.8 und 3.9** sind beispielhaft das fertig modellierte FE-Modell von Zahnwellen mit freiem Auslauf (*Bild 3.7*), mit gebundenem Auslauf (*Bild 3.8*) sowie Zahnwellen mit SR-Nuten (*Bild 3.9*) dargestellt. Es wurde ein Netz aus Hexaeder-8-Elementtyp generiert. Insgesamt bestand das FE-Netz nur für ein Modellsegment mit einem einzigen Vollzahn (z.B.

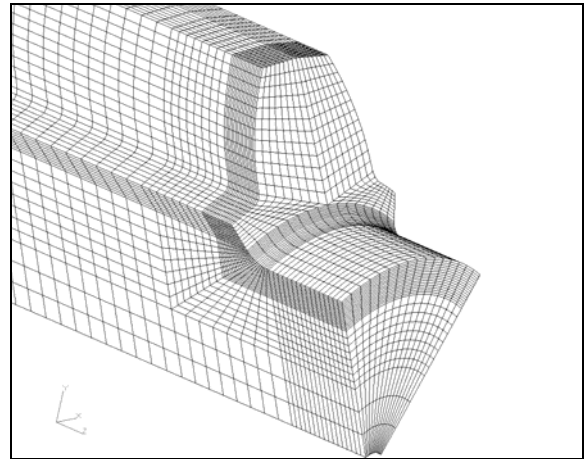
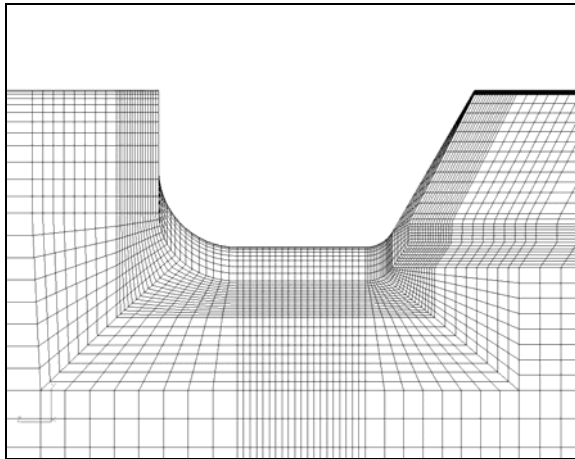
W 25x1,75x13 mit freiem Auslauf ohne Nabe) aus ca. 116710 Elementen und ca. 106240 Knoten. Für die FE-Modelle, die realen Zahnwellengeometrien entsprechen sollen, wurden aus DIN 5480 die relevanten Maße entnommen.

Bild 3.10 zeigt die Vernetzung der FE-Modelle am Beispiel der Verbindung DIN 5480 25x1,75x13 mit freiem Auslauf, wobei sich die Zahnnahe an zwei unterschiedlichen Positionen (direkt am Auslaufbeginn bzw. entfernt vom Auslauf) befindet.

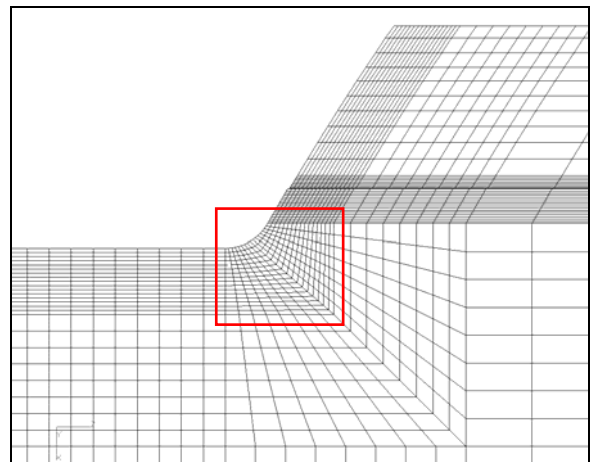
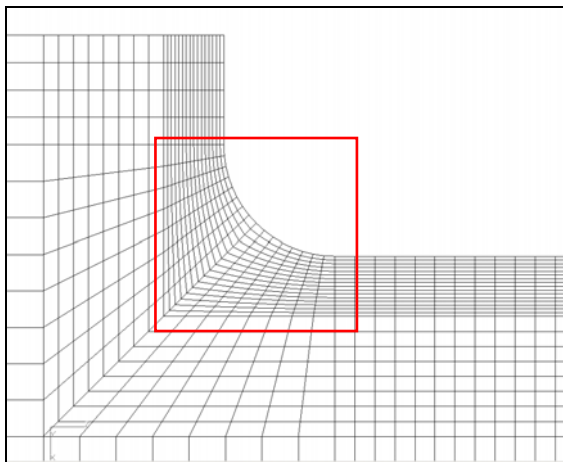
Kommt das Tetraederelement bei der Vernetzung von Bauteilen mit Mehrfachkerben (z.B. bei Zahnwellen mit einer unmittelbar im gebundenen Auslauf liegenden SRN) zum Einsatz, soll die Geometrie zuerst im CAD-System erzeugt und modifiziert werden, siehe **Bild 3.11**.

Die Oberflächen der Zahnwelle werden in Netzgebiete zerlegt. Danach soll der Verlauf von Zahnflanke und Zahnfuß in Form von Stützlinien und -punkten eingegeben und durch eine Splinefunktion angenähert werden. Anschließend wird die Kontur der Zahnücke durch Spiegel- und Kopieroperationen im CAD-System konstruiert. Darüber hinaus soll das CAD-Modell so modifiziert werden, dass die die Kerbgeometrie beschreibenden Konturen durch die Schaffung zusätzlicher Hilfslinien und -punkte unterteilt und die einzelnen Kurvenstücke durch Geraden ersetzt werden (**Bild 3.11**). Abweichungen von der Geometrie können vernachlässigt werden.

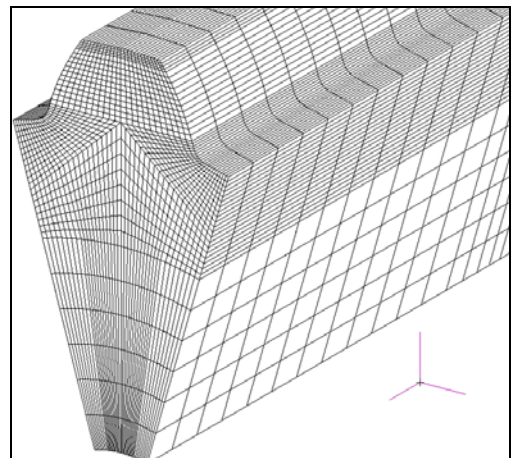
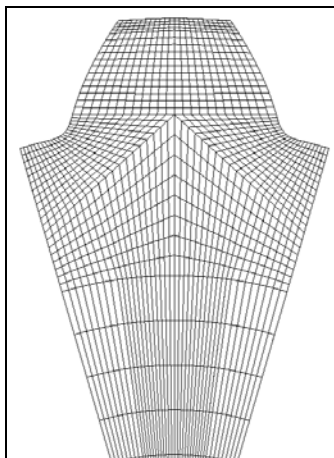
Weiterhin erfolgt die Netzbeeinflussung und -verfeinerung durch die Vorgabe der globalen Elementgröße, der Knotenanzahl entlang der so entstehenden Hilfskanten sowie der Definition der maximalen Abweichung des Netzes von der Geometrie in Krümmungen. Zur Erlangung bestmöglicher Vernetzungsqualität erfolgt eine Kontrolle des mit Tetraedern entstehenden Netzes auf möglichst geringe Verzerrung der einzelnen Elemente mittels der im FE-Programm enthaltenen Funktionen (z.B. *Jacobi Test*) sowohl hinsichtlich der Seiten- sowie Winkelverhältnisse als auch der Anbindung der Elemente untereinander.



a) regelmäßiges FE-Netz an der Zahnwelle W15x2x6 mit freiem Auslauf; $r/t = 0,5$ und $r_w/t_{a1} = 0,2$. Knotenanzahl: 66196 und Anzahl der Elemente: 59024

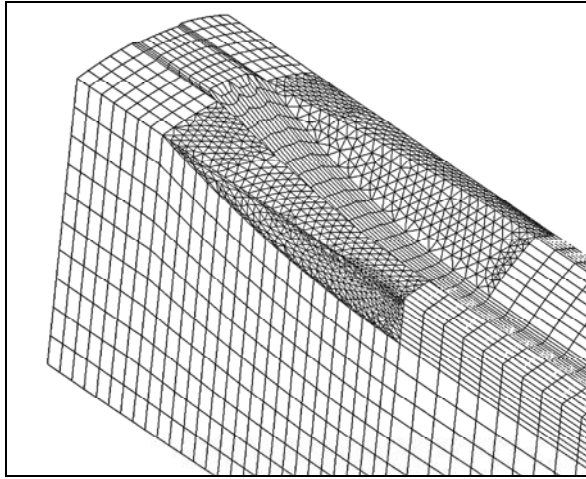


b) Kerbe des Wellenabsatzes (**links**) und Kerbe des freien Verzahnungsauslaufs (**rechts**) mit jeweils 16 Elementen im Kerbradius und 16 Elementen in der Tiefenrichtung der Kerbe

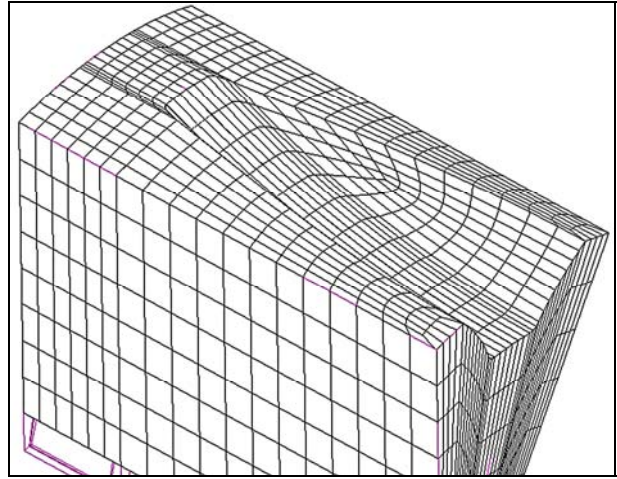


c) FE-Netzgestaltung im Zahnfußbereich einer verzahnten Welle ohne Auslauf

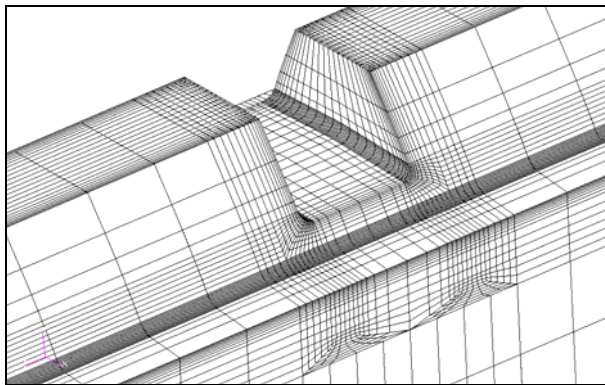
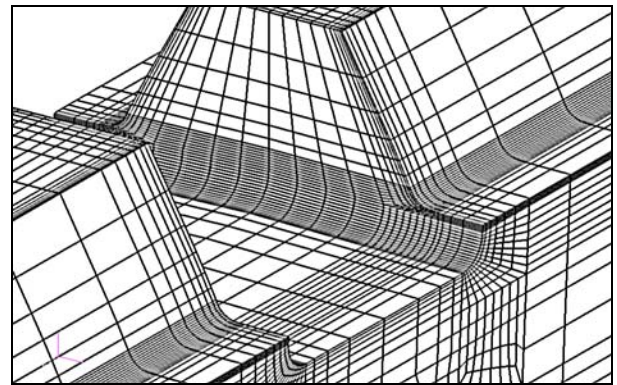
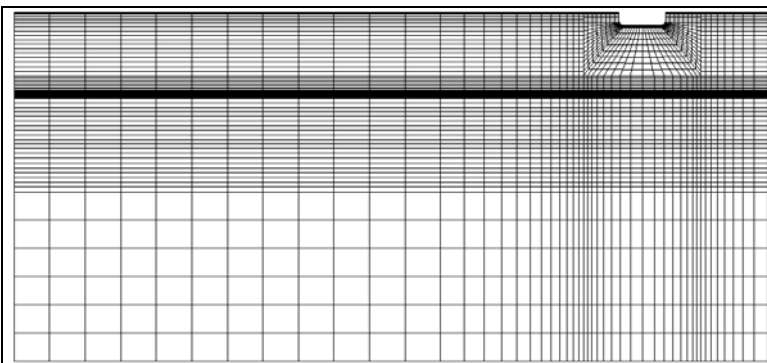
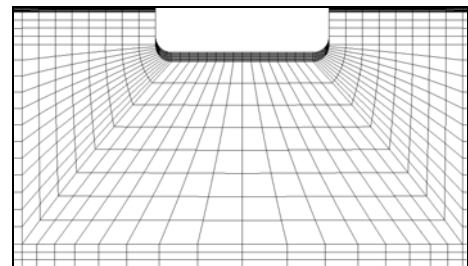
Bild 3.7: Räumliche FE-Vernetzung mit einem Hexaeder-8-Elementtyp an Zahnwellen mit freiem Auslauf

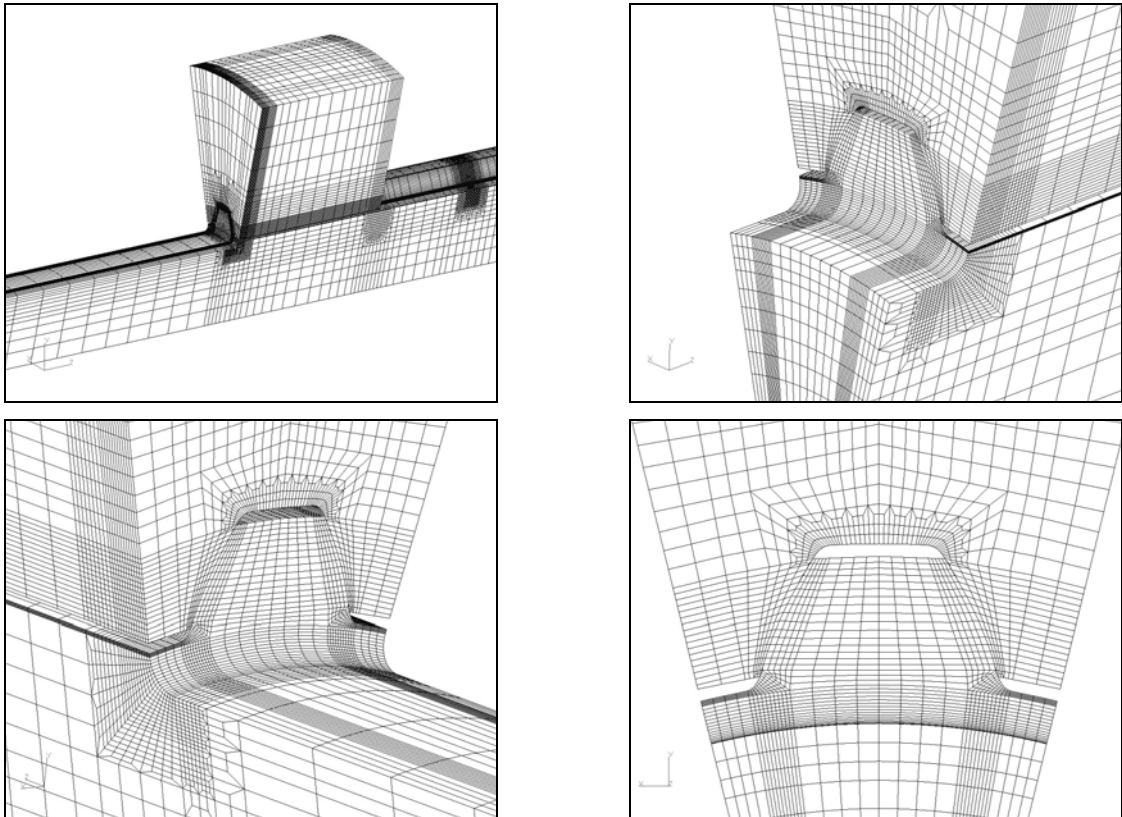


a) Mischnetz aus Hexaeder- und Tetraeder-Elementen

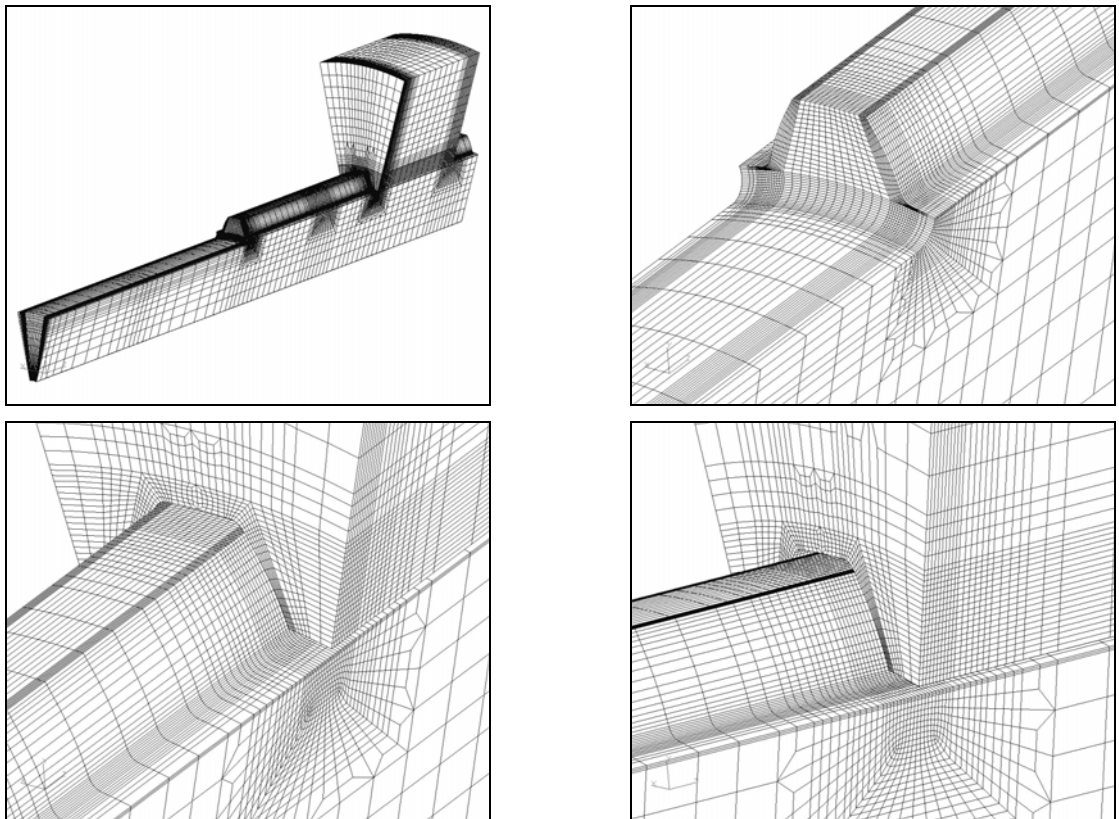


b) FE-Netz des geb. Auslaufs aus Hexaeder-Elementen

Bild 3.8: FE-Netze an Zahnwellen mit gebundenem Auslaufa) SR-Nutgrund **oberhalb** des Zahnfußes der Zahnwelle
DIN 5480 W60x2x28b) SR-Nutgrund **unterhalb** des Zahnfußes der Zahnwelle
DIN 5480 W150x2x74c) SR-Nutgrund liegt **unterhalb** des **Kopfkreises** bei der Zahnwelle **DIN 5480 W15x2x6****Bild 3.9:** 3D-FE-Netze mit Hexaeder-8-Elementen zur Modellgegenüberstellung an Zahnwellen mit SR-Nuten

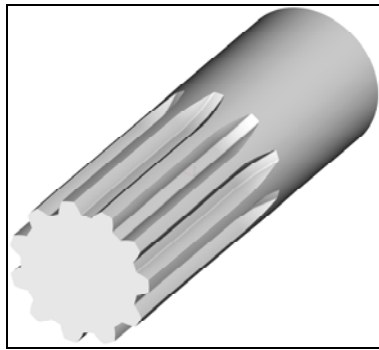
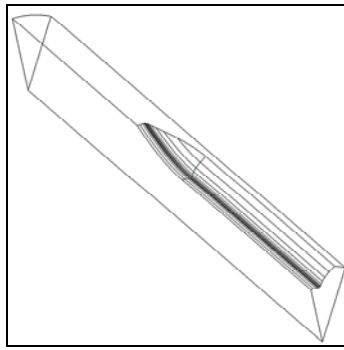
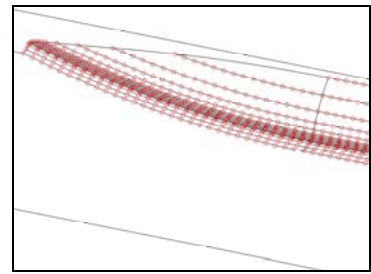
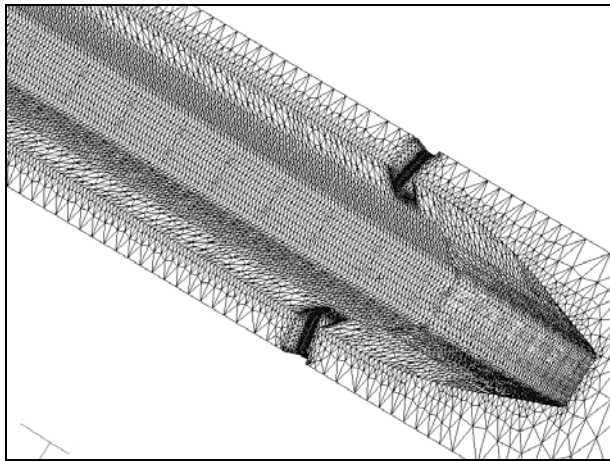
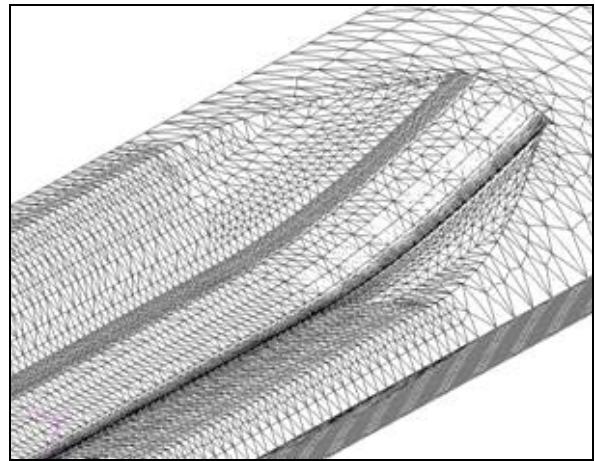
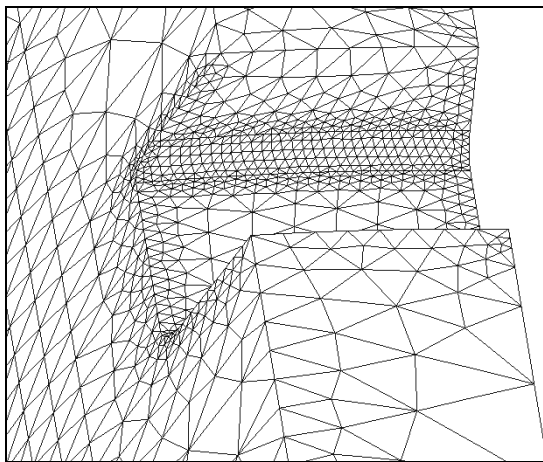
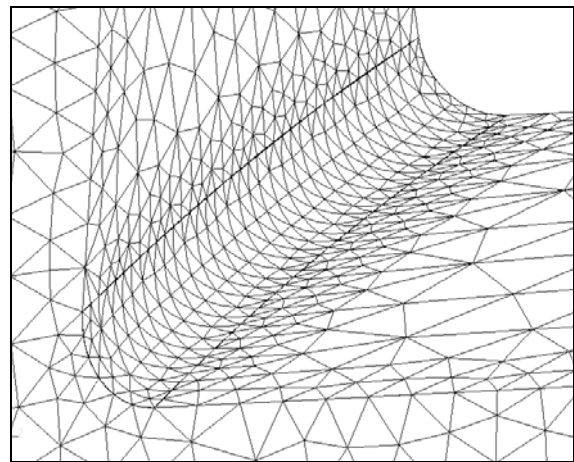


a) Nabenlage (0), direkt am Auslaufbeginn, Knotenanzahl: 130630 und Anzahl der Elemente: 119935



b) Nabenlage (1), entfernt vom Auslaufbeginn, Knotenanzahl: 201895 und Anzahl der Elemente: 187345

Bild 3.10: FEM-Vernetzung der Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf

**a)** CAD-Modell**b)** CAD-Modell mit Hilfskanten**c)** Netzdichtevorgabe im Auslauf**d)** Vernetzung der Zahnwelle mit gebundenem Auslauf und einer SR-Nut mit Tet-10-Elementen**e)** Vernetzung der Zahnwelle mit gebundenem Auslauf**f)** Vernetzung der SR-Nut an einer Zahnwelle mit Tet-10-Elementen**g)** Vernetzung der SR-Nutausrundung mit Tet-10-Elementen

Insgesamt bestand das aus den Tetraederelementen mit 10 Knoten generierte FEM-Netz eines Zahnwellensegments (z.B. **W25x2x11** mit gebundenem Auslauf ohne Nabeneinfluss):

- ohne SR-Nut: aus ca. 77500 Elementen und 120000 Knoten bzw.
- mit Vorhandensein einer SR-Nut: aus ca. 89500 Elementen und 142000 Knoten.

Bild 3.11: FEM-Netze mit einem 10-knotigen Tetraeder-Elementtyp an Zahnwellen mit gebundenem Auslauf mit und ohne Sicherungsringnut

3.3 Mechanische Randbedingungen

Die Erläuterung der mechanischen Randbedingungen ist hier notwendig, da sie die Nachvollziehbarkeit der FEM-Untersuchungen gestattet. Die in diesem Abschnitt vorliegende Untersuchung bemüht sich um das Problem der Variation des geometrischen Ortes der Krafteinleitung sowie der Einspannungsfälle an den Modellen der torsions- und biegebelasteten Zahnwellen. Darüber hinaus werden Berechnungen zur Abschätzung der Einflüsse der unterschiedlichen Randbedingungen auf die Entwicklung der Spannungskonzentrationen und damit auf die Beanspruchungsverteilung im Zahnfuß und Auslaufbereich realisiert.

3.3.1 Simulation der torsionsbelasteten Zahnwellen

Verwendete FE-Modelle

Für die Durchführung der FE-Untersuchungen der Beanspruchungsarten Zug/Druck und Torsion wurden geeignete räumliche Sektormodelle von Zahnwellen generiert, welche unter der Ausnutzung der Bauteilsymmetrie sowohl bezüglich der Geometrie als auch der Randbedingungen gestaltet werden, siehe **Bild 3.12**.

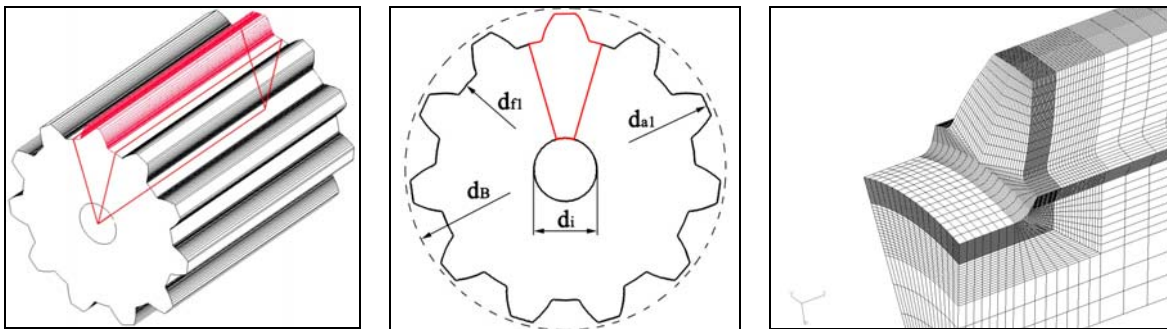


Bild 3.12: Verwendung von Sektormodellen mit kleiner axialer Bohrung in der Wellenmitte für die numerischen Untersuchungen an torsionsbelasteten Zahnwellen

Die Sektormodelle lassen sich damit nur auf abweichungsfreie, ideale ZWVen anwenden. Eine abweichungsbehaftete Verbindung mit unterschiedlichen Lasten auf allen Zähnen erfüllt nicht die Bedingung der Belastungssymmetrie, obwohl sie die Bedingung der geometrischen Symmetrie erfüllt.

Die Segmentmodelle bieten ein hohes Potential zur Zeiteinsparung bei der FE-Rechnung, zur Vereinfachung der Modellerstellung und zur flexiblen möglichen Modellerweiterung. Hier ist nur eine Zahnücke bzw. ein Vollzahn mit ca. 16 Elementschichten für die verwendeten Modelle notwendig. Der Öffnungswinkel eines Segmentes ergibt sich aus der Zerlegung einer Zahnwelle in z Segmente zu: $\varphi_{\text{seg}} = 360^\circ / z$ (**Bild 3.13**).

Bei Rotation eines einzelnen Segmentes um 360° z -mal an der Symmetrieebene entsteht ein geschlossenes, rotationssymmetrisches Gesamtmodell der Zahnwelle mit allen geometrischen und physikalischen Eigenschaften sowie Belastungen, die das Segment aufweist. Die Spannungsverteilung und das Verformungsverhalten in einem Sektor mit einem einzigen Zahn sind denen der Vollzahnwelle mit z -Zähnen bei Torsion oder Zug/Druck identisch.

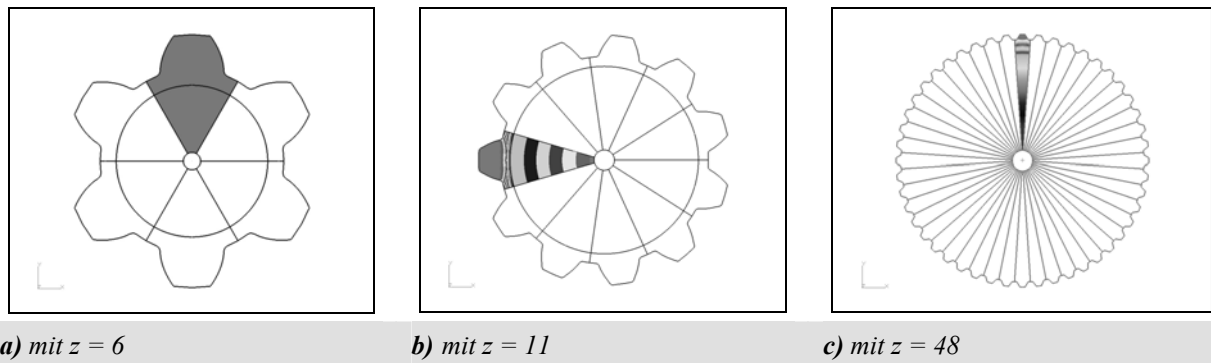


Bild 3.13: Vergleich der Proportionen der Zahnwellen

Definition der Einspannbedingungen

Die Knoten auf der Einspannebene (Querschnitts-, bzw. Stirnfläche) müssen axial, tangential und radial in allen Freiheitsgraden einseitig eingespannt werden (**Bild 3.14-a**). Um eine symmetrische Verformung auf Grund des stetigen Übergangs von einem Sektor in den nächsten zu erreichen und die Kontinuitätsbedingungen zu wahren, ist die Einführung einer weiteren Randbedingung nötig. Daher müssen die seitlich auf einem der Sektorränder (Symmetrieli-nien) liegenden Knotenpunkte mit den korrespondierenden Knoten des gegenüberliegenden Sektorrandes gefesselt werden. Dies wird beim Preprocessing (PATRAN) durch Definition entsprechender MPC's (multi-point-constraints) erreicht (**Bild 3.14-b und c**).

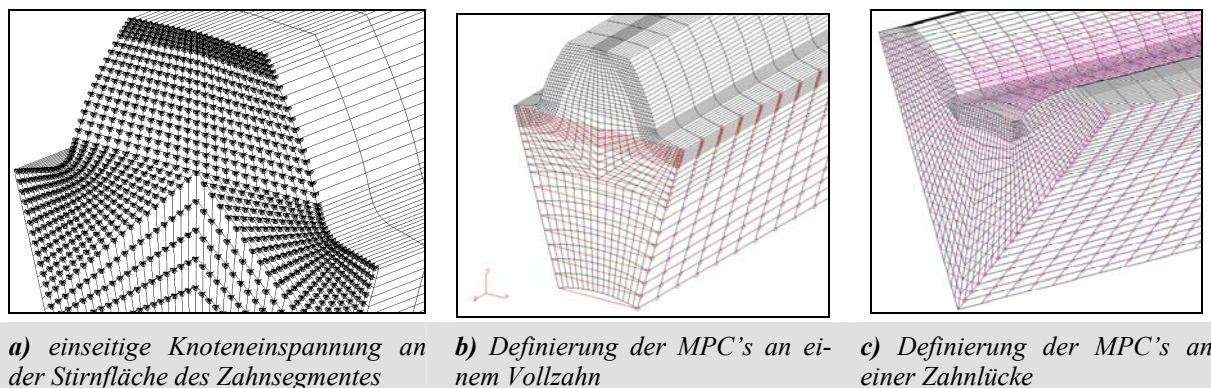


Bild 3.14: Einspannbedingungen bei Torsion

Diese Funktion koppelt translatorisch jeweils die Knotenpunkte der Sektorränder bezüglich ihrer Verformungswege paarweise in radialer sowie in tangentialer Richtung bezogen auf ein zylindrisches Koordinatensystem. Mit MPC's kann die Translation U_0 eines Knotens in Abhängigkeit anderer U_1, U_2, \dots, U_i nach Gl. (3.1) definiert werden.

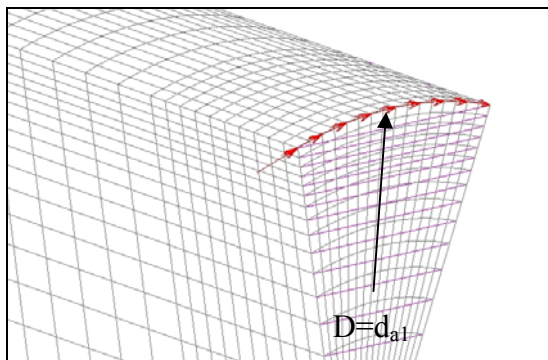
$$U_0 = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_i U_i + C_0 \quad (3.1)$$

C_1, C_2, \dots, C_i sind darin die linearen Proportionalitätsfaktoren, C_0 eine frei definierbare Konstante. Für den konkreten Fall der zyklischen Symmetrie lauten die MPC's: $U_{li} = U_{ri}$. Hierbei sind U_{li} die Knoten der linken Sektorseite und U_{ri} die entsprechenden der rechten Seite. In der Definition der MPC's besteht ein Unterschied zu den Randbedingungen nach *Wesolowski /Wes96/*. Er setzt den radialen und axialen Freiheitsgrad der Sektorrändknoten fest.

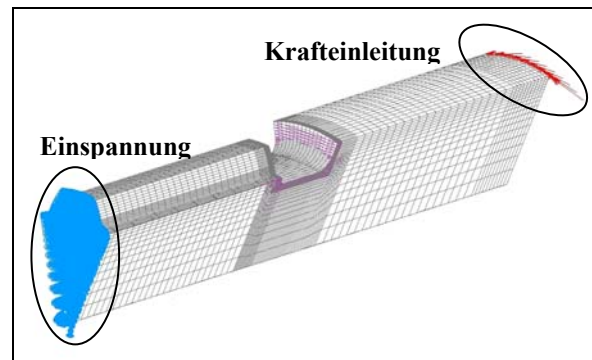
Krafteinleitungsprobleme

Für die Berechnung der Belastungsart Torsion bei Zahnwellen bieten sich unterschiedliche Ansätze für die Momenteinleitung an. Diesbezüglich kann zwischen folgenden Varianten unterschieden werden.

Drehmomenteinleitung in den freien Wellengrundkörper (Bild 3.15): Diese Art der Belastungseinleitung des Torsionsmoments erfolgt durch angreifende tangentielle Umfangskräfte am der Einspannung gegenüber liegenden glatten Wellenbereich mit dem Durchmesser $D = d_{a1}$ unter der Annahme, dass die Nabe in einer genügenden Entfernung vom Auslaufbereich liegt. Die Einspannung der Zahnwelle erfolgt durch die Fesselung der Knotenpunkte auf der Stirnfläche.



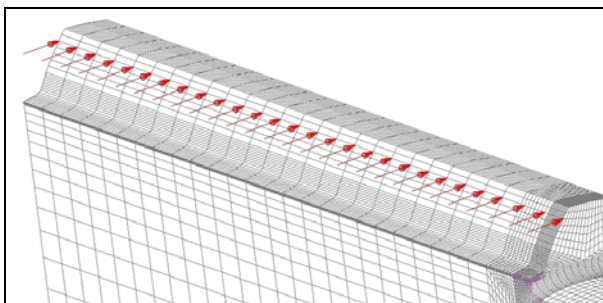
a) ein Ausschnitt der Zahnwelle



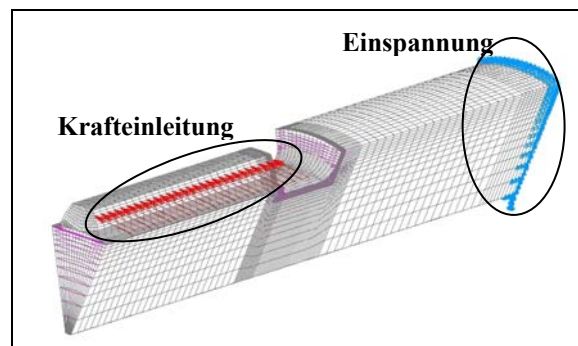
b) Randbedingungen an der Zahnwelle

Bild 3.15: Krafteinleitung bei Torsion: Tangentielle Umfangskräfte auf dem ungestörten Wellenende; gegenüber der Einspannungsseite des Verzahnungsendes

Einleitung der Drehmomente in die Zahnflanke (Bild 3.16): Die Drehmomenteneinleitung wird hier bei der Einspannung des ungestörten Wellenendes, durch auf der Zahnflanke angreifende Normalkräfte als Streckenlast aufgebracht. Die Länge der Streckenlast muss der Nabenbreite $b = 0,6 \cdot d_B$ entsprechen. Die geometrische Position der Belastung kann entweder direkt am Auslaufbeginn oder mit einem weiten Abstand von ca. $L_N = 0,5 \cdot d_B$ vom Auslaufbeginn liegen. Die Flankennormalkraft F kann allgemein in die Komponenten Radialkraft F_R und Umfangskraft F_u zerlegt werden. Die Radialkraft erzeugt im Zahnquerschnitt eine Druckbeanspruchung und führt zusätzlich zu einer Nabenaufweitung, während die Umfangskraft eine Biege- und Schubbeanspruchung im Zahnfuß verursacht. Hierbei wird nur die tangentielle Komponente der Normalkraft betrachtet.



a) ein Ausschnitt der Zahnwelle



b) Randbedingungen an der Zahnwelle

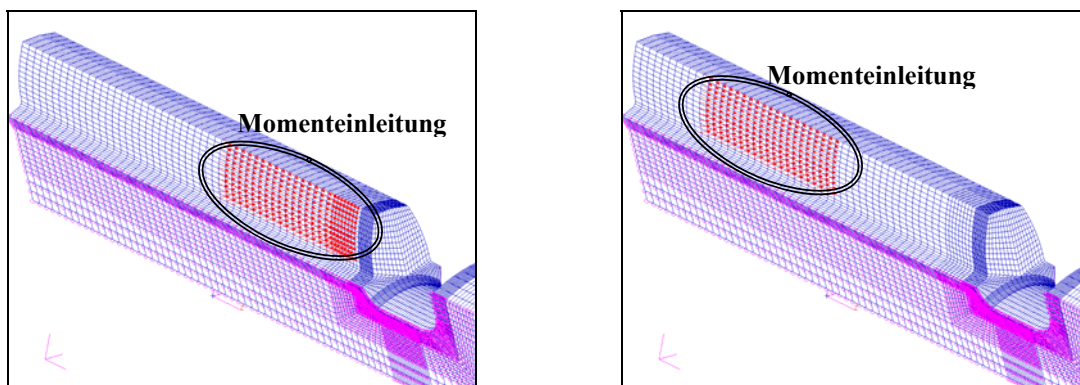
Bild 3.16: Krafteinleitung bei Torsion: Tangentielle Umfangskräfte auf der Zahnflanke bei Einspannung des freien Wellenendes

Drehmomenteinleitung als Flankenpressung (**Bild 3.17**): Die Pressung auf der Zahnflanke entsteht bei ZWVen aus dem Kontakt zwischen Wellen- und Nabenflanke. Als Flankenbelastung wird hier eine im Kontaktbereich gleichmäßige Pressung bzw. Lastverteilung über der Zahnhöhe und der Zahnbreite des abweichungsfreien FE-Modells angesetzt.

Aus der Nenn-Flankenpressung $p_{\text{nenn}} = 100 \text{ N/mm}^2$, mit der die abweichungsfreien Zahnflanken des FE-Modells gleichmäßig beansprucht werden, resultiert ein Torsionsmoment nach Gl. (3.2). Dabei ist b die Verbindungslänge, h_w die wirksame Zahnhöhe in Radialrichtung nach Gl. (3.3) (als Differenz der Kopfkreisdurchmesser von Welle und Nabe d_{a1} , d_{a2}) und d_b der Grundkreisdurchmesser.

$$M_t = p_{\text{nenn}} \cdot b \cdot h_w \cdot z \cdot \frac{d_b}{2} \quad (3.2) \quad h_w = \frac{d_{a1} - |d_{a2}|}{2} \quad (3.3)$$

Für die Berechnung der maximalen Spannung wurde die Position der Nabe auf der Welle in zwei geometrisch unterschiedliche Stellen variiert. Der Abstand $L_N = 0$ beschreibt die Nabelage (0) (**Bild 3.17- a**), d.h. unmittelbar am Auslaufbeginn. Der Abstand $L_N = 0,5 \cdot d_B$ beschreibt die Nabelage (1), d.h. in einer genügenden Entfernung vom Auslauf. Ab diesem Abstand hat die Nabe keinen Einfluss auf die maximale Vergleichsspannung im Auslaufbereich. Die Breite der Flankenpressung beträgt ca. $b = 0,6 \cdot d_B$ (**Bild 3.17-b**).



a) Zf_Ort 0_N.breite $b = 0,6 \cdot d_B$

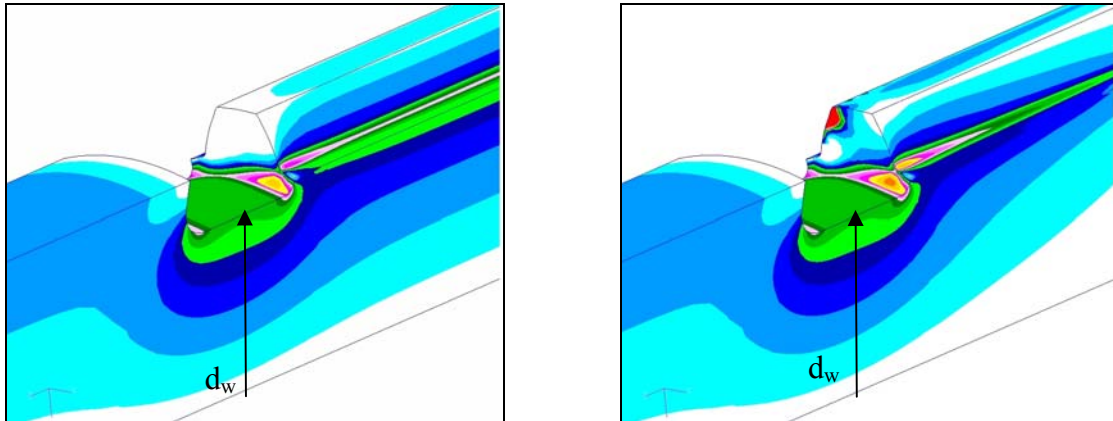
b) Zf_Ort 1_N.breite $b = 0,6 \cdot d_B$

Bild 3.17: Drehmomenteinleitung als eine im Kontaktbereich gleichmäßige Flankenpressung über der Zahnhöhe und -breite des abweichungsfreien FEM-Modells

Bild 3.18 zeigt am Beispiel eines torsionsbelasteten Sektormodells DIN 5480 W25x2x11 mit freiem Auslauf das Spannungsverhalten sowie die ermittelten Formzahlen nach der NS-Hypothese bezogen auf den kleinsten Durchmesser d_w abhängig von den oben beschriebenen Lasteinleitungsmodellen (Drehmomenteinleitung in den freien Wellenbereich und in die Zahnflanke).

Werden die Umfangskräfte auf der Flanke mit einer genügenden Entfernung vom Auslauf eingeleitet, so sind die Formzahlen im Auslauf sowie im ungestörten Zahnfußbereich identisch mit den sich aus dem Wellenende-Lastmodell (**Bild 3.18-a**) ergebenden Formzahlwerten.

Die **Tabelle A-1** in der **Anlage A** des Anhanges gibt eine Übersicht über die verwendeten Zahnwellen und deren geometrischen Abmessungen für die meisten durchgeführten Untersuchungen in diesem Abschnitt.



a) Spannungsverlauf infolge **Umfangskräfte auf dem Wellenbereich**, siehe Bild 3.15

- Auslauf: $\alpha_{\text{ti-NSH}} = 2,09$ und $\alpha_{\text{ti-GEH}} = 1,79$
- Zahnfuß: $\alpha_{\text{ti-NSH}} = 1,80$ und $\alpha_{\text{ti-GEH}} = 1,40$
- Absatz: $\alpha_{\text{ti-NSH}} = 1,44$ und $\alpha_{\text{ti-GEH}} = 1,443$

b) Spannungsverlauf infolge **Umfangskräfte auf der Zahnflanke**, siehe Bild 3.16

- Auslauf: $\alpha_{\text{ti-NSH}} = 2,29$ und $\alpha_{\text{ti-GEH}} = 1,86$
- Zahnfuß: $\alpha_{\text{ti-NSH}} = 2,24$ und $\alpha_{\text{ti-GEH}} = 1,31$
- Absatz: $\alpha_{\text{ti-NSH}} = 1,44$ und $\alpha_{\text{ti-GEH}} = 1,443$

Bild 3.18: Mechanische Randbedingungen und Vergleichsspannungsverhalten nach der NSH an einem torsionsbelasteten Zahnwellensegment DIN 5480 W25x2x11; $\tau_{\text{t-nenn-NSH-dw}} = 100 \text{ N/mm}^2$

Einflüsse der Verzahnungslänge und des Innendurchmessers

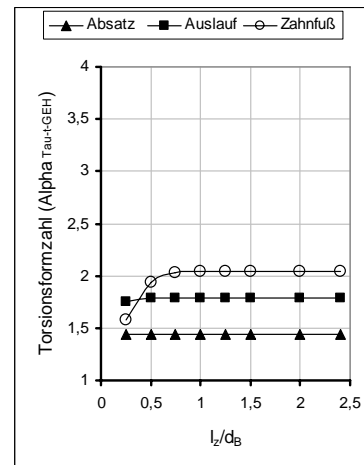
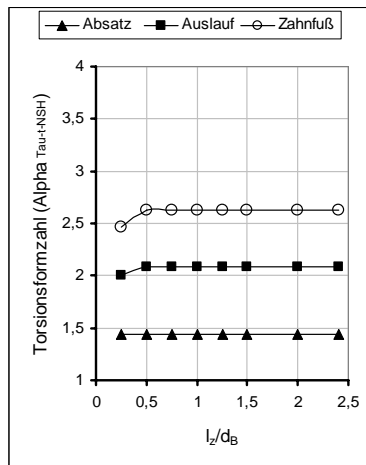
Weiterhin war es für die FE-Modellbildung notwendig, die Auswirkungen der Variationen der Verzahnungslänge (insbesondere für das Lastmodell „Drehmomenteinleitung über dem ungestörten Wellenbereich“) sowie der Größe der Innenbohrung bei Zahnwellen auf die Werte der Formzahlen im Zahnfuß, Absatz und Auslauf zu bestimmen. Deshalb wurden exemplarische Berechnungen an zwei Zahnwellen W 25x2x11 und W 40x2x18 durchgeführt.

Die Kerbgeometrieparameter der Zahnwellen sind aus *Tabelle A-1* in der *Anlage A* zu entnehmen. Die Nennspannung $\tau_{\text{t-nenn-NSH}} = 100 \text{ N/mm}^2$ ist auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und blieb unverändert. Die Formzahlen sind im Absatz und Auslauf auf den Durchmesser d_w bezogen und im Zahnfuß auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} , siehe Gl. (2.83).

In **Bild 3.19** sind die ermittelten Formzahlen in Abhängigkeit vom Verhältnis Verzahnungslänge zu Bezugsdurchmesser dargestellt. Es konnte eine minimale Verzahnungslänge $L_{z-\min} = 0,75 \cdot d_B$ festgelegt werden. Die Analyse der Torsionsspannungen zeigte, dass die maximalen Vergleichsspannungen nach der GEH oder der NSH im Auslauf liegen und nicht im Zahnfuß.

Bei steigendem Innendurchmesser Verhältnis d_i/d_w verringert sich die Torsionsformzahl sowohl im freien Auslauf wie auch im Absatzbereich (**Bild 3.20**). Bei Zug/Druck ist dieser Einfluss deutlich stärker. Bei Biegung kann die Änderung der Formzahl infolge der Innenbohrung vernachlässigt werden (in Bild nicht dargestellt). Dies ist auf die Konzentration der maximalen Vergleichsspannung bei Biegung an der äußeren Randschicht der Welle zurückzuführen. Mit zunehmender Zähnezahl bei konstantem Verhältnis d_i/d_w steigen die Formzahlen im Auslaufbereich bei den hier untersuchten Parameterkombinationen (**Bild 3.20**).

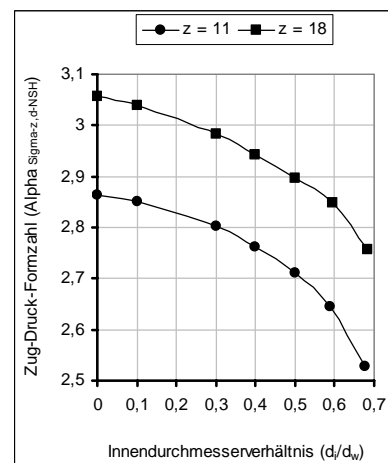
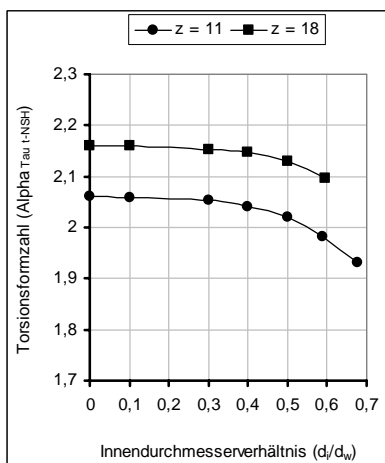
Die Reduzierung der Torsionsformzahl erfolgt bis zu einem Grenzwert $d_i/d_w = 0,3$ sehr geringfügig. Ausgehend davon kann der Einfluss der Innenbohrung bei der Modellgestaltung vernachlässigbar sein, solange das Verhältnis $d_i/d_w \leq 0,3$ für kleine Bezugsdurchmesser $d_B \leq 50 \text{ mm}$ bzw. $d_i/d_w \leq 0,5$ für $d_B > 50 \text{ mm}$ ist. Für weitere FE-Berechnungen wird das Verhältnis $d_i/d_w = 0,2$ nicht überschritten.



a) Torsionsformzahlen ausgewertet nach der NSH

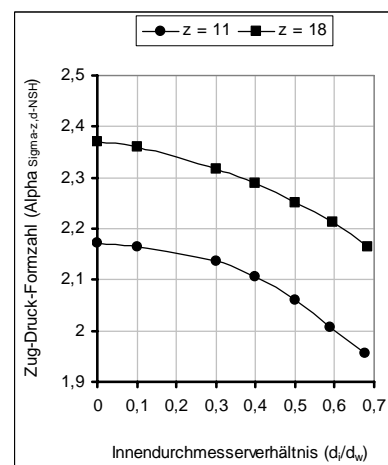
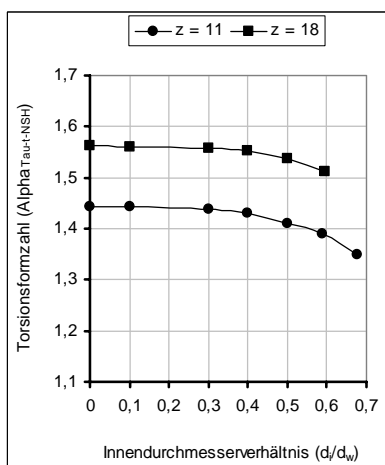
b) Torsionsformzahlen ausgewertet nach der GEH

Bild 3.19: Einfluss des Verhältnisses Verzahnungslänge zu Bezugsdurchmesser l_z/d_B auf die Formzahlen an der Zahnwelle W25x2x11 mit freiem Auslauf; $\phi = 0^\circ$ (siehe Abschnitt 4.2.2); Drehmomenteinleitung als Umfangskräfte auf dem ungestörten Wellenbereich



a) Torsionsformzahlen am freien Auslauf

b) Zug/Druckformzahlen am freien Auslauf



c) Torsionsformzahlen an Wellenabsatz

d) Zug/Druckformzahlen am Wellenabsatz

Bild 3.20: Einfluss des Innendurchmesser Verhältnisses d/d_w auf die Formzahlen nach der NSH an den Zahnwellen W25x2x11 ($d_w/d_{a1} = d/D = 0,775$) und W40x2x18 ($d_w/d_{a1} = d/D = 0,855$), $\phi = 30^\circ$ (siehe Abschnitt 4.2.2); $r_w/t_{a1} = 0,2$ und $r_{Absatz}/t_{a1} = 0,5$

Torsionsformzahlverläufe

Um die Fragen hinsichtlich der Auswirkung der geometrischen Position der Drehmomenteinleitung zu beantworten und möglichst exakte Ergebnisse zu erzielen, wurden zahlreiche FE-Berechnungen vorgenommen. Die verwendeten Geometrien für diese Berechnungen sind in der *Tabelle A-1* der *Anlage A* enthalten. Die den Modellen zu Grunde liegenden Orte der Lasteinleitung sind in *Bilder 3.15* und *3.17* ersichtlich.

Die auf den Blättern der *Anlage A* befindlichen **Bilder A-1** bis **A-6** zeigen die Torsionsformzahlverläufe (d.h. Vergleichsspannungsverläufe normiert auf die Nennspannungen) im Zahnfuß und im freien Auslauf für unterschiedliche Zahnwellengeometrien im Zusammenhang mit den geometrischen Drehmomenteinleitungsstellen und der Vergleichsspannungshypothese.

Ausgewertet wurden die erste Hauptspannung nach der NS-Hypothese sowie die Vergleichsspannung nach der GE-Hypothese. Die Formzahlverläufe sind über der Axialkoordinate x dargestellt. Die Axialkoordinate bezieht sich im Zahnfuß auf den Bezugsdurchmesser x/d_B und im freien Auslaufbereich auf den Wellendurchmesser x/d_w .

Die Vergleichsspannungen sind im Zahnfuß auf die Nennspannung im Ersatzquerschnitt und im freien Auslauf auf die Nennspannung im kleinsten Querschnitt bezogen. Für all die untersuchten Varianten ist die Nennspannung im Kerbgrund $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$ nach der NSH bezogen auf den Wellendurchmesser d_w berechnet. Die Umrechnung erfolgt für den Zahnfuß gemäß *Tabelle 3.10*, siehe **Abschnitt 3.5**.

Um den Spannungszustand einer durch den Krafteinleitungseinfluss ungestörten Torsionsbelastung im Zahnfuß der Zahnwellen zu erhalten, ist ein Mindestabstand von der Krafteinleitungsstelle zum Verzahnungsbeginn erforderlich, der mindestens dem Bezugshalbmesser $L_N = 0,5 \cdot d_B$ entspricht. Bei ausreichendem Abstand ca. $L_N/4$ von den Kraftangriffsstellen ist der lokale Einfluss ungleichmäßiger Spannungsverteilungen infolge örtlicher Krafteinleitungen abgeklungen und ein ungestörter Torsionsbereich liegt vor.

Die Auswertung der Formzahlverläufe im Zahnfuß erfolgt sowohl im belasteten als auch im lastfreien Zahnfußbereich (auf der Zug- und Druckseite) beginnend vom Verzahnungsübergang hin in Richtung des eingespannten Endes. Es ist zu erkennen, dass die Formzahlen im durch die Krafteinleitung ungestörten Zahnfußbereich sowohl für die Druckseite als auch für die Zugseite übereinstimmende Verläufe und identische Werte in Bezug auf die Zähnezahl zeigen. Hierzu kann ein Bezug zwischen der größten Normalhauptspannung σ_{v_NSH} und der Vergleichsspannung σ_{v_GEH} sowie zwischen den Torsionsformzahlen hergestellt werden.

Die Höhe der aufgetretenen Spannungsspitze bzw. die daraus resultierende Formzahl im Auslauf oder im ungestörten Zahnfuß ist von der Variation der Lasteinleitungsorte unabhängig, solange sich die geometrische Stelle der Lasteinleitung in ausreichender Entfernung vom Verzahnungsauslauf befindet. Für die die Nabenlage (0) beschreibende Lastposition sind die Formzahlen höher.

Im Unterschied zu GEH ergibt die Auswertung nach der NSH nicht nur eine Spannungsüberhöhung im Auslauf sondern auch im Zahnfuß in der Nähe vom Auslaufbeginn (**Bild 3.21**). Deshalb empfiehlt sich für eine genauere Berechnung der Formzahlen im Zahnfuß, die aufgetretenen Vergleichsspannungen nach der NSH und der GEH auszuwerten.

Hierbei ist die Lage der Torsions-Spannungsmaxima im freien Auslauf nach der GEH und der NSH, unabhängig von verwendeten Lastmodell unterschiedlich. Somit sind die Torsionsformzahlen nicht identisch.

Die größte Vergleichsspannung, die mit variierendem Abstand vom Verzahnungsauslaufbeginn konstant bleibt, tritt im „gestörten“ Zahnfußbereich unter der Angriffsstelle der Drehmomentaufbringung auf (Belastungskerbe). Eine Ermittlung der Formzahlen aus diesen Spannungsspitzen ist durch Fehler infolge des Naheinflusses der Belastung behaftet.

Die beliebige Variation der Lage der Belastungsmodelle hat im Bereich sehr kleiner Zähnezahlen $z < 11$ sehr geringen Einfluss auf die Formzahlen im Auslauf. Die Abweichung der Werte liegt unter 2 %. Der Einfluss der Belastungslage nimmt mit steigender Zähnezahl zu.

Die Formzahlen am Absatz bleiben durch die Variation der Lastmodelle sowie der Zähnezahlen auf Grund des ausreichenden Sicherheitskerbabstandes zum Auslauf unbeeinflusst.

Durch den Vergleich der Maximalwerte der Vergleichsspannungen infolge unterschiedlicher Drehmomenteinleitungsmodelle kann festgehalten werden, dass das Lastmodell „Drehmomenteinleitung in den freien Wellengrundkörper“ richtig ist und für weitere Untersuchungen eingesetzt werden könnte, siehe *Bilder A-1 bis A-6*.

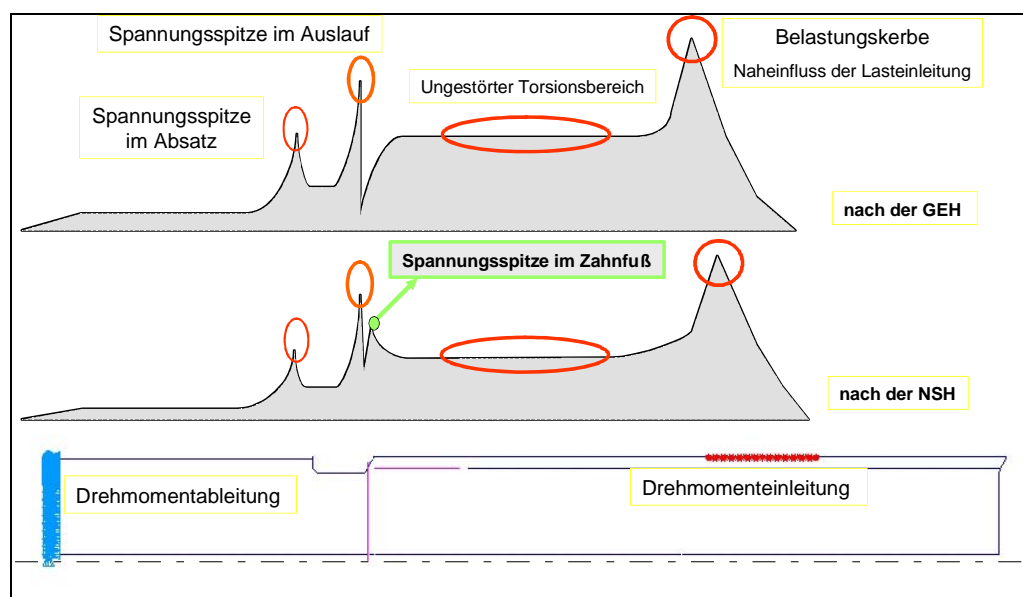


Bild 3.21: Grafische Darstellung der Vergleichsspannungsverläufe nach der NSH und der GEH

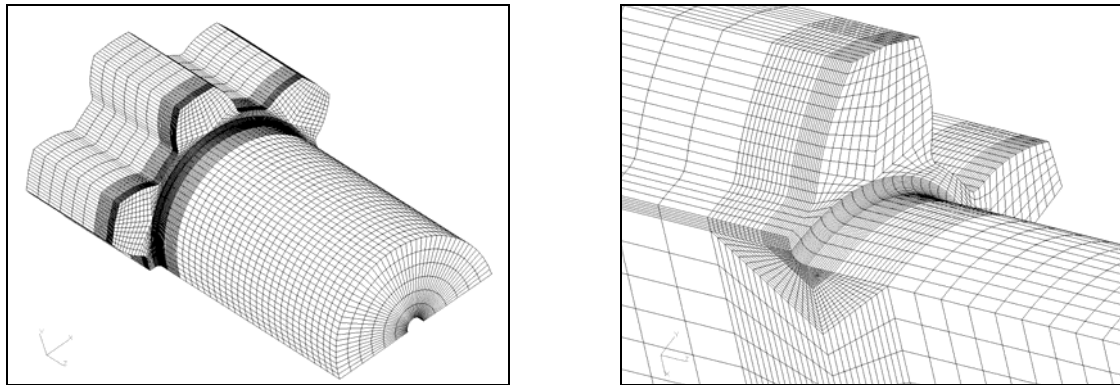
Die Untersuchungen zum Einfluss der Einspannung der entfernt vom Auslauf befindlichen Knotenpunkte der Zahnflanke unter Belastung der Zahnwelle durch Umfangskräfte am glatten Wellenende ergaben unrealistisch, sehr hohe Spannungswerte in der Fußausrundung infolge der gefesselten Flanke. Diese Fesselungsmöglichkeit der Modellknoten ist auszuschließen.

Weitere Ausführungen zur Thematik der Vergleichsspannungsverhältnisse aus der GEH und der NSH sowie zur Problematik der Lage der Spannungsmaxima erfolgen im **Abschnitt 4.3.3**.

Bild A-7 der Anlage A zeigt die Verteilung der Vergleichsspannung an einem Absatz im Vergleich zu einer Zahnwelle bei Torsion und Zug. **Bild A-8** gibt Aufschluss über den Ort der max. Vergleichsspannungen. In den **Bildern A-9 bis A-11** sind Vergleiche der Torsionsformzahlverläufe zwischen den Zahnwellen DIN 5480 W25x1,75x13 mit gebundenem und freiem Auslauf sowie mit und ohne SR-Nut, abhängig von Ort der Lasteinleitung dargestellt.

3.3.2 Simulation der biegebelasteten Zahnwellen

Zu Berechnungen der Belastungsarten Biegung oder Querkraftschub wird üblicherweise das FE-Halbmodell eingesetzt. Das Halbmodell beschreibt 180° der Zahnwelle und wird durch mehrere Zähne mit mindestens 16 Elementschichten in Umfangsrichtung je Zahn abgebildet (**Bild 3.22**). Dadurch entstehen in Verbindung mit den fein vernetzten Kerbbereichen sehr große, rechenintensive Gleichungssysteme. Deshalb benötigt die FE-Berechnung bei Biegung eine relativ hohe Rechenzeit und einen großen Speicherplatzbedarf.



a) FE-Halbmodell einer Zahnwelle

b) Feinvernetzung des freien Auslaufbereiches

Bild 3.22: FE-Netzgestaltung für ein Halbmodell einer Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6; Knotenanzahl: 99610 und Elementanzahl: 88850

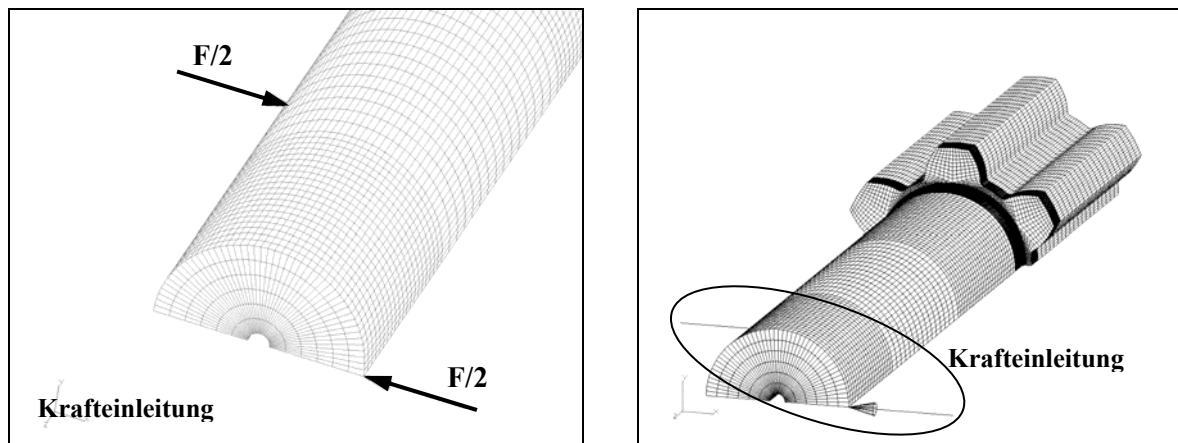
Der Einsatz eines Viertelmodells zur Berechnung der Biegebelastung ist auf Grund der zyklischen Symmetrie einer Zahnwelle bei der richtigen Auswahl von den Randbedingungen denkbar. Diese Simulationsmöglichkeit soll auch untersucht werden.

Variation der Krafteinleitung

Eine Biegebeanspruchung wird im Allgemeinen durch unterschiedliche Belastungsprinzipien entwickelt. Für die Einleitung eines reinen Biegemoments an Zahnwellen bestehen grundsätzlich vier Belastungsvarianten: Vier-Punkte-Biegung, Querträger-Biegung; Querkraft-Biegung und Drei-Punkte-Biegung.

Die vierte Variante zur Erzeugung einer Biegebeanspruchung beschreibt die Belastung der Welle durch eine in der Mitte angreifende Einzelkraft. Das größte Biegemoment tritt an der Angriffsstelle der Belastung auf. Die Querkraft zeigt an dieser Stelle einen Sprung. Diese Variante wurde auf Grund des durch den Querkraftverlauf gestörten Momentenverlaufs ausgeschlossen und nicht weiter betrachtet. Die anderen Hauptmöglichkeiten werden hier hinsichtlich des erzeugten Momentenverlaufs kurz beschrieben.

Vier-Punkte-Biegungsprinzip (**Bild 3.23**): Bei dieser Variante wird das Biegemoment so eingelegt, dass das FE-Modell der Welle symmetrisch zur Mitte durch zwei gleich große angreifenden Momenten bzw. Einzelkräfte an Hebelarmen belastet wird. Ein Teil des Kräfte- oder Momentenpaars kann durch die Lagerung der Welle erzeugt werden. Das Biegemoment bleibt zwischen den Kraftangriffspunkten konstant, die Querkraft ist in diesem Bereich gleich Null. In den Randfasern der Welle treten die größten Spannungen und Dehnungen auf.



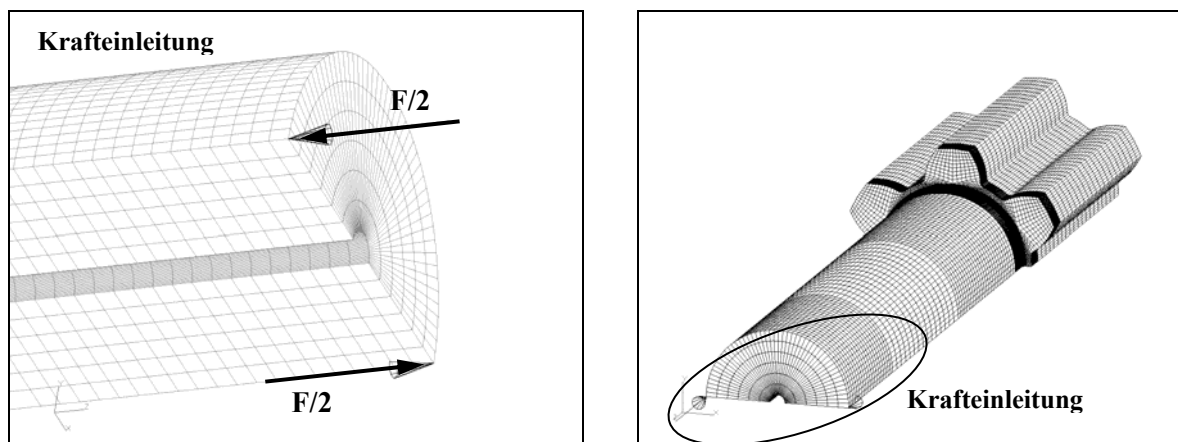
a) ein Ausschnitt des glatten Wellenbereiches

b) Vier-Punkte-Biegebelastung eines Halbmodells

Bild 3.23: Vier-Punkte-Biegemodell; Belastung der Zahnwelle mit je zwei Stellen der Lagerung und der Krafteinleitung

Querträger-Biegungsprinzip (Bild 3.24): Die zweite Möglichkeit ergibt sich aus der Berechnung eines Biegebalkens mit Biegemoment oder mit Querträger und zwei in entgegengesetzter Richtung angreifenden Kräften am freien Wellenende gegenüber der Einspannungsstelle. Dadurch wird eine reine querkraftfreie Biegung hervorgerufen.

Bei querkraftfreier Biegung (Querträger- oder Vierpunkte-Biegung) wirken nur Normalspannungen. Alle Punkte eines Querschnittes erfahren die selbe Verschiebung in z-Richtung. Die Schubspannungen sind an der Berechnungsstelle Null.

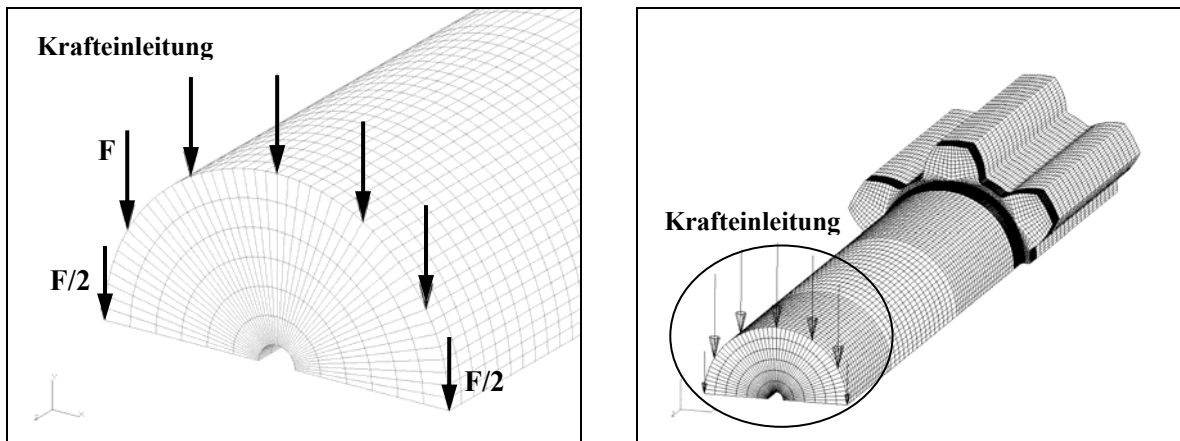


a) ein Ausschnitt des glatten Wellenbereiches

b) Querträger-Biegebelastung eines Halbmodells

Bild 3.24: Querträger-Biegemodell; Belastung der Zahnwelle mit Biegemoment bzw. mit Querträger und entgegengesetzt angreifender Kraft

Querkraft-Biegungsprinzip (Bild 3.25): Diese Möglichkeit beschreibt die Erzeugung der Biebeanspruchung durch die Belastung der Zahnwelle mit Querkraften in radialer Richtung. Diese wirken gleichmäßig verteilt über dem Umfang des glatten Wellenbereichs mit genügender Entfernung vom Kerbgrund. Der Begriff Querkraftbiegung beinhaltet hierbei zusammenfassend Biegung und Schub, welche sich jedoch in ihren Wirkungen auf die Welle überlagern. Hierbei ist durch exemplarische FE-Berechnungen die Länge des Hebelarmes (Entfernung zwischen Belastung und Kerbgrund) genau zu bestimmen und den Einfluss der Querkraft auf die maximale Biegespannung zu untersuchen. Im **Abschnitt 3.3.3** wird auf diese Probleme ausführlicher eingegangen.



a) ein Ausschnitt des glatten Wellenbereiches

b) Querkraft-Biegebelastung eines Halbmodells

Bild 3.25: Querkraft-Biegemodell; Belastung der Zahnwelle mit Querkraften in radialer Richtung; mit genügender Entfernung von der Kerbe

Definition der Einspannbedingungen

Findet das räumliche FE-Halbmodell bei der Berechnung der Biegung Verwendung, so sind die Knotenpunkte auf der Einspannebene (Halbquerschnittsfläche bzw. Stirnfläche) in den x-, y- und z-Achsrichtungen zu fesseln (**Bild 3.26**). Um eine symmetrische Verformung zu erreichen, werden zusätzlich die auf der Symmetrieebene des Halbmodells liegenden Knotenpunkte in Abhängigkeit von der Lasteinleitungsmethode sowie von der Position der Symmetrieebene im Raum bezüglich des kartesischen Koordinatensystems eingespannt.

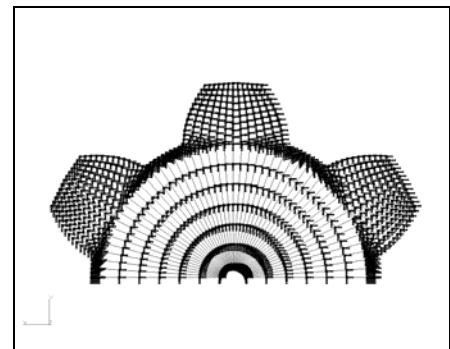
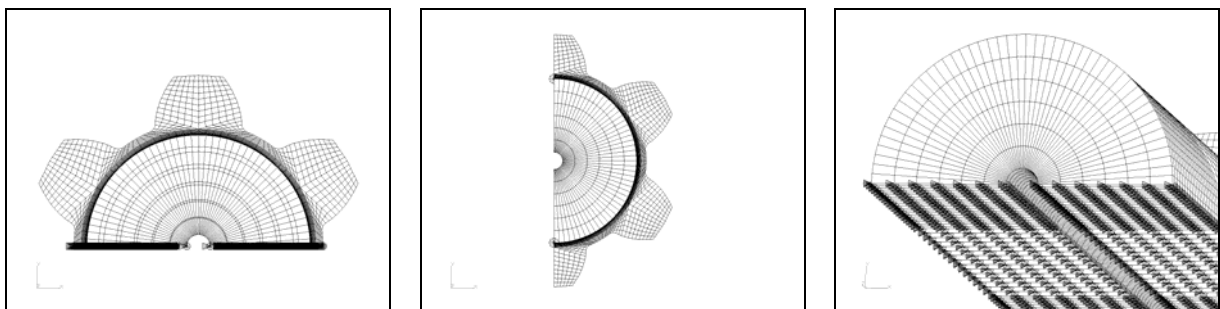


Bild 3.26: Fesselung der Knotenpunkte auf der Einspannebene

Befindet sich die Symmetrieffläche in der x-z-Ebene (**Bild 3.27-a**), so gelten folgende Randbedingungen für ein Halbmodell: Während bei der Querträger- oder Vierpunkte-Biegung die Einspannung der Knoten der Symmetrieebene nur in der y-Achsrichtung erfolgt, sind sie bei der Querkraftbiegung in der z-Richtung bzw. in den axialen und tangentialen Richtungen festzulegen. Eine Fesselung der Knotenpunkte in der y-Achsrichtung blockiert bei diesem Lastmodell die Entwicklung der Spannungen. Weitere Einspannvariationen verfälschen die Ergebnisse bzw. führen zu keiner Spannungsausbildung.



a) Lage der Symmetrieffläche in der x-z-Ebene

b) Lage der Symmetrieffläche in der y-z-Ebene

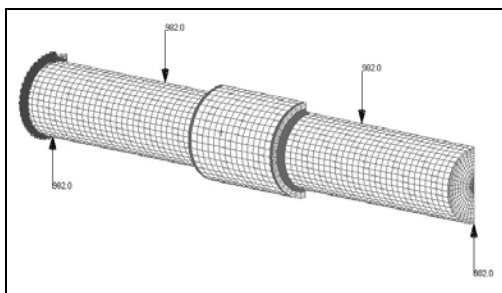
c) Fesselung der Knotenpunkte an der Symmetrieebene

Bild 3.27: Festlegung der Einspannbedingungen zur Simulation der Biegebeanspruchung für ein Halbmodell

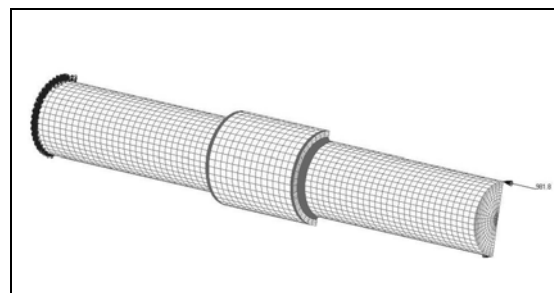
Liegt die Symmetrieffläche des Halbmodells parallel zur y-z-Ebene (*Bild 3.27-b*), so können ihre Knotenpunkte in jeder beliebigen Achsrichtung unabhängig vom Biegebelastungsmodell (Querträger-, Vierpunkte- oder Querkraft-Biegeprinzip) eingespannt werden.

In **Bild 3.28** sind die Spannungsverteilung und die Formzahlen bei Vier-Punkte-Biegung und Querträger-Biegung am Beispiel einer abgesetzten Welle dargestellt.

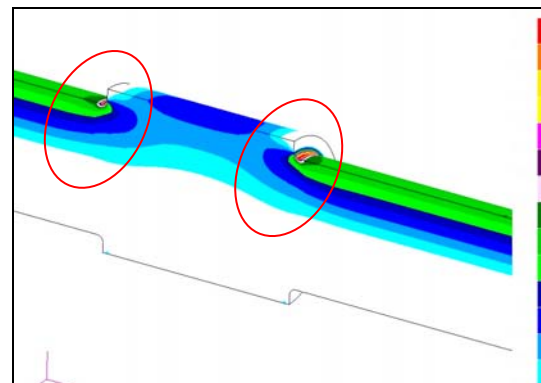
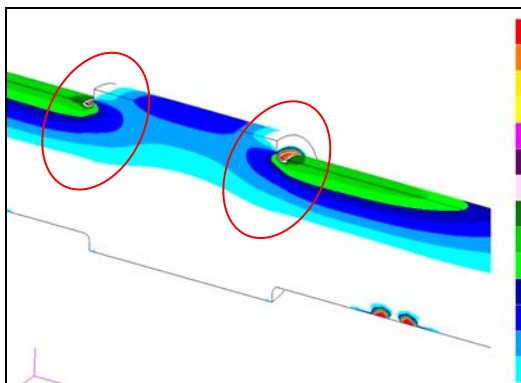
Es treten in der einen Randfaser Zug- und gegenüberliegend Druckspannungen auf, die mit Abstand von der neutralen Faser zunehmen, so dass die höchsten Spannungen am Rand vorliegen. Nach beiden Methoden der Aufbringung des Biegemoments sind das Spannungsverhalten sowie die Größe der Biegeformzahl identisch.



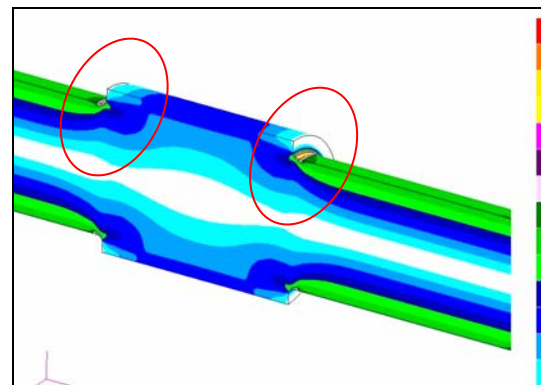
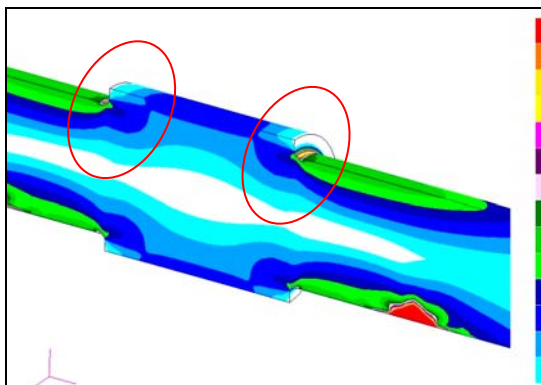
a) Vier-Punkte-Biegemodell



b) Querträger-Biegemodell



c) Vergleichsspannungsverteilung nach der **NS-Hypothese** ($\alpha_{\sigma b-NSH} = 2,17$)

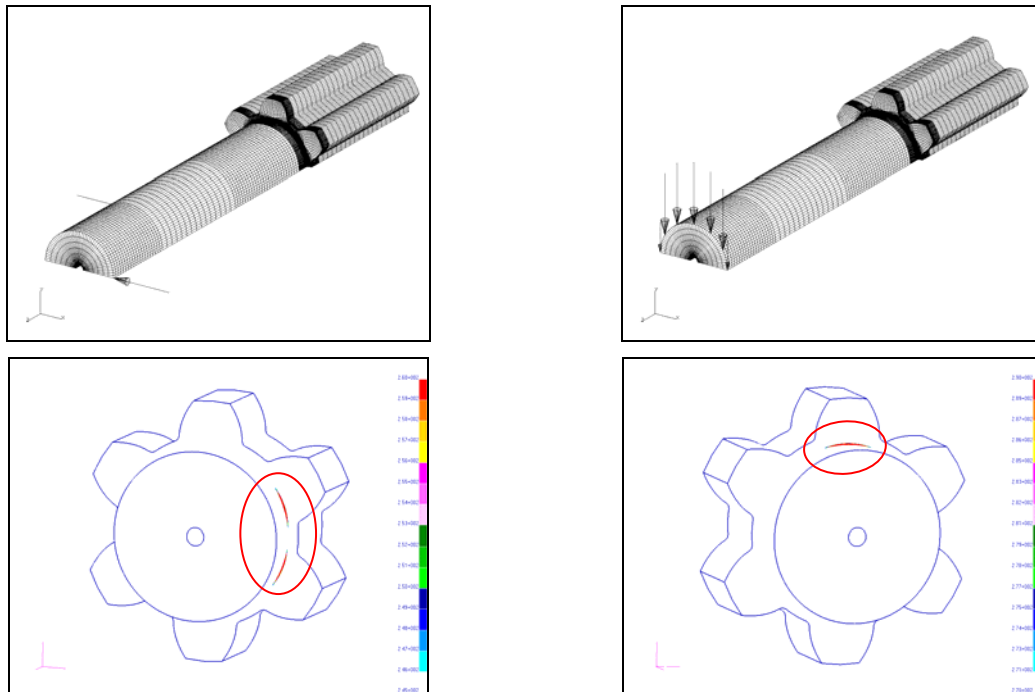


d) Vergleichsspannungsverteilung nach der **GE-Hypothese** ($\alpha_{\sigma b-GEH} = 1,895$)

Bild 3.28: Spannungsverteilung in einer Welle mit Absatz ($d/D = 0,8$ und $r/t = 0,4$) bei Biegebelastung

Krafteinleitungsprobleme

Biegebeanspruchung ist abhängig von Größe, Form und Lage der Querschnittsfläche. Geringer Widerstand gegen Biegung ergibt große Durchbiegung und umgekehrt. Darüber hinaus ist zur Sicherstellung der Vergleichbarkeit der FE-Ergebnisse der Biegebelastung darauf zu achten, dass sich einheitlich ein Zahn bzw. eine Zahnücke in Kraftrichtung (**Bild 3.29**) befindet.



a) Zahnücke in Kraftrichtung bei Vierpunkte-Biegung **b)** Vollzahn in Kraftrichtung bei Querkraft-Biegung

Bild 3.29: Ein in der Kraftrichtung liegendes Formelement

Es wurden exemplarische Berechnungen an der Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6 mit freiem Auslauf realisiert, um die Einflüsse der Existenz einer Zahnücke bzw. eines Vollzahn in Kraftrichtung auf den Wert der Formzahl bei Biegung zu beurteilen. In der **Tabelle 3.1** sind die Formzahlen wiedergegeben. Der Ort der max. Spannung liegt im Auslaufbereich, z.B. in der Wellenzahnmitte (**Bild 3.29-b**) und ist nach der NSH und der GEH identisch.

Tabelle 3.1: Ermittlung der Formzahlen bei Biegung für die Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6 mit freiem Auslauf in Abhängigkeit vom Biegebelastungsmodell und vom in Kraftrichtung liegenden Formelement (Zahn bzw. Zahnücke). Kerbparameter: $d_w = 9,49 \text{ mm}$; $d_{h1} = 11,73 \text{ mm}$; $r_w = 0,255 \text{ mm}$; $r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$; $l_w \approx 3 \cdot d_w$ und $\sigma_{b-nenn-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$ sind für alle dargestellten Modelle konstant

Biegemodell	Vier-Punkte-Biegung	Querträger-Biegung	Querkraft-Biegung	Prozentuale Abweichung
Formelement	Zahnücke in Kraftrichtung			
$\alpha_{\sigma b-NSH-dw}$	2,74	2,74	2,80	2,2 %
$\alpha_{\sigma b-GEH-dw}$	2,39	2,39	2,45	2,5 %
Formelement	Vollzahn in Kraftrichtung			
$\alpha_{\sigma b-NSH-dw}$	2,88	2,88	3,11	8,0 %
$\alpha_{\sigma b-GEH-dw}$	2,61	2,61	2,72	4,2 %

Die Biege-Formzahl ist nicht nur vom verwendeten Lastmodell abhängig, sondern auch vom in Kraftrichtung vorhandenen Formelement Zahn oder Zahnücke bei sonst gleichen Parametern auf Grund der Änderung des Trägheitsmomentes. Bei einem Vollzahn in Kraftrichtung erhöht sich die Formzahl. Analog dazu verringert sie sich bei einer Zahnücke.

In den **Bildern B-1 bis B-3** der **Anlage B** im Anhang sind die Vergleichsspannungsverteilungen nach der NSH und der GEH ausgehend vom Ort der Spannungskonzentration an räumlichen Modellen der Zahnwelle den Verläufen beim Absatz je Biegeprinzip gegenübergestellt.

Die Voruntersuchungen zeigten, dass die Verwendung eines Halbmodells zur Beurteilung der Kerbspannung völlig ausreichend ist. Die Maximalwerte der Vergleichsspannungen nach der NSH und der GEH sind für die Vierpunkte- und Querträger-Biegung identisch. Die sich durch Querkraftbiegung ergebende Formzahl ist deutlich größer als die ermittelte Formzahl durch andere Biegemodelle.

Zusatzuntersuchungen zur Variation der Verzahnungslänge ergaben, dass die Verkürzung bzw. der Verlängerung der Verzahnungsbreite bei konstanter Hebelarmlänge zwischen Kerbe und Krafteinleitung keinen Einfluss auf die Biegeformzahl hat. Die Mindestlänge der Verzahnung darf aber auf Grund des Einspannungsnaheinflusses nicht kleiner als $0,25 \cdot d_B$ sein.

Weiterhin ruft die Einleitung der Biegekräfte (bei Querkraftbiegung) konzentriert in der Mitte des Wellenquerschnitts oder verteilt über den Querschnittsumfang in radialer Richtung keine Änderungen in den maximalen Kerbspannungen hervor.

Simulationsmöglichkeit der Biegung mit einem 90°-Modellsektor

Da die Biegebeanspruchung infolge der hohen Zähnezahl quasi achsensymmetrisch ist, würde es ausreichen, einen Viertel des gesamten Wellenquerschnittes für die FE-Berechnungen zu verwenden.

Es wird hier auf diese Möglichkeit eingegangen, ob die Biegebelastung unter Verwendung eines Sektormodells mit 90° berechnet werden kann (**Bild 3.30**). Dadurch lassen sich der erforderliche Zeitbedarf und der Aufwand bei der Erstellung und Berechnung des FE-Halbmodells erheblich reduzieren.

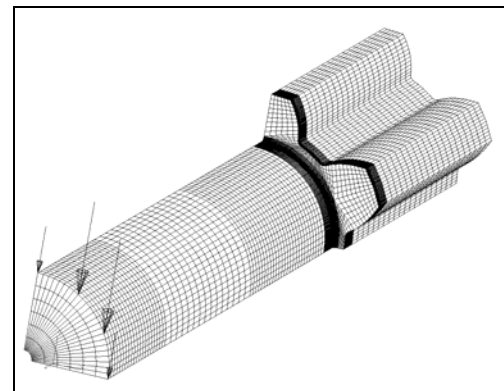


Bild 3.30: FE-Viertelmodell für eine Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6

Deshalb wurden exemplarische FE-Untersuchungen an Voll-, Halb- und Viertelmodellen von Zahnwellen (W15x2x6 mit $r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$) sowie (W40x2x18 mit $r_w/t_{a1} = 0,3$ und $d_w/d_{a1} = 0,85$) und Wellenabsatz ($r/t = 0,4$ und $d/D = 0,8$) unter Biegung bearbeitet und die Ergebnisse miteinander verglichen. Dabei wurden die erforderlichen Randbedingungen so weit variiert und ihre Einflüsse auf die Spannungswerte und -verläufe beurteilt, bis möglichst minimale Abweichungswerte erzielt werden konnten.

Als Bezugswert für die Überprüfung der Richtigkeit der Randbedingungen bei Zahnwellen wurde der Wellenabsatz herangezogen. Für die Erzeugung reiner Biegespannung an einem Viertelmodell erweist sich die folgende in **Bild 3.31** dargestellte Definition am günstigsten.

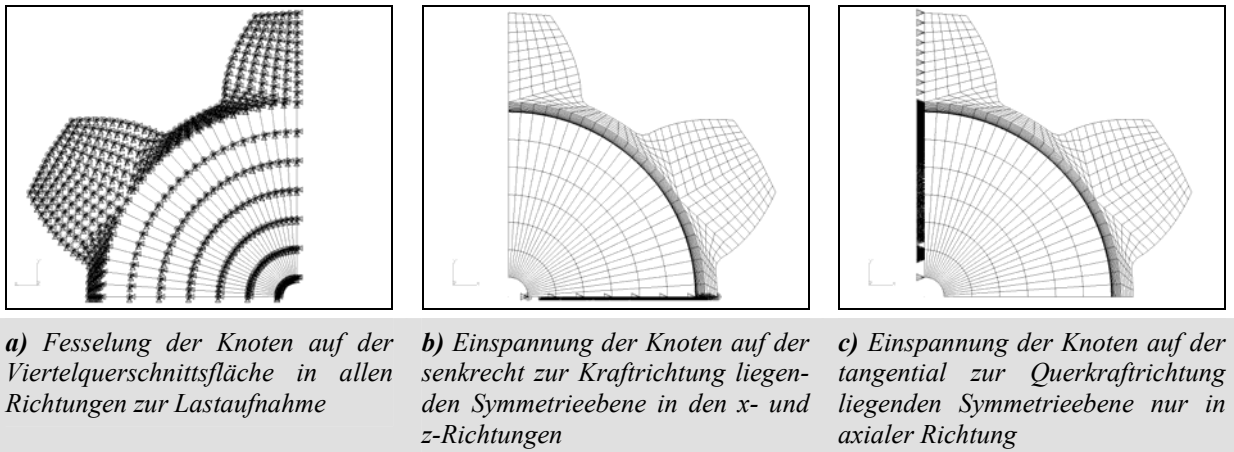


Bild 3.31: Festlegung der Randbedingungen bei der Querkraft-Biegung eines FE-Viertelmodells

Andere Einspannvariationen verfälschen die FE-Ergebnisse oder blockieren die Spannungsentwicklung. Die Formzahlwerte der untersuchten Kerbformen sind in **Tabelle 3.2** aufgelistet.

Tabelle 3.2: Vergleich der Formzahlen bei Biegung eines Sektormodells mit 90° ; $\sigma_{b-nenn-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$ je Biegemodell; Hebelarmlänge ca. $l_w \approx 3 \cdot d_w$

	FEM-Vollmodell			FEM-Halbmodell			FEM-Viertelmodell		
	z = 6	z = 18	Absatz	z = 6	z = 18	Absatz	z = 6	z = 18	Absatz
Biege-Formzahl $\alpha_{\sigma b}$ durch Querkraftbiegung									
$\alpha_{\sigma b-GEH-dw}$	2,71	2,23	1,92	2,72	2,23	1,91	2,68	2,21	1,91
$\alpha_{\sigma b-NSH-dw}$	3,11	2,42	2,19	3,11	2,42	2,18	2,97	2,40	2,18
Biege-Formzahl $\alpha_{\sigma b}$ durch Querträger- oder Vier-Punkte-Biegung									
$\alpha_{\sigma b-GEH-dw}$	2,39	2,17	1,89	2,39	2,17	1,895	Unrealisierbar		
$\alpha_{\sigma b-NSH-dw}$	2,74	2,42	2,16	2,74	2,42	2,17			

Das **Bild B-4** der *Anlage B* kann zumindest zur Entscheidungsfindung über die Möglichkeit zur Durchführung einer FE-Analyse für die Untersuchung der Querkraftbiegung eines Viertelmodells dienen. **Bild B-5** zeigt das Verformungsverhalten der Zahnwelle.

Die Verwendbarkeit des Viertelmodells mit geraden Zähnezahlen konnte nur für die Berechnung der Querkraftbiegung unter bestimmten Einspannbedingungen anhand eines Vergleiches mit Viertelwellenabsatz nachgewiesen werden. Die Abweichung der Biegeformzahl des Viertelmodells von der eines Halbmodells ist geringfügig und beträgt ca. 4,5 %.

Für die Querträger- und Vierpunkte-Biegung ergaben sich Widersprüche hinsichtlich der Randbedingungen. Dafür wird grundsätzlich ein Halbmodell benötigt. Ebenfalls hat sich die Verwendung eines Wellensegmentes mit einem einzigen Vollzahn bzw. einer Zahnücke zur Berechnung der Biegung als unrealisierbar herausgestellt.

Während die Einsatzmöglichkeit eines Wellenabsatz-Viertelmodells bei der Querkraftbiegung problemlos realisierbar ist, ist dies bei Zahnwellen insbesondere mit kleinen und ungeraden Zähnezahlen $z < 11$ problematisch. Dazu kommt auch der Einfluss des in Krafrichtung vorhandenen Formelementes (Zahn oder Zahnücke). Die Anwendung von Viertelmodellen setzt

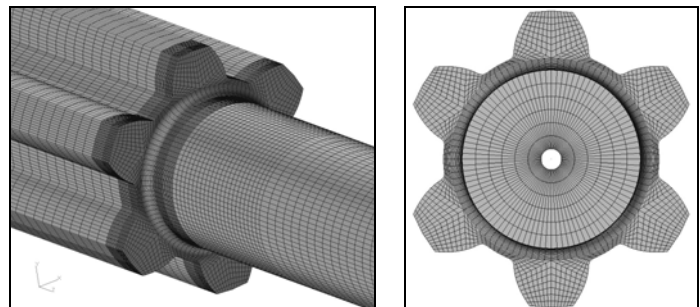
voraus, dass eine gerade Zähnezahl im Modellsektor vorhanden ist, d.h. aus dem Verhältnis $z/4$ muss eine gerade Zahl ergeben (z.B. $11/4$ ist nicht ganzzahlig). Bei ungerader Zähnezahl kann das Viertelmodell nicht abgebildet werden.

Obwohl der Verwendung eines Viertelmodells zur Berechnung der Biegung bedingt möglich ist, wird es aber bei dieser Arbeit nicht mehr eingesetzt. Die Biegespannung wird nur mit dem FE-Halbmodell weiter untersucht.

Simulation Zahnwellen bei zusammengesetzter Belastung

Die höchste Rechenzeit bei FE-Rechnungen benötigen die Vollmodelle, da sie die gesamte Form der Zahnwelle nachbilden (**Bild 3.32**).

Die Verwendung von Vollmodellen ist vorteilhaft, da sie die Realität besser widerspiegeln, d.h. es werden nur die Knoten an der Einspannungsstelle der Zahnwelle in allen Richtungen gefesselt, da die Position der Welle erhalten bleiben muss.



In **Tabelle 3.3** sind die Zusammenhänge zusammengestellt.

Bild 3.32: FE-Netzgestaltung für ein Vollmodell der Zahnwelle W15x2x6 mit freiem Auslauf

Tabelle 3.3: Gestalt des FE-Modells nach der Art der Belastung

Art der Belastung	Zug/Druck & Torsion	Biegung & Querkraftschub	Zusammengesetzte Belastungen
FE-Modell von rotations-symmetrischen Bauteilen (Absatz & Zahnwellen)	Modellsegment mit $360^\circ/z$	Halbmodell mit 180°	Vollmodell mit 360°

Anmerkung

Für weitere Untersuchungen zur Formzahlbestimmung werden hauptsächlich:

- das „Flächenpressungsmodell“ zur Berechnung der Torsionsformzahl und
- das „Querträger-Biegemodell“ zur Berechnung der querkraftfreien Biegeformzahl

eingesetzt.

3.3.3 Untersuchungen zur Querkraftbiegung

Wird eine Zahnwelle einer Querkraft-Biegebelastung unterworfen, so tritt neben der vorhandenen Biegespannung im Kerbgrund ein Schubspannungsanteil auf. Querkraftbiegung ist also stets von Schubeinfluss begleitet. Die Höhe der Biegespannung ist hierbei grundlegend vom geometrischen Ort der Querkrafteinleitung bzw. vom vorhandenen Hebelarm abhängig. Bei kleinen Hebelarmen überwiegt die Schubbeanspruchung und es tritt bei der FE-Berechnung die Problematik des Naheinflusses auf. Bei größeren Hebelarmen überwiegt die Biegebeanspruchung, der Einfluss der Querkraft verkleinert sich. Da im Allgemeinen nur die Formzahlen für reine Beanspruchungen (z.B. querkraftfreie Biegung) für den Tragfähigkeitsnachweis verwendet werden, ist es an dieser Stelle notwendig, eine isolierte Analyse der Biegung vorzunehmen, um den zur Erzeugung eines reinen Biegemomentes benötigten Hebelarm l_w einzuschätzen und die Einflussnahme der Schubspannung zu untersuchen. Darum wurden exemplarische Berechnungen an zwei Geometrien (W40x2x18 mit $r_w/t_{a1} = 0,3$ und $d_w/d_{a1} = 0,85$) sowie (W15x2x6 mit $r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$, $\phi = 0^\circ$) durchgeführt.

Bestimmung der notwendigen Hebelarmlänge bei Querkraftbiegung

Die geometrische Position dieser Hebelarmlänge l_w kann in Abhängigkeit vom Wellendurchmesser d_w so variiert werden, dass nur die reine Biegung festzustellen ist. Die Ergebnisse ergaben, dass eine Mindesthebelarmlänge zwischen der Position der Krafteinleitung und dem Auslauf von ca. $l_w \approx 2,5 \cdot d_w$ bei Zahnwellen mit freiem Auslauf (und ca. $l_w \approx 3 \cdot d_B$ bei Zahnwellen mit gebundenem Auslauf) vorhanden sein muss, siehe **Bild 3.33**.

Unter der bezogenen Formzahl wird das Verhältnis zwischen der querkraftbehafteten Biegeformzahl $\alpha_{\sigma b(Fq, Mb)}$ und der Formzahl der querkraftfreien Biegung $\alpha_{\sigma b}$ verstanden.

Ab einem Verhältnis $l_w/d_w \approx 2,5$ sind die Naheinflüsse der Krafteinleitung und der Schubspannung auf die Spannungsüberhöhung an der Kerbe minimal (**Bild 3.34**). Dadurch wird die Formzahl der reinen querkraftfreien Biegung erreicht. Je näher die Einleitung der Querkraft an der Kerbe ist, um so stärker steigt die Formzahl abhängig von der Kerbgeometrie an.

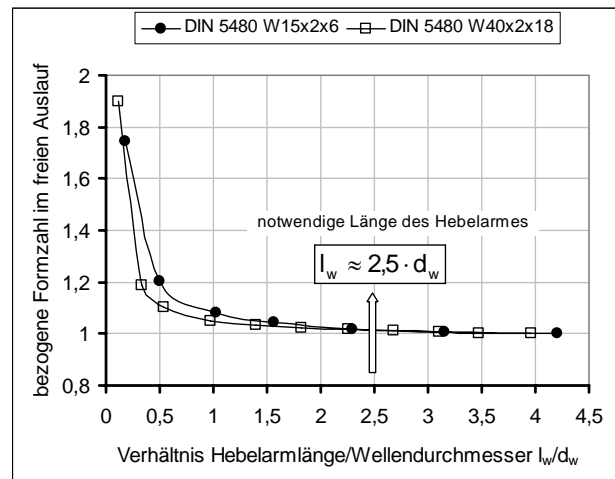


Bild 3.33: Abhängigkeit der bezogenen Formzahl im freien Auslauf vom geometrischen Verhältnis l_w/d_w

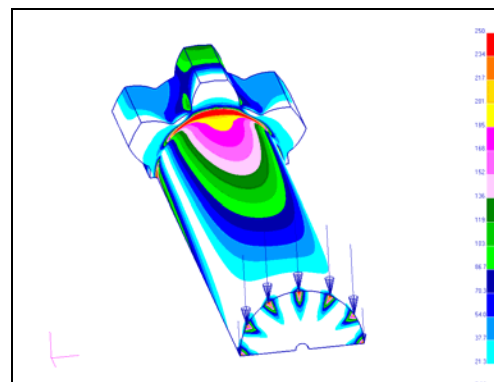


Bild 3.34: Spannungsverteilung bei Querkraftbiegung der Zahnwelle W15x2x6 bei einer Hebelarmlänge von ca. $l_w = 2,5 \cdot d_w$

Z.B. bei einem Verhältnis $l_w/d_w = 0,5$ erhöht sich die Formzahl im freien Auslauf um ca. 10 % für die Zahnwelle W40x2x18 und um ca. 20 % für die Zahnwelle W15x2x6, siehe **Bild 3.33**.

Einfluss der Querkraft auf die maximalen Biegespannungen

Ausgehend vom Verhältnis zwischen Schub- und Biegespannung $\tau_{m-nenn}/\sigma_{b-nenn}$ kann der qualitative Querkrafteinfluss auf die maximale Biegespannung eingeschätzt werden.

In Anlehnung an *Melzer /Mel100/* wird ein Modell verwendet (**Bild 3.35**), welches nur als eine grobe Tendenz zur Bewertung von Biegeformzahlen bei gleichzeitigem Querkraftschub zu bezeichnen ist. Die Querkraft erzeugt eine mittlere Schubspannung und eine Biegespannung im Kerbgrund.

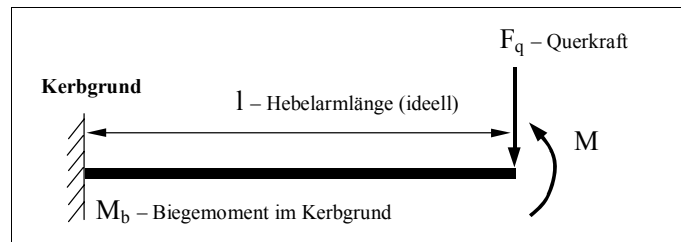


Bild 3.35: Rechnerisches Modell einer Welle für ein variables Verhältnis $\tau_{m-nenn}/\sigma_{b-nenn}$ nach */Mel100/*

Durch die große Hebelarmlänge wird aber diese Biegespannung sehr hoch. Daher erfolgt die Einleitung des Momentes M und damit reiner Biegung zur Kompensation. Es werden Querkraftbiegung und Querträgerbiegung zu einer Biegenennspannung σ_{b-nenn} im Kerbgrund überlagert. Dadurch ist es möglich, beliebige Verhältnisse $\tau_{m-nenn}/\sigma_{b-nenn}$ ohne störenden Naheinfluss zu ermitteln.

Bei der Untersuchung wurden zwei Fälle behandelt. Zum einen wurde der Querkrafteinfluss bei einem veränderlichen Verhältnis l_w/d_w und zum anderen bei einem Verhältnis $l_w/d_w = 3$ (bei idealisierter Krafteinleitung) analysiert.

In den **Tabellen B-1** und **B-2** der *Anlage B* sind die ermittelten max. Spannungen (Haupt- und Vergleichsspannung) in Abhängigkeit der vorgegebenen Verhältnisse von $\tau_{m-nenn}/\sigma_{b-nenn}$ aufgelistet. Ebenfalls mit dargestellt sind die Formzahlen der Biegung, sowie die auf querkraftfreie Biegung bezogenen Formzahlen. Die prozentualen Werte veranschaulichen die Anstiege dieser Formzahlen, ebenfalls bezogen auf die Biegung ohne Querkraft.

Die ermittelten Formzahlen der Biegung und die auf querkraftfreie Biegung bezogenen Formzahlen für den freien Auslaufbereich der Zahnwelle W15x2x6 bei einem konstanten Verhältnis $l_w/d_w = 3$ sind über dem Verhältnis $\tau_{m-nenn}/\sigma_{b-nenn}$ in **Bild 3.36** dargestellt. Wiederum andererseits verdeutlicht **Bild 3.37** die Darstellung der Formzahlen für W15x2x6 und W40x2x18, jedoch bei einem veränderlichen Verhältnis l_w/d_w .

Für die entstandenen Kurven der bezogenen Spannungsformzahlen wurden angenäherte Ausgleichsfunktionen zur Formzahlermittlung im freien Auslauf gesucht, die in den Bildern mit visualisiert sind. In die Näherungsfunktion werden das Verhältnis $\tau_{m-nenn}/\sigma_{b-nenn}$ und die Formzahl der querkraftfreien Biegung bezogen auf den Wellendurchmesser d_w eingesetzt.

Dabei gilt die Gleichung (3.4) zur Berechnung der bezogenen Formzahl im freien Auslauf der Zahnwelle W15x2x6 bei einem konstanten Verhältnis $l_w/d_w = 3$ und unter Berücksichtigung der im **Bild 3.36** beschriebenen Kerbgeometrie. Bei der Variation des Verhältnisses l_w/d_w gelten die Gleichungen (3.5) für die Geometrie W15x2x6 und (3.6) für die Geometrie W40x2x18. Dabei müssen die im **Bild 3.37** beschriebenen Kerbgeometrien und Bedingungen beachtet werden. Für alle Fälle gilt hier die Näherungsbeziehung (3.7).

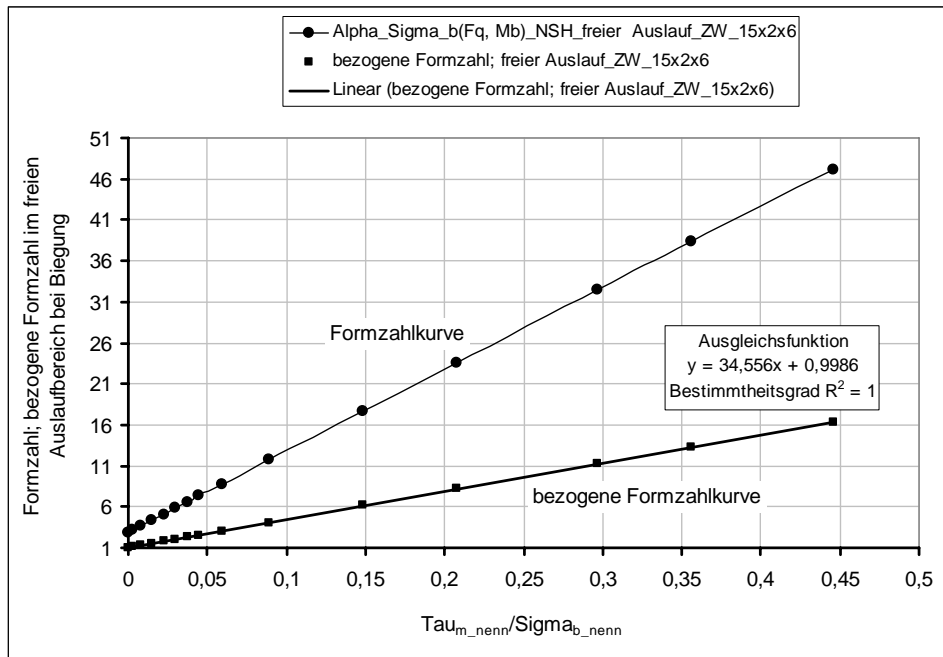


Bild 3.36: Einfluss der Querkraft auf die max. Biegespannung bzw. auf die Formzahl im freien Auslauf der Zahnwelle nach **DIN 5480 W15x2x6** ($d_w/d_{a1} = 0,65$; $r_w/t_{a1} = 0,1$; $d_w = 9,49$ mm; $d_i = 1$ mm; $x_1 = 0,2$ und $d_{h1} = 11,73$ mm). **Bedingung:** $l_w/d_w = \text{const.} = 3$; $\sigma_{b-nenn-dw} = \text{const.} = 100$ N/mm² und $\tau_{m-nenn-dw} = \text{veränderlich}$. Formzahl der querkraftfreien Biegung $\alpha_{ob_NSH} = 2,88$

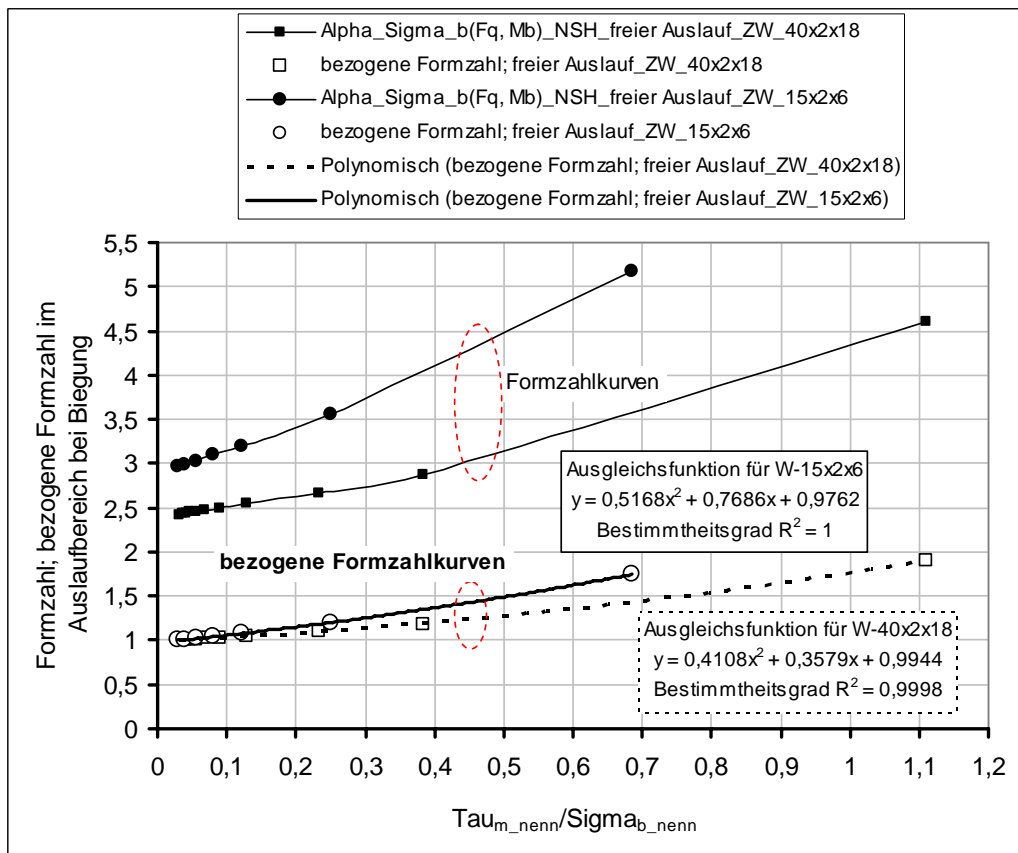


Bild 3.37: Einfluss der Querkraft auf die max. Biegespannung bzw. auf die Formzahl im freien Auslauf der Zahnwellen **W15x2x6** ($d_w/d_{a1} = 0,65$; $r_w/t_{a1} = 0,1$) und **W40x2x18** ($d_w/d_{a1} = 0,85$; $r_w/t_{a1} = 0,3$). **Bedingung:** $l_w/d_w = \text{veränderlich} = 0,05$ bis 4 ; $\sigma_{b-nenn-dw} = \text{veränderlich}$; $\tau_{m-nenn-dw} = \text{const.} = 3$ N/mm² für W15x2x6 und $\tau_{m-nenn-dw} = \text{const.} = 3,17$ N/mm² für W40x2x18

$$\alpha_{\sigma_b(F_q, M_b)_{NSH} z=6} = \left[34,56 \cdot \left(\frac{\tau_{m_nenn}}{\sigma_{b_nenn}} \right) + 1 \right] \cdot \alpha_{\sigma_b_{NSH}} \quad (3.4)$$

$$\alpha_{\sigma_b(F_q, M_b)_{NSH} z=6} = \left[0,52 \cdot \left(\frac{\tau_{m_nenn}}{\sigma_{b_nenn}} \right)^2 + 0,77 \cdot \left(\frac{\tau_{m_nenn}}{\sigma_{b_nenn}} \right) + 1 \right] \cdot \alpha_{\sigma_b_{NSH}} \quad (3.5)$$

$$\alpha_{\sigma_b(F_q, M_b)_{NSH} z=18} = \left[0,41 \cdot \left(\frac{\tau_{m_nenn}}{\sigma_{b_nenn}} \right)^2 + 0,36 \cdot \left(\frac{\tau_{m_nenn}}{\sigma_{b_nenn}} \right) + 1 \right] \cdot \alpha_{\sigma_b_{NSH}} \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha_{\sigma_b(F_q, M_b)_{GEH}}}{\alpha_{\sigma_b(F_q, M_b)_{NSH}}} \approx 0,90..0,92 \quad (3.7)$$

Bei der Geometrie W15x2x6 handelt es sich um eine Kerbe mit einem kleineren Kerbradius $r_w = 0,255$ mm. Dazu kommt auch der Einfluss durch die kleine Zähnezahl. Hingegen ist die Auslaufkerbe bei der Zahnwelle W40x2x18 durch einen mittleren Radius $r_w = 0,87$ mm gekennzeichnet. Daher ist die Formzahl der querkraftfreien Biegung hier kleiner als bei der Geometrie W15x2x6. Der Querkrafteinfluss auf die Formzahl ist ebenfalls kleiner zu erkennen.

Je größer das Verhältnis $\tau_{m_nenn}/\sigma_{b_nenn}$ bei konstanter Biege-Nennspannung und ideeller Hebelarmlänge $l_w/d_w = 3$ wird, desto höher wird die Formzahl der Biegung. Beispielsweise erhöht sie sich für die Verhältnisse $\tau_{m_nenn}/\sigma_{b_nenn} = 0,06$ und $l_w/d_w = 3$ um ca. 200 % (Tab. B-1). Die Formzahl steigt mit kürzer werdender Hebelarmlänge.

Die Querkraft hat einen eindeutigen Einfluss auf die Zunahme der Maximalwerte der Biegespannung im Vergleich zur querkraftfreien Biegung. Dabei werden die Formzahlen nicht nur von den Verhältnissen $\tau_{m_nenn}/\sigma_{b_nenn}$ und l_w/d_w beeinflusst, sondern auch stark von der Kerbgeometrie und der Kerbform. Die Erfassung sämtlicher wesentlicher Kerbformen würde weitere umfangreiche Untersuchungen erfordern.

Da der Einsatz des Querkraft-Biegemodells zur Erzeugung der Biegebeanspruchung mit Problemen verbunden ist, wird das Querträger-Biegemodell für weitere Berechnungen verwendet.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass die maximale Biegespannung infolge der Querkraftbiegung bei Zahnwellen mit gebundenem Auslauf auf der Kopfflanke direkt an der Einspannebene auftritt. Somit besteht ein Naheinfluss auf Grund der Einspannung. Außerdem ist das durch die Querkraftbiegung erzeugende Biegemoment veränderlich, welches bei der Definition der zur Beschreibung der Formzahl benötigten Biege-Nennspannung zu Schwierigkeiten führt. Weiterhin verursacht die Querkraftbiegung Schubspannungen in Quer- und Längsschnitten. Um die Schubspannung zu vermeiden, muss die Länge des ideellen Hebelarms groß sein, was zu größeren FE-Modellen führt.

3.4 Einfluss von Modellierung und Vernetzung

Die FEM-Voruntersuchungen in diesem Abschnitt sind notwendig. Sie dienen zur Verkleinerung der Modellgröße, zur Minimierung des Aufwandes und der benötigten Rechenzeit bei der Berechnung, zur richtigen Interpretation der Ergebnisse sowie zum Finden der optimalen Elementanzahl und –verteilung für eine hinreichende genaue Spannungsabbildung. Vergleichsrechnungen unterschiedlicher Netzstrukturen wurden anhand einfacher Modellsegmente bearbeitet. Vergleichskriterium ist die Abbildung der Kerbspannungen.

Einfluss von Elementtypen

Zur Ermittlung des Einflusses des FE-Elementtyps (siehe **Abschnitt 3.2.2**) auf die maximale Kerbspannung im Zahnfuß wurde die verzahnte Welle DIN 5480 W25x2x11 bei Torsion untersucht. Eine sehr feine Vernetzung im Fußbereich wurde durch den Einsatz von 16 bzw. 24 Elementen gewählt. **Bild 3.38** zeigt die Ergebnisse der FE-Rechnungen. Die Nennspannung ist auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen

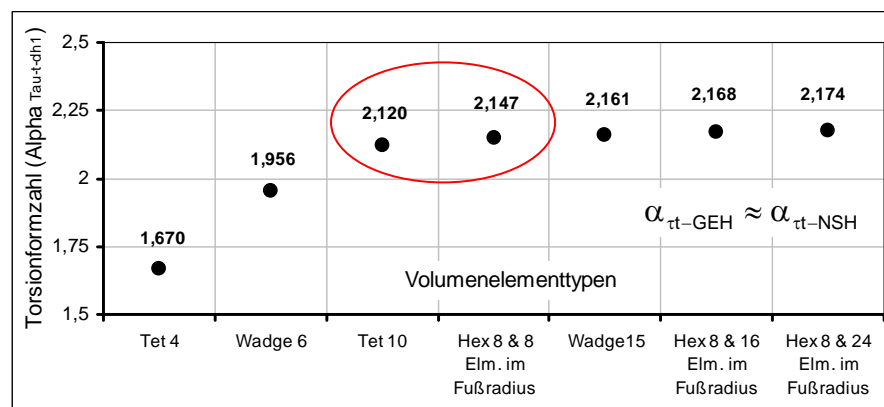
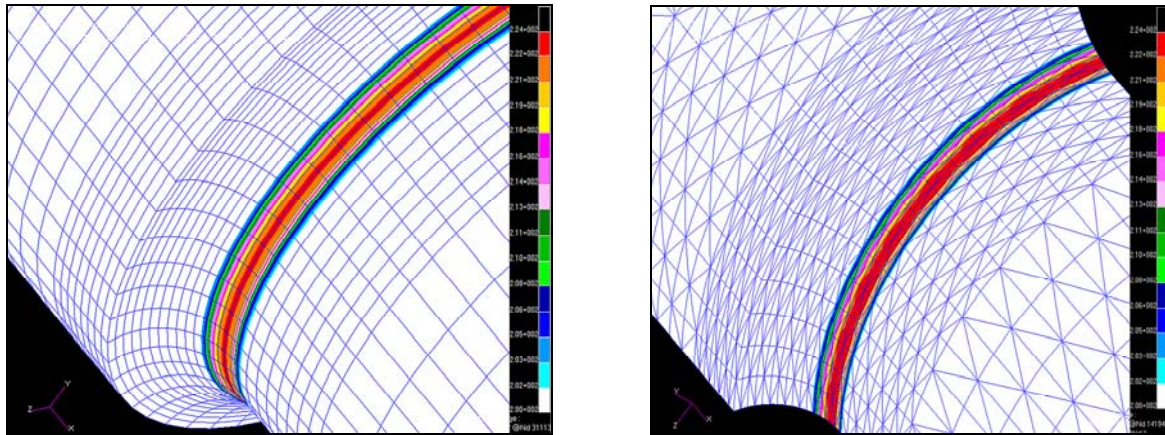


Bild 3.38: Einfluss des FE-Elementtyps auf die Werte der Torsionsformzahl im Zahnfuß der verzahnten Welle DIN 5480 W25x2x11

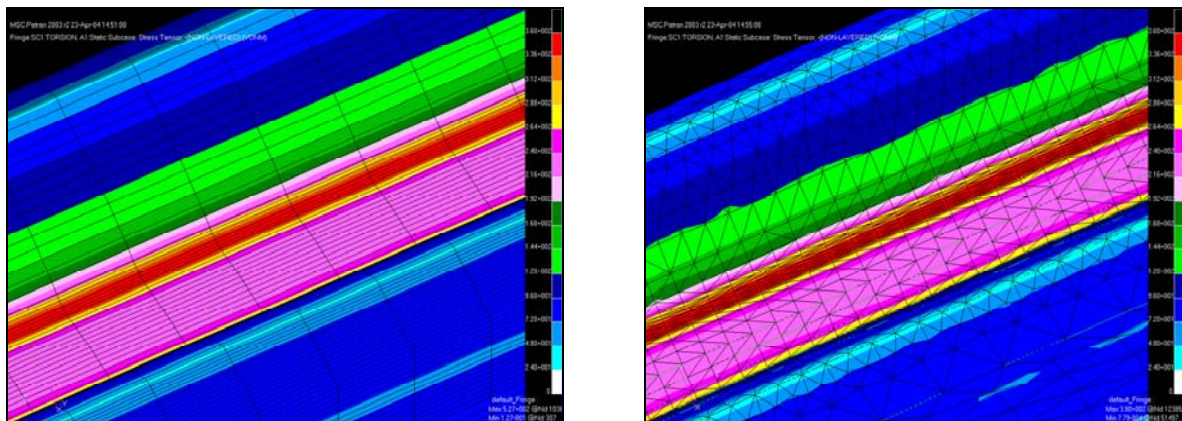
Eine in der Zahnfußausrundung ermittelte Abweichung der Hexaeder-8-Elemente von den Tetraeder-10-Elementen beträgt $< 1,5 \%$. Der Qualitätsabfall des Tetraeder-4-Modells gegenüber den anderen Modellen ist offensichtlich. Die Tet-4-Elemente verhalten sich deutlich zu steif. Aus den so resultierenden geringen Verformungen ergeben sich eindeutig zu niedrige Spannungswerte. Diese Werte im Zahnfuß liegen um 20 Prozent unter den mit dem Hex-8- und Tet-10-Modell ermittelten. Die geringe Genauigkeit führt zum Ausschluss der Tet-4-Elemente für weitere Rechnungen.

Bestimmung der Elementqualität

Es ist von Interesse, wie genau die einzelnen Kerbspannungen mit den Tet-10-Elementen ermittelt werden können. Für einen ersten Vergleich der Genauigkeit zwischen Tet-10- und Hex-8-Elementen wurden Vergleichsrechnungen an einfachen Modellen durchgeführt. Diese Modelle werden jeweils mit beiden Elementtypen und ähnlicher Elementgröße und Netzdichte vernetzt. Wie die Rechnungen zeigen, liegt der praktisch erreichbare Genauigkeitsgrad mit Tet-10-Elementen mindestens gleich mit dem der Hex-8-Elemente. Beide Elementtypen liefern sowohl qualitativ als auch quantitativ ein annähernd gutes Ergebnis. In **Bild 3.39** ist der sich ergebende Torsionsverlauf der Vergleichsspannung nach der GEH für den Absatz und die verzahnte Welle dargestellt.



a) FE-Modell eines Absatzes ($d = 16 \text{ mm}$, $d/D = 0,8$ und $r/t = 1$); **links:** Hex-8-Modell und **rechts:** Tet-10-Modell



b) FE-Modell eines Zahnwellensegments W25x2x11 ohne Auslauf; **links:** Hex-8-Modell und **rechts:** Tet-10-Modell

Bild 3.39: Vergleichsrechnungen zur Bestimmung der Elementqualität

Die simulierten Formzahlen am Wellenabsatz ($d = 16 \text{ mm}$, $d/D = 0,8$ und $r/t = 1$) stimmen je nach Belastungsart mit den aus der Norm *DIN 743 /N3/* ermittelten überein. Sowohl mit Hex-8-Modell als auch mit Tet-10-Modell gilt: $\alpha_{\text{tl-NSH}} = 1,29$; $\alpha_{\text{σzd-NSH}} = 1,71$ und $\alpha_{\text{σb-NSH}} = 1,58$. Die Nennspannung von 100 N/mm^2 wird auf den Durchmesser d bezogen.

Die erhaltenen Ergebnisse des Hex-8- und des Tet-10-Modells bei der Berechnung des Zahnwellensektors stimmen nahezu auch überein. Im Zahnfußbereich variieren die ablesbaren Werte je nach Modell um etwa 1 bis 3 Prozent. Auffällig ist hier der, im Vergleich zum Tet-10-Modell, homogenere Spannungsverlauf des Hex-8-Modells (*Bild 3.39-a*). Die Inhomogenität beruht auf der unterschiedlichen Steifigkeit verschieden groß oder anders angeordneter Tet-10-Elemente sowie deren höheren Formfunktionsansatz.

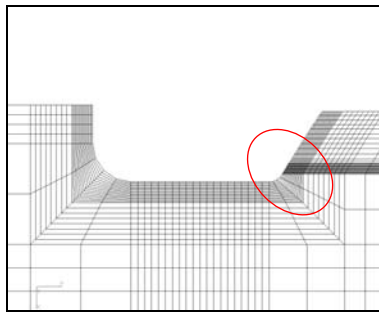
Einfluss von Elementanzahl

Auf die FE-Netzverfeinerung muss großer Wert gelegt werden, da das für die Festigkeitsanalyse verwendete FEM-Netz einen bedeutenden Einfluss auf die erzielten Ergebnisse bei der Untersuchung des Spannungsverlaufs gekerbter Bauteile hat.

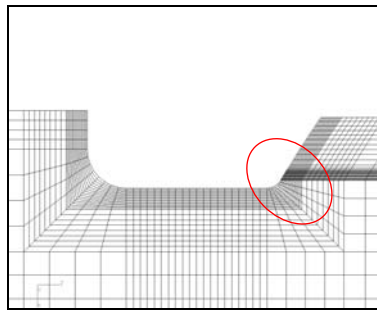
Zur Ermittlung des Einflusses der Elementunterteilung im Kerbbereich auf die Größe der Formzahlen wurde die Zahnwelle W25x2x11 mit freiem Auslauf numerisch untersucht. Die Verfeinerung der Elementierung wurde hierbei hauptsächlich im Auslauf- und Zahnfußbereich sowie im Absatzbereich vorgenommen und stufenweise variiert. Die einzelnen Stufen

wurden als grobe, mittlere, feine und extrem feine Elementierung bezeichnet. Die Anzahl der FE-Elemente im Radius des Auslaufs und Absatzes wurde stufenweise (4, 8, 16, 32 und 48) variiert, siehe **Bild 3.40**.

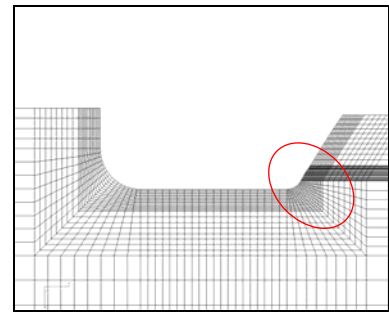
Eine Variation der Vernetzung der übrigen Geometriebereiche, zeigte keinerlei Veränderung der Spannungszonen und Spannungskonzentration und kann deshalb aus Gründen der Datendichte unterlassen werden. Die Formzahlwerte für die untersuchten Modelle der Zahnwelle und des Absatzes sind in der **Tabelle 3.4** zusammengestellt.



a) 4 Elemente im Kerbradius



b) 8 Elemente im Kerbradius



c) 16 Elemente im Kerbradius

16 Elementschichten am Umfang und 16 Elemente in der Tiefe

Bild 3.40: Variation der Hex-8-Elementanzahl im freien Auslaufbereich sowie im Absatzbereich

Tabelle 3.4: Einfluss der Variation der Anzahl der Hex- 8-Elemente im Kerbradius auf die Formzahlwerte nach der NSH und der GEH bei Torsion und Zug/Druck sowohl im freien Auslauf als auch im Absatzbereich für die Zahnwelle W25x2x11 ($d_w/d_{a1} = d/D = 0,775$; $d_i = 9,53$ mm; $d_i/d_w = 0,5$; $t = t_{a1} = 2,77$ mm; $r_w/t_{a1} = 0,2$; $r/t = 0,5$; $a/d_w = 0,25$); $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = \sigma_{zd-nenn-NSH-dw} = 100$ N/mm²

Elementanzahl im Kerbradius	Zug/Druck-Formzahl $\alpha_{\sigma d_{dw}}$				Torsionsformzahl $\alpha_{\tau_{dw}}$				
	Absatz		Auslauf		Absatz	Auslauf		Zahnfuß	
	NSH	GEH	NSH	GEH	NSH	NSH	GEH	NSH	GEH
4	1,82	1,66	2,57	2,26	1,322	1,95	1,721	2,782	1,97
8	2,00	1,79	2,67	2,35	1,386	1,95	1,738	2,782	1,97
16	2,06	1,84	2,70	2,37	1,415	1,95	1,744	2,782	1,97
32	2,07	1,85	2,71	2,38	1,417	1,95	1,747	2,782	1,97
48	2,08	1,85	2,71	2,38	1,420	1,96	1,749	2,782	1,97

Die Variation der Elementanzahl hat einen sehr geringen Einfluss auf die Formzahl im freien Auslaufbereich. Eine feinere Elementierung führt nicht zu einer Veränderung der maximalen Vergleichsspannung.

Anmerkung

Bei der Spannungsberechnung ist eine Elementanzahl von ungefähr 10 Elementen auf dem Kerbradius des freien Auslaufes völlig ausreichend.

Zur Bestimmung des Einflusses der Elementanzahl im Zahnfußradius auf die Formzahl muss die Anzahl der Elemente im Auslaufradius (hier 16 Elemente) konstant bleiben. Die Elementanzahl in der Fußausrundung wurde in Schritten um jeweils 8, 12, 16, 24 und 32 erhöht. Auf Grund dieser Variation musste die Anzahl der Elementschichten in Umfangsrichtung des Modellsegmentes entsprechend (16, 24, 32, 48 und 64) variiert werden (**Bild 3.41**).

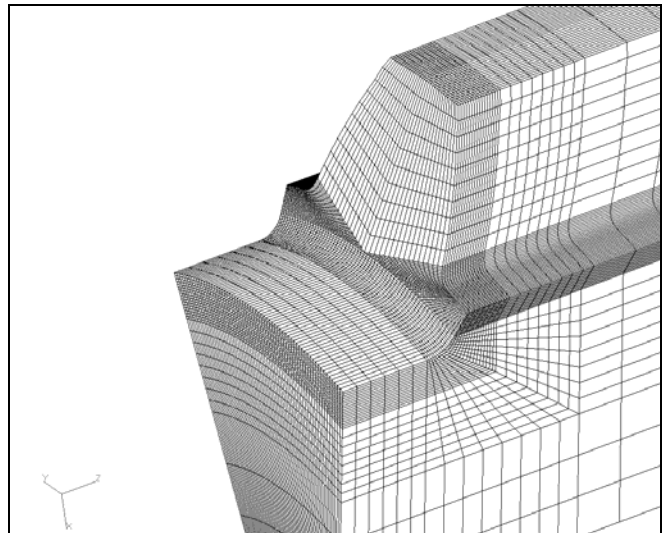


Bild 3.41: Feinvernetzung des Fußbereiches: 32-Elm. in der Zahnfläche, 64-Elmt. am Umfang, 16-Elm. im Auslaufradius und 16-Elm. in der Tiefe

In der **Tabelle 3.5** ist der Einfluss der Elementunterteilung im Zahnfuß auf die Torsionsformzahl dargestellt.

Tabelle 3.5: Einfluss der Variation der Anzahl der Hex- 8-Elemente im Fußbereich auf die Torsionsformzahlen nach der NSH und der GEH; $\tau_{l-nenn-NSH-dw} = \sigma_{zd-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

Elementanzahl		Torsionsformzahl im Zahnfuß $\alpha_{\pi_{d_{h1}}}$	
Im Fußbereich	Im Segmentumfang	NSH	GEH
8	16	2,797	1,970
12	24	2,841	1,995
16	32	2,885	2,021
24	48	2,967	2,071
32	64	3,046	2,114

Es hat sich gezeigt, dass sich eine zu feine Elementierung durchaus auch negativ auf die Untersuchung sowohl im Auslauf- als auch im Zahnfußgebiet auswirkt. Sie führt zu besonderen Problemen bei der Berechnung der Biegebeanspruchungen im Kerbbereich der biegebelasteten FE-Modelle. Dabei ergeben sich vor allem bei den scharfen Kerbradien und großen Zähnezahlen sehr hohe Elementanzahlen und Rechenzeiten.

Für eine gute Vernetzung der Zahnwellen mit freiem Auslauf werden 16 Elemente im Absatzradius, 16 Elemente im Auslaufradius, 16 Elemente in der Tiefe der Kerbe, 8 bis 12 Elemente im Fußausrundungsradius und 16 Elementschichten in der Umfangsrichtung pro Segment empfohlen und für weitere Untersuchungen in dieser Arbeit verwendet, siehe **Bild 3.7**.

Konvergenzuntersuchung

Um eine Einschätzung der Genauigkeit der mit den FE-Modellen erzielten Ergebnisse zu ermöglichen, ist die Verfügbarkeit eines Referenzwertes notwendig. Deshalb wird dabei auf die Näherungsformel von *Wesolowski* (**Tabelle 2.10**) zurückgegriffen. Dabei werden die nach *Wesolowski* berechneten Torsionsformzahlen im ungestörten Zahnfuß mit den erhaltenen Formzahlen im ungestörten Zahnfußbereich von Zahnwellen ohne Auslauf (ein Hex-8-Netz) bzw. mit gebundenem Auslauf (ein Tet-10-Netz) verglichen.

Damit die Gesamtmodellgröße und die Rechendauer nicht zu groß werden, ist auf die FE-Netzgestaltung insbesondere im Fußbereich zu achten. Die Netzdichte darf aber nicht zu fein gewählt werden. Zur Bestimmung der für genaue Ergebnisse notwendigen Elementanordnung und –Größe ist eine Konvergenzbetrachtung durchzuführen.

Dabei wurde die Stirnfläche des Verzahnungssegmentes in geometrische Teilflächen unterteilt (**Bild 3.42**). Die Anzahl der Elemente wurde sowohl im Zahnfußradius als auch in radialer Richtung schrittweise variiert. Die Belastung der Wellen erfolgt durch die Einleitung von Umfangskräften.

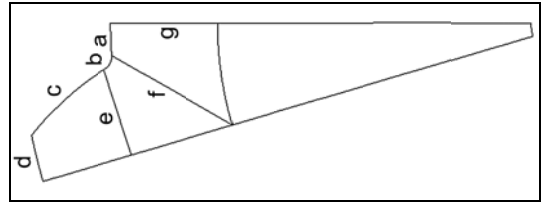


Bild 3.42: Geometrieunterteilung der Stirnfläche des Zahnsegmentes

Tabelle 3.6 zeigt die Abhängigkeit der Torsionsformzahl von der Netzdichte im Fußbereich sowie vom Unterteilungsgrad in radialer Richtung.

Tabelle 3.6: Ergebnisse der Netzverfeinerung im Zahnfußbereich und in radialer Richtung für das Zahnwellensegment DIN 5480 W25x2x11

Variante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Elementanzahl pro Kurve												
a	2	4	8	16	32	8						
b	4	8	16	32	64	8						
c	4	8	16	32	32	12						
d	2	4	16			8						
e, f	2	4	8			4	6	8	12	16	24	32
g	4	8	12									
$\alpha_{\text{rt-GEH-d}_{\text{h1}}}$	1,61	1,82	1,98	2,06	2,08	1,84	1,92	1,98	2,07	2,11	2,13	2,14

Die Konvergenzuntersuchung ergibt, dass die Anzahl der Elemente in radialer Richtung in einem harmonischen Verhältnis zur Unterteilung im Zahnfuß stehen muss. Die Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse führt zu einer neuen Unterteilungsform.

Bild 3.43 zeigt das entstehende räumliche FE-Netz mit den optimalen Elementunterteilungen pro Kurve. Die ersten, sehr fein vernetzten Teilflächen unterhalb der Oberfläche reichen dabei ungefähr mit einer dem doppelten Fußradius entsprechenden Länge in die Tiefe. Die mit dieser Netzform berechnete Torsionsformzahl konvergiert gegen einen Wert von $\alpha_{tt} = 2,10$ und liegt damit nur um 1,9 % unter dem von *Wesolowski* für die konkrete Geometrie ermittelten Grenzwert von $\alpha_{tt-Weso} = 2,14$.

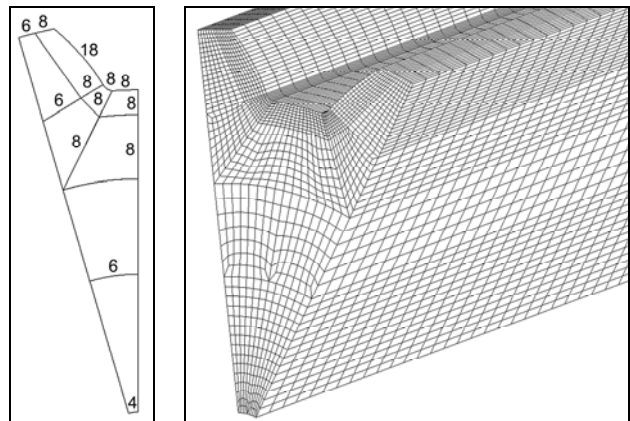


Bild 3.43: Verbesserte Unterteilung der Stirnfläche und ein entsprechendes Hex-8-Modell des Zahnwellensegmentes DIN 5480 W25x2x11

Ausgehend davon wird eine Variationsrechnung für Zahnwellenprofile mit verschiedenen Bezugsdurchmessern und einem konstanten Modul $m = 2$ nach *DIN 5480* durchgeführt. Es werden dabei Zahnwellen mit den Profilverschiebungsfaktoren $x_1 = 0,2$ und $x_1 = 0,45$ untersucht.

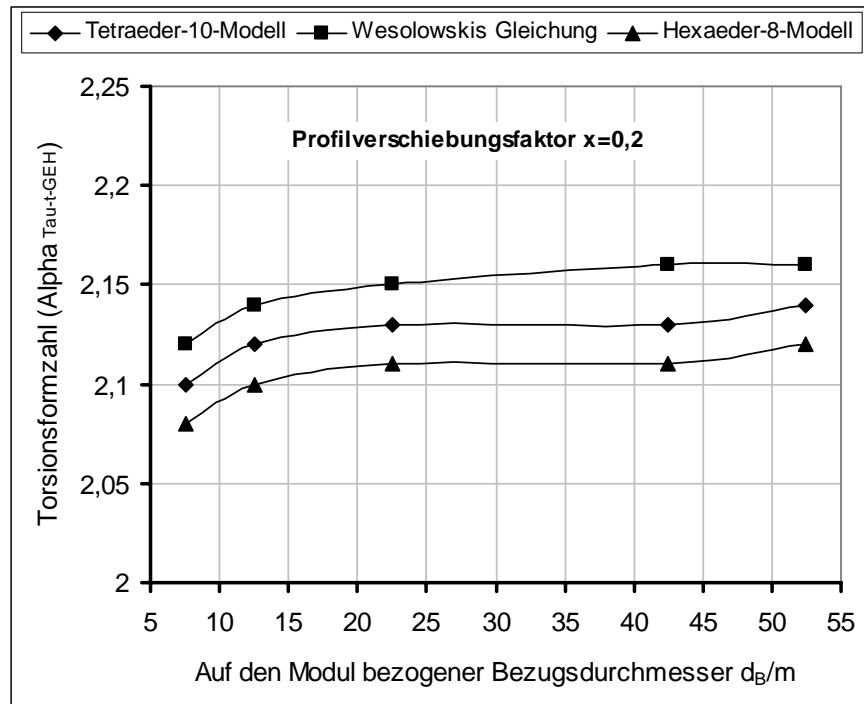
Die Ergebnisse sind tabellarisch (**Tabelle 3.7**) und in Diagrammform (**Bild 3.44**) aufgeführt. Der prinzipielle Verlauf der berechneten und simulierten Kurven ist identisch. Die ermittelten Formzahlen liegen etwa 1,5 % bis 3 % (für ein Hex-8-Modell) bzw. 1 % bis 1,5 % (für ein Tet-10-Modell) unter den sich nach *Wesolowski* ergebenden Grenzwerten. Betrachtet man den konvergierenden Charakter der FE-Methode, ist dies ein sehr gutes Ergebnis.

Wegen der nicht linearen Formfunktionen der Tet-10-Elemente kommt es im Vergleich zu den Hex-8-Elementen zu schwankenden Absolutgrößen der ermittelten Spannungen über das Element. Durch genügend feines, möglichst harmonisches Vernetzen lassen sich die Schwankungen auf ca. 3 % des Absolutwertes reduzieren.

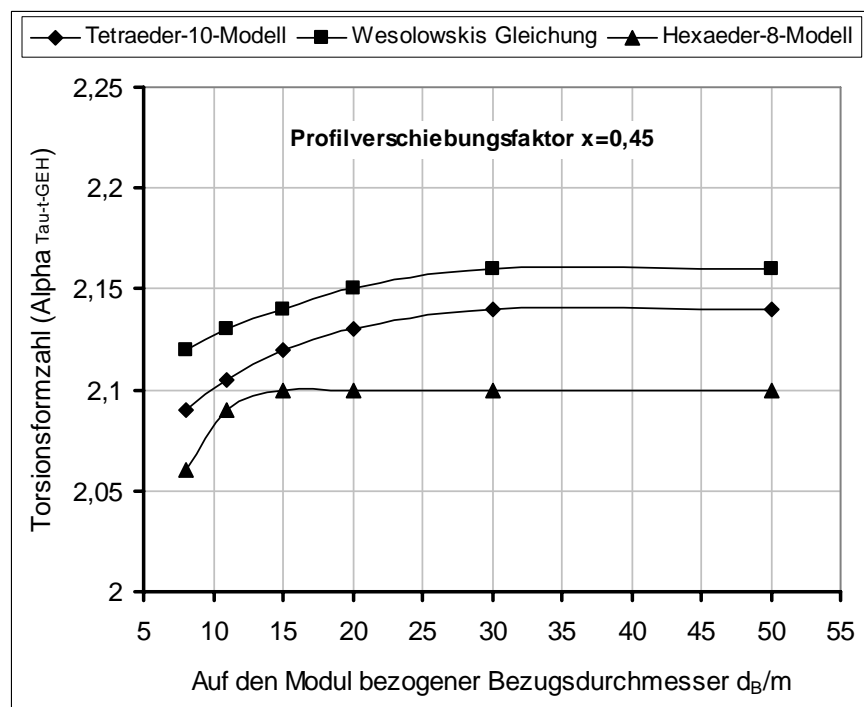
Die Werte nach *Wesolowski* eignen sich somit als Referenz für spätere Vergleiche. Auch kann der zu vernachlässigende Einfluss der Profilverschiebung bestätigt werden. Weiterhin verifiziert diese FE-Berechnungen die verwendeten Randbedingungen (Krafteinleitung und Einspannung), unterstreicht die Qualität der Elemente und des Netzes und beurteilt die Genauigkeit der Formzahlermittlung. Durch die dabei gewonnenen Ergebnisse ist es möglich, die numerischen Berechnungen auf einer sicheren Basis durchzuführen.

Tabelle 3.7: Vergleich der mit den FE-Modellen ermittelten Torsionsformzahlen im ungestörten Zahnfußbereich für verschiedene Zahnwellengeometrien mit den berechneten Werten nach *Wesolowski*

Zahnwellen nach DIN 5480	d_B/m	$\alpha_{\pi-GEH}$ /Wes96/	$\alpha_{\pi-GEH-FEM}$		$\frac{\alpha_{weso}-\alpha_{FEM}}{\alpha_{weso}} \cdot 100 \%$
			Tet-10-Modell	Hex-8-Modell	
$x_1 = 0,2$					
W15x2x6	7,5	2,12	2,10	2,08	2,04
W25x2x11	12,5	2,14	2,12	2,10	1,78
W45x2x21	22,5	2,15	2,13	2,11	2,18
W85x2x41	42,5	2,16	2,13	2,11	2,16
W105x2x51	52,5	2,16	2,14	2,12	1,91
$x_1 = 0,45$					
W16x2x6	8	2,12	2,09	2,06	2,85
W22x2x9	11	2,13	2,105	2,09	2,05
W30x2x13	15	2,14	2,12	2,10	1,99
W40x2x18	20	2,15	2,13	2,10	2,33
W60x2x28	30	2,16	2,14	2,10	2,60
W100x2x48	50	2,16	2,14	2,10	2,71



a) Profilverschiebungsfaktor $x_1 = 0,2$



b) Profilverschiebungsfaktor $x_1 = 0,45$

Bild 3.44: Verlauf und Vergleich der mit FEM ermittelten Torsionsformzahlen im ungestörten Zahnfußbereich von Zahnwellen ohne Auslauf (ein Hex-8-Netz) und Zahnwellen mit gebundenem Auslauf (ein Tet-10-Netz) nach DIN 5480; $m = 2$; mit den nach Wesolowski berechneten; Nennspannung bezogen auf d_{h1}

Überprüfung des Linearitätsprinzips

Mit Hinblick auf die späteren Untersuchungen an Zahnwellen wurde kurz darauf eingegangen, ob das Prinzip der Linearität durch das verwendete FE-System erfüllt wird. Diese grundlegende Eigenschaft der Formzahl (Lastunabhängigkeit) wurde an der Zahnwelle W40x2x18 sowie an einem glatten Wellenmodell bei Torsion und Biegung überprüft.

Die Überprüfung ergab einen linearen Zusammenhang zwischen Vergleichsspannung und Nennspannung bzw. anliegender Belastung, z.B. die Verdoppelung der Querkraft führt zur Verdoppelung der max. Biegespannung. Die hierbei errechneten Formzahlen bleiben gemäß ihrer Definition mit zunehmender Last konstant. Somit ist die Unabhängigkeit der Formzahl von der Lastgröße nachgewiesen und die Einhaltung des Linearitätsprinzips ersichtlich.

Einfluss der Querkontraktionszahl und des E-Moduls

In der Fachliteratur (z.B. /See77/ und /Rad03/) wird auch von einer geringfügigen Abhängigkeit der Formzahlen von den elastischen Werkstoffkonstanten im betrachteten Bereich metallischer Werkstoffe ($\nu = 0,28$ bis $0,33$) berichtet.

Die Querkontraktionszahl ν (auch Poissonzahl genannt) ist eine dimensionslose Größe und vom verwendeten Material abhängig. Sie gibt das Verhältnis von Querdehnung (Dickenänderung $\Delta d/d$) zu Längsdehnung (Längenänderung $\Delta l/l$) unter Einwirkung einer Kraft an. Typische Werte der Poissonzahl liegen im elastischen Fall für Stähle in einem relativ kleinen Wertebereich bei ca. $0,25$ bis $0,35$. Bei einsetzender Plastifizierung wächst sie asymptotisch von ca. $0,3$ gegen $0,5$.

Für die Absicherung der Ergebnisse der Formzahlen ist es daher notwendig, die Einflüsse der Materialkonstanten (E-Modul und Poissonzahl) auf die Maximalwerte der Spannungen zu untersuchen. Dadurch wird auch die Übertragbarkeit der in dieser Arbeit ermittelten Formzahlen auf Zahnwellen aus verschiedenen Materialien (z.B. für Keramik mit $\nu = 0,15$ bis $0,2$) geprüft.

Um dieses Ziel zu erreichen, wurden zwei Testreihen an zwei Kerbformen (Zahnwelle mit freiem Auslauf sowie Wellenabsatz) für Torsion, Biegung und Zug/Druck durchgeführt. In **Tabelle 3.8** sind die ermittelten Formzahlen bei Variation von der Querkontraktionszahl ν für beide Kerbformen aufgelistet.

Die sämtlichen FE-Ergebnisse bestätigten, dass die Querkontraktionszahl im relevanten Bereich für Stähle ($\nu = 0,25$ bis $0,35$) keinen Einfluss auf die Formzahl hat. Im Bereich ($\nu = 0,1$ bis $0,25$) ist dieser Einfluss geringfügig und somit vernachlässigbar.

Die Variation des Elastizitätsmoduls zwischen $1 \cdot 10^3$ und $5 \cdot 10^5$ hat ebenfalls keinen Einfluss auf die Höhe der maximalen Spannungen im elastischen Bereich. Dies gilt sowohl bei konstanter als auch bei geänderter Querkontraktionszahl.

Tabelle 3.8: Einfluss der Querkontraktionszahl auf die Spannungsformzahlen; Nennspannung von 100 N/mm² ist für Absatz und Zahnwelle auf den Wellendurchmesser d_w bezogen

$\nu =$	0	0,1	0,25	0,3	0,35	0,4	0,48
Torsionsformzahl	Wellenabsatz: ($d/D = 0,617$ und $r/t = 0,5$; $d = 9$ mm; $d_i = 1$ mm)						
$\alpha_{\tau t}$ -GEH-Absatz	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27
$\alpha_{\tau t}$ -NSH-Absatz	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27
Zugformzahl							
$\alpha_{\sigma zd}$ -GEH	1,75	1,70	1,65	1,64	1,63	1,61	1,60
$\alpha_{\sigma zd}$ -NSH	1,85	1,84	1,83	1,82	1,82	1,82	1,82
Biegeformzahl	Wellenabsatz: ($d/D = 0,8$ und $r/t = 0,4$)						
$\alpha_{\sigma b}$ -GEH-Absatz	2,06	2,00	1,93	1,91	1,90	1,89	1,88
$\alpha_{\sigma b}$ -NSH-Absatz	2,15	2,16	2,18	2,18	2,19	2,20	2,22
Torsionsformzahl	Zahnwelle W15x2x6 mit freiem Auslauf: ($d_w/d_{a1} = 0,617$; $r_w/t_{a1} = 0,2$; $d_{a1} = 14,6$ mm; $d_w = 9$ mm; $d_i = 1$ mm; $r_w = 0,56$ mm; $d_{h1} = 11,73$ mm; $c_{h1} = 0,39$; $\phi = 30^\circ$)						
$\alpha_{\tau t}$ -GEH-dw-Auslauf	1,513	1,530	1,565	1,576	1,582	1,594	1,605
$\alpha_{\tau t}$ -NSH-dw-Auslauf	1,56	1,59	1,64	1,67	1,68	1,71	1,74
Zugformzahl							
$\alpha_{\sigma zd}$ -GEH-dw-Auslauf	2,28	2,23	2,18	2,18	2,17	2,17	2,19
$\alpha_{\sigma zd}$ -NSH-dw-Auslauf	2,41	2,42	2,46	2,47	2,49	2,51	2,56
Biegeformzahl							
$\alpha_{\tau t}$ -GEH-dh1-Zahnfuß	1,994	1,994	1,994	1,994	1,994	1,994	1,994
$\alpha_{\tau t}$ -NSH-dh1-Zahnfuß	2,812	2,945	3,100	3,144	3,210	3,254	3,343

Nachweis der geometrischen Ähnlichkeit

Der Modul m in mm ist eine wichtige Bestimmungsgröße der DIN 5480 /N1/. Mit dem Bezugsdurchmesser d_B (bzw. dem Teilkreisdurchmesser d) und dem Modul m lassen sich bei gleicher Zähnezahln geometrisch ähnliche Verbindungen über die Beziehung: $d_B/m = \text{const.}$ bilden. Ob der Modul als einflussnehmender Faktor für die Formzahl in Betracht kommt, ist fraglich, da er eine reine Maßstabsgröße ist.

Zum Nachweis, dass die FE-Ergebnisse nicht nur für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Zahnwellen Gültigkeit haben, sind fünf geometrisch ähnliche Zahnwellen W10x0,5x18 ; W25x1,25x18 ; W40x2x18 ; W100x5x18 und W160x8x18 miteinander verglichen worden.

Um möglichen Einflüssen aus veränderlichen Geometrieparametern zu begegnen, erfolgten die Untersuchungen mit $x_1 = 0,2$ und $r_w/t_{a1} = 0,2$ sowie $d_w/d_{a1} = 0,885$.

Das Verhältnis Zahndicke/Modul s_n/m bleibt auf Grund der geometrischen Proportionalität konstant. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in **Bild 3.45** dargestellt.

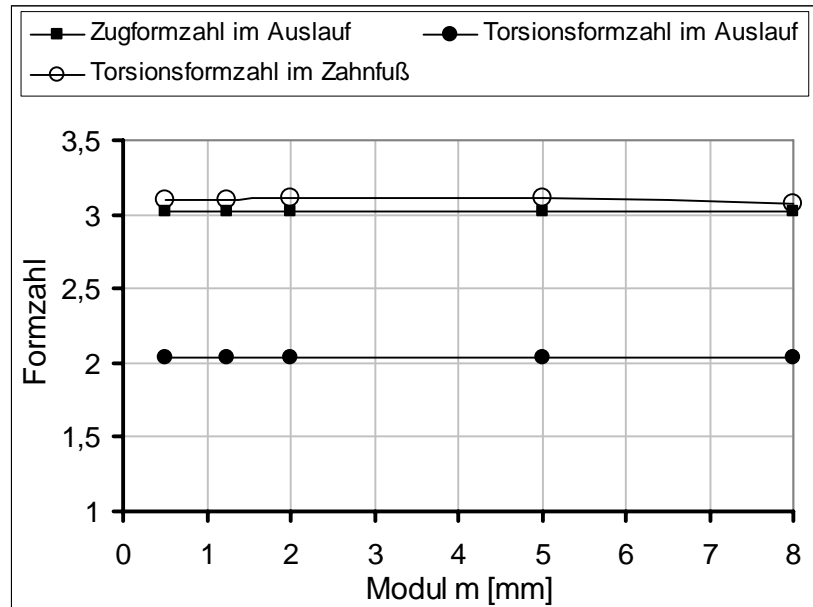


Bild 3.45: Vergleich der Formzahlen nach NSH geometrisch ähnlicher Zahnwellen mit freiem Auslauf bei Torsion und Zug/Druck; Drehmomenteinleitung: Flankenpressung entsprechend der Nebenlage 1

Es ergibt sich eine nahezu identische Formzahl mit einer vernachlässigbaren Abweichung von unter 1 %. Auf Grund der geometrischen Ähnlichkeit zwischen modulvariierten Zahnwellen gelten für Kerben gleicher dimensionsloser Geometrie gleiche Formzahlen, unabhängig von absoluten Geometrie- und Belastungsgrößen. Die maximale Größe der Spannung im Auslauf und Zahnfuß bleibt bei Vergrößerung bzw. Verkleinerung konstant.

Bezug nehmend auf diese Auswertungen hat der Modul m , wie erwartet, keinen Einfluss auf die Formzahlen sowie auf das Spannungsverhalten. Er kann daher für die weiteren Betrachtungen beliebig sein und mit den das Spannungsverhalten beeinflussenden Geometrieparametern in dimensionslosen Verhältnissen eingesetzt werden. Dies wurde ebenfalls von Wesolowski /Wes96/ für verzahnte Wellen nachgewiesen. Diese Aussage gilt jedoch nur für die Formzahlermittlung mit der FEM.

Nachdem nun die grundlegenden Untersuchungen an einfachen Modellen abgeschlossen sind, erfolgt im folgenden Abschnitt die Darstellung der Ergebnisse der einzelnen Parameteruntersuchungen zur Beeinflussung der Formzahlen je nach Belastungsart.

3.5 Problematik der Definition der Nennspannungen

Als Grundlage zur Bestimmung der Formzahl aus der maximalen Spannung dient die Nennspannung, die sich aus den elementaren Formeln der Festigkeitslehre für den glatten, ungekerbten Querschnitt ergeben würde (**Bild 3.46**).

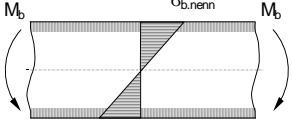
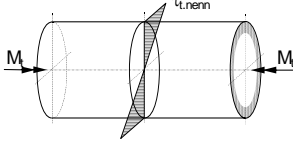
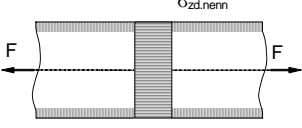
		
Biegung: $\sigma_{b,nenn} = \frac{M_b}{W_b}$	Torsion: $\tau_{t,nenn} = \frac{M_t}{W_t}$	Zug/Druck: $\sigma_{zd,nenn} = \frac{F_{zd}}{A_{zd}}$

Bild 3.46: Berechnung der Nennspannungen in N/mm² bei Wellen in Anlehnung an /Mel00/

Eine Definition der Nennspannung ist bei Zahnwellen mit freiem oder gebundenem Auslauf problematisch. Unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen stehen dem Konstrukteur zur Verfügung. Diese können jedoch zu Missverständnissen führen. Mit der Darlegung folgender Überlegungen werden diese Problematik und deren Einflüsse auf die Formzahl verdeutlicht.

In Anlehnung an die *DIN 5466-2 /N5/* würde es sich anbieten, die Nennspannung verzahnter Wellen auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} zu beziehen, siehe Gl. (2.80) und (2.82). Die Näherungsgleichung zur Berechnung des Ersatzdurchmessers d_{h1} geht auf Arbeiten von Nakazawa /Nak51/ und Schöpf /Sch76/ zurück. Weiterhin lässt sich der Ersatzdurchmesser d_{h1} auch aus der Verdrehung der Zahnwelle nach dem Prinzip der Torsion kreiszylindrischer Stäbe /Göl89/ nach den Gleichungen (3.8) und (3.9) bestimmen (**Bild 3.47**).

$$d_{h1} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t \cdot l}{G \cdot \pi \cdot \varphi}} \quad (3.8) \quad \varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \quad (3.9)$$

φ : Torsionswinkel; G : Schubmodul, I_t : Flächenträgheitsmoment und l : Länge der Welle

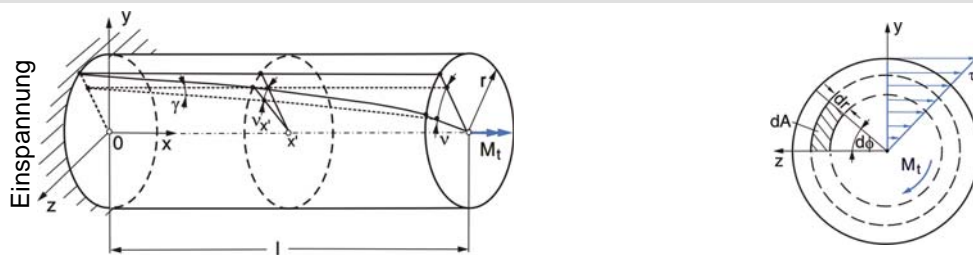


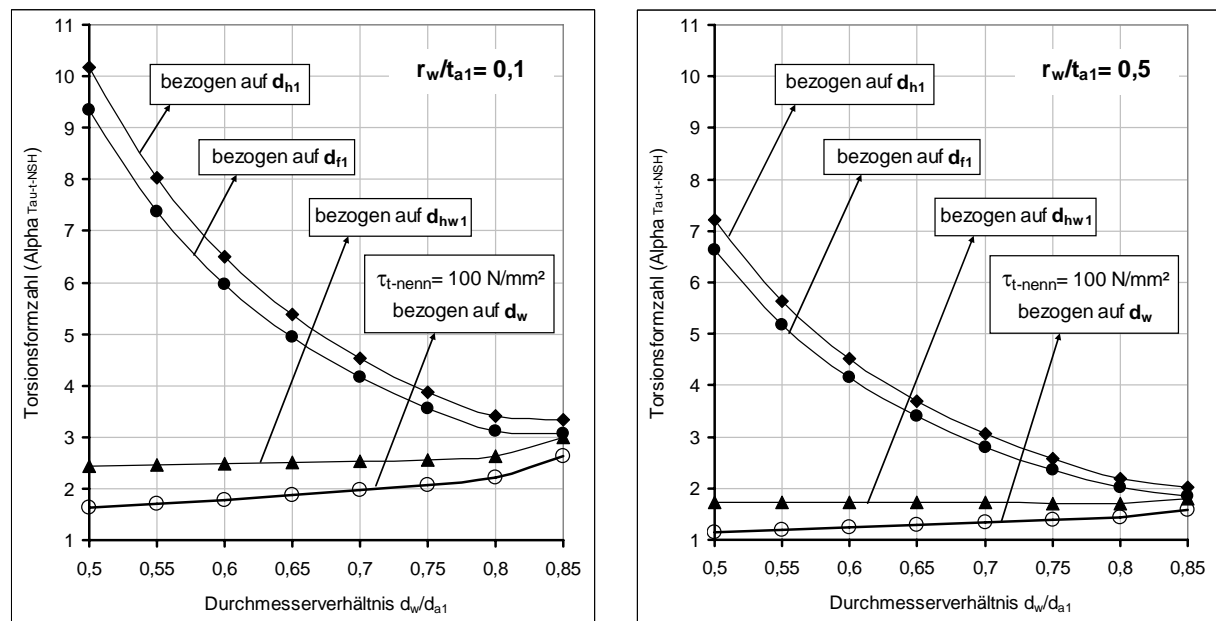
Bild 3.47: Deformation eines kreiszylindrischen Torsionsstabes und Verteilung der Schubspannung im Querschnitt, in Anlehnung an /Göl89/

In **Bild 3.48** sind die Verläufe der Torsionsformzahlen für den freien Auslauf am Beispiel der Zahnwelle W40x2x18 unter Verwendungen unterschiedlicher Nennspannungen dargestellt. Die Verwendung des Ersatzdurchmessers d_{h1} zur Formzahlberechnung im freien Auslauf führt zur Überschreitung sinnvoller Größenbereiche der Formzahl. Sie erreichen insbesondere bei kleinen Durchmesserhältnissen d_w/d_{a1} Werte in Höhe von 15 und mehr bei Torsion und sogar 20 und mehr bei Biegung und Zug/Druck. Dies widerspricht jedoch den Erkenntnissen aus Dauerversuchen und Literaturquellen. Die Berechnung der Nennspannung mit dem Fußkreisdurchmessers führt auch zur ähnlichen Problematik (**Bild 3.48**).

Eine weitere Möglichkeit zur Auswahl der Nennspannung ergibt sich aus der Festlegung des Ersatzdurchmessers d_{hw1} der Zahnwelle mit freiem Auslauf zwischen dem Wellendurchmesser d_w und dem Kopfkreisdurchmesser d_{a1} nach Gl. (3.10). Hierbei scheinen die Formzahlen vom Verhältnis d_w/d_{a1} nahezu unabhängig zu sein (Bild 3.48).

$$d_{hw1} = d_w + c_{h1} \cdot \frac{d_w}{d_{a1}} \cdot (d_{a1} - d_w) \quad (3.10)$$

Darüber hinaus stellt sich die Anwendung des Wellendurchmessers d_w mit dem kleinsten Querschnitt, wie dieser beim Wellenabsatz nach DIN 743 verwendet wird, als die praktisch sinnvollste Wahlmöglichkeit zur Formzahldefinition im freien Auslauf heraus (Bild 3.48).



a) Kerbschärfe $r_w/t_{a1} = 0,1$

b) Kerbschärfe $r_w/t_{a1} = 0,5$

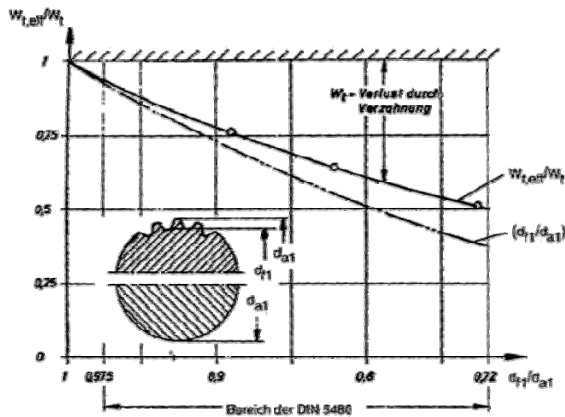
Bild 3.48: Charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven bei Torsion für unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} im freien Auslauf der Zahnwelle DIN 5480 W40x2x18 ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 38,6 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{h1} = 35,6 \text{ mm}$)

Für die Formzahlberechnung im gebundenen Auslauf stehen zwei grundsätzliche Nennspannungsdefinitionen zur Verfügung. Demnach lassen sich entweder der Ersatzdurchmesser d_{h1} oder der Zahnfußkreisdurchmesser d_{f1} anwenden. Für die einfache Verarbeitung durch den Konstrukteur erscheint es für diese Kerbform sinnvoll, die Maximalspannung auf die mit dem Ersatzdurchmesser d_{h1} berechnete Nennspannung zu beziehen.

Bildet man den ungestörten Wellenquerschnitt mit dem Zahnfußkreisdurchmesser, wird dieser durch die Verzahnung versteift. Wird die Nennspannung mit dem Kopfkreisdurchmesser berechnet, wird der gebildete Wellenquerschnitt durch die Verzahnung gestört und geschwächt. Je nach Verzahnungsabmessungen kann der Verlust an Widerstandsmoment der Welle bei der Verwendung des Kopfkreisdurchmessers durch die Verzahnung bis zu 50 % betragen. Dies konnte Schöpf/Sch76/ in seinen Untersuchungen zur Ermittlung des effektiven Widerstandsmoments für Zahnwellen nachweisen (Bild 3.49).

Vor dem Hintergrund dieser theoretischen Überlegungen lassen sich die festgelegten Durchmesser zur Definition der Nennspannungen für die Zahnwellen mit Auslauf (mit/ohne Naben) in konzentrierter Form gemäß Bild 3.50 zusammenfassen. Die Tabelle 3.9 enthält eine Zu-

sammenstellung der erforderlichen Kenngrößen zur Berechnung der Querschnitte. Die Umrechnung der auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogenen Formzahl auf die Durchmesser d_{f1} oder d_w erfolgt gemäß den in **Tabelle 3.10** aufgelisteten Gleichungen.



$$d_{eff} = \sqrt[3]{\frac{W_{t,eff}}{W_t}} \cdot d_{a1}$$

$W_{t,eff}$: das tatsächliche Widerstandsmoment

W_t : das auf den Kopfkreis d_{a1} bezogene Widerstandsmoment

Bild 3.49: Verlauf des Verhältnisses $W_{t,eff}/W_t$ über dem Verhältnis d_{f1}/d_{a1} zur Berechnung der wahren Nennspannung der Zahnwellen nach DIN 5480 nach /Sch 76/

Zahnwellen	mit freiem Auslauf	mit gebundenem Auslauf
Formzahlberechnung	erforderlicher Durchmesser zur Nennspannungsberechnung	
im Zahnfußbereich	Ersatzdurchmesser d_{h1} nach DIN 5466-2	
im Auslaufbereich	Wellendurchmesser d_w nach DIN 743	Ersatzdurchmesser d_{h1} nach DIN 5466-2
in der SR-Nutrundung	Nutgrunddurchmesser d_{SRN} nach DIN 743	

Bild 3.50: Festlegung des erforderlichen Durchmessers zur Berechnung der Nennspannungen an Zahnwellen

Tabelle 3.9: Berechnung der Querschnittskenngrößen je nach Belastungsart für die Zahnwellen

Querschnittskenngrößen	Biegung	Torsion	Zug/Druck
im Zahnfußgebiet oder im gebundenen Auslauf	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(d_{h1}^4 - d_i^4)}{d_{h1}}$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(d_{h1}^4 - d_i^4)}{d_{h1}}$	$A_{zd} = \frac{\pi}{4} \cdot (d_{h1}^2 - d_i^2)$
im freien Auslauf	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(d_w^4 - d_i^4)}{d_w}$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(d_w^4 - d_i^4)}{d_w}$	$A_{zd} = \frac{\pi}{4} \cdot (d_w^2 - d_i^2)$

Tabelle 3.10: Formeln zur Umrechnung der Nennspannungen je nach Belastungsart

Biegung	Torsion	Zug/Druck
$\alpha_{\sigma b_{d_{f1}}} = \alpha_{\sigma b_{d_{h1}}} \cdot \left(\frac{d_{f1}}{d_{h1}}\right)^3$	$\alpha_{\tau_{d_{f1}}} = \alpha_{\tau_{d_{h1}}} \cdot \left(\frac{d_{f1}}{d_{h1}}\right)^3$	$\alpha_{\sigma d_{d_{f1}}} = \alpha_{\sigma d_{d_{h1}}} \cdot \left(\frac{d_{f1}}{d_{h1}}\right)^2$
$\alpha_{\sigma b_{d_w}} = \alpha_{\sigma b_{d_{h1}}} \cdot \left(\frac{d_w}{d_{h1}}\right)^3$	$\alpha_{\tau_{d_w}} = \alpha_{\tau_{d_{h1}}} \cdot \left(\frac{d_w}{d_{h1}}\right)^3$	$\alpha_{\sigma d_{d_w}} = \alpha_{\sigma d_{d_{h1}}} \cdot \left(\frac{d_w}{d_{h1}}\right)^2$

4 Formzahlberechnung an Zahnwellen mit freiem Auslauf

4.1 Allgemein

Die Forschungen zur Bestimmung der Spannungsformzahl α an Wellen werden bereits seit sehr langer Zeit intensiv betrieben, da sie für die Bewertung der max. Kerbspannungen in Bauteilen eine dominierende Rolle spielt. Der Tragfähigkeitsnachweis nach *DIN 743 /N3/* für Wellen mit Kerben beruht auf der Erfassung der örtlichen Spannung und der Stützwirkung an der Querschnittsänderung. Hierfür kommen die Formzahlen α und Angaben zum Spannungsgefälle G^* zur Anwendung.

In diesem Kapitel werden die bereits im Rahmen dieser Arbeit wichtigsten erworbenen Ergebnisse der FE-Berechnungen zu den Einflüssen der geometrieabhängigen Kenngrößen auf die Größe der Formzahlen an Zahnwellen mit freiem Auslauf (*Bild 3.1*) bei Torsion, Zug/Druck und Biegung zusammengefasst. Die Vorgehensweise bei der Ergebnissauswertung wird kurz erläutert. Als Vergleichsgrundlage dienen die aufgetretenen maximalen Vergleichsspannungen bezogen auf die Nennspannungen.

Für den Anwender ist die Bestimmung der maximalen Spannung von großer Bedeutung. Je nach vorhandenen Werkstoffeigenschaften (duktil bzw. spröde) sind die Maximalwerte der Vergleichsspannungen sowie ihre Verteilungen sowohl im freien Auslauf als auch im Zahnfuß (jeweils auf der Zug- und Druckseite) getrennt nach der NS-Hypothese (sprödes Werkstoffverhalten) und der GE-Hypothese (duktilen Werkstoffverhalten) auszuwerten und miteinander zu vergleichen. Wie in *DIN 743* wird aber die Verwendung der größten Hauptspannung σ_1 zur Auswertung und Darstellung der Formzahl favorisiert. Somit liegt der Konstrukteur auf der sicheren Seite.

Die verwendeten Nennspannungen zur Berechnung der Formzahlen werden nach den in *Tabelle 3.9* und *Bild 3.46* angegebenen Gleichungen berechnet. Die Nennspannung $\tau_{t-nenn-NSH} = \sigma_{zd,b-nenn-NSH} = 100 \text{ N/mm}^2$ ist je Belastungsart im Kerbgrund, bezogen auf den Wellendurchmesser d_w berechnet. Die Formzahlen beziehen sich im freien Auslauf auf den Wellendurchmesser d_w und im Zahnfuß auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} (*Bild 3.50*).

Die für diese Untersuchungen verwendeten Zahnwellengeometrien mit Evolventenflanken werden nach *DIN 5480 /N1/* unter Berücksichtigung des geometrischen Ähnlichkeitsprinzips ($d_B/m = \text{const.}$ bei unveränderlicher Zähnezahl) ausgewählt. Sie sind für eine Verallgemeinerung der Ergebnisse bei den Variationsrechnungen gut geeignet. Je nach Untersuchungszweck und Belastungsart werden verschiedene FE-Modelle der Zahnwellen verwendet. Die Randbedingungen entsprechen hierbei denen aus *Abschnitt 3.3*.

Die Formzahlberechnung setzt voraus, dass alle für die Bestimmung der Spannungsüberhöhung maßgebenden Einflussparameter bekannt sein müssen. Die geometrischen Kenngrößen, die große Bedeutung für das Spannungs- und Verformungsverhalten der Zahnwellen mit freiem Auslauf aufweisen, sind Kerbabstand a , konischer Übergangswinkel ϕ , Profilverschiebungsfaktor x_1 , Zähnezahl z , Zahnfußausrundungsverhältnis $\rho_{f-\min}/m$, Kerbschärfe r_w/t_{a1} und Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} , siehe *Bild 3.1*. Wird also die geometrische Form der Zahnwelle variiert, so werden zwangsläufig auch die damit einhergehenden Formzahlen verändert.

Zuerst werden die Spannungsformzahlen in Abhängigkeit von den geometrischen Parametern für die Belastungsarten Torsion, Biegung und Zug behandelt. Anschließend erfolgt die Beurteilung der Lage der Maximalspannung sowie ihres axialen Abklingverhaltens. Die FE-Werte werden mit den vorhandenen Werten für den äquivalenten Wellenabsatz verglichen. Darüber hinaus wird auf die Berechnung der bezogenen Spannungsgefälle eingegangen.

Aus den durchgeführten numerischen Untersuchungen mit zahlreichen Parameterstudien werden einfache Berechnungsformeln zur Abschätzung der Formzahlen, zur Beschreibung der Lage und des Abklingverhaltens der maximalen Spannung sowie zur Bestimmung der bezogenen Spannungsgradienten je Belastungsart entwickelt und demonstriert.

Den Abschluss bilden jeweils die Nennung und Zusammenstellung der empfohlenen neuen Näherungsgleichungen, welche der Berechnung der Tragfähigkeit von Zahnwellen Impulse geben. Außerdem werden Aussagen zur spannungsgerechten Gestaltung von Zahnwellen mit freiem Auslauf angegeben. Weiterhin beinhaltet sind die Verweise auf das entsprechende Datenmaterial hinsichtlich der Untersuchungsergebnisse in den zu diesem Kapitel gehörenden Anlagenblättern.

4.2 Geometrische Einflussparameter auf die Formzahlberechnung

4.2.1 Bestimmung des Kerbabstandes

Für die Gestaltung der FE-Modelle an Zahnwellen mit dem freien Auslauf ergab sich das Problem, wie weit die sich gegenüberliegenden benachbarten Kerbstellen (verzahnungsseitig und absatzseitig) voneinander entfernt sein müssen, ohne sich gegenseitig unzulässig zu beeinflussen. Die Festlegung eines Sicherheitskerbabstandes a zwischen Auslauf und Absatz ist zur Vermeidung der Mehrfachkerbwirkung bzw. der Überschneidung der Störbereiche von großer Bedeutung. Bei einem genügend großen Abstand erhält man eine Nebenvariante, die die hereingeschnittene Verzahnung in einen Wellenabsatz darstellt.

Für die Lösung dieses Problems wurden FE-Untersuchungen an den Zahnwellen bei Torsion, Biegung und Zug durchgeführt. Dabei wurde der Abstand a bezogen auf den kleinsten Wellendurchmesser d_w zwischen 0 und 0,55 variiert, bis sich die Ergebnisse im Kerbbereich von einem Modell zu anderem nur noch wenig ändern. Die ermittelten Formzahlen sind in Diagrammform (**Bild 4.1**) erläutert. Für den Kerbabstand $a/d_w = 0$ überlagern sich die Kerben (Auslauf mit dem Absatz) vollständig. Die Spannungsspitze infolge der hier untersuchten Geometrieparameter liegt je Belastungsart im Auslaufradius und nicht im Absatzradius.

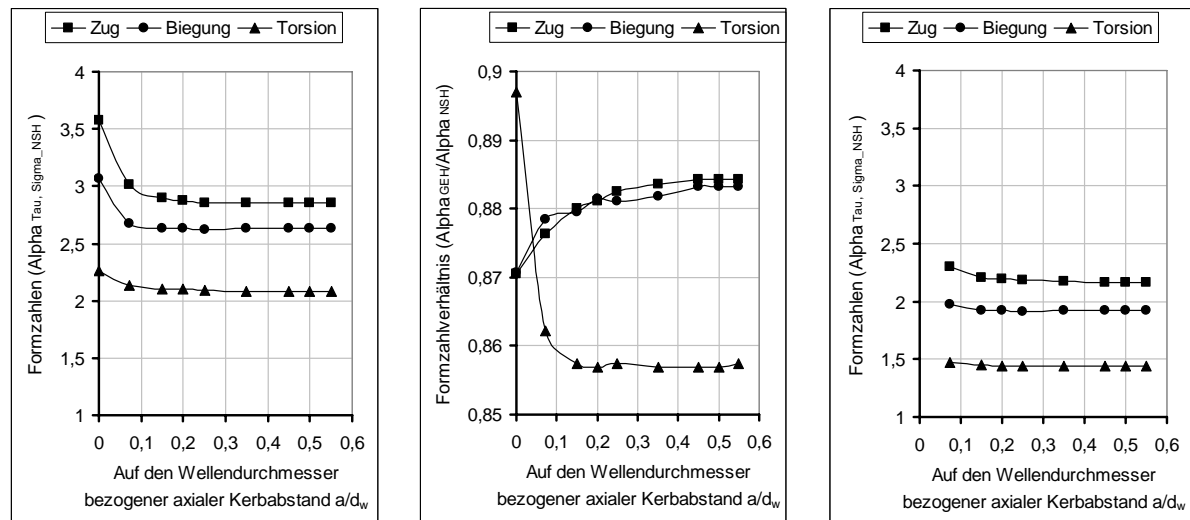
In der **Tabelle 4.1** sind beispielhaft enthalten: die einzelnen Formzahlen je nach Belastungsart im freien Auslauf für einige Verhältnisse a/d_w und die prozentualen Abweichungen der Formzahlwerte bei $a/d_w = 0,25$ in Bezug auf die Werte bei voller Überlagerung $a/d_w = 0$. **Bild 4.2** verdeutlicht die Verteilung der Vergleichsspannungen bei Torsion und Zug/Druck.

Die FE-Untersuchungen ergaben im Allgemeinen einen minimalen Abstand von $a = 0,25 \cdot d_w$ im Kerbgrund zwischen den Mittelpunkten der Verrundungen der Kerben ohne Auftreten einer Kerbüberlagerung, siehe **Bild 4.1**. Der Bereich der gestörten Spannungsverteilung beschränkt sich somit auf die engere Umgebung der Kerbe. Dieser Kerbabstand gilt für Torsion,

Biegung und Zug/Druck. Er hat auch seine Gültigkeit für die Auswertung nach der NSH oder der GEH, d.h. $a_{GEH} = a_{NSH} = 0,25 \cdot d_w$. Der gesamte Abstand wird durch Gl. (4.1) angegeben.

$$A_{ges.} = 0,25 \cdot d_w + r_{w-Auslauf} + r_{Absatz} \quad (4.1)$$

Mit diesem Abstand wird jedoch der ursprüngliche Nennspannungsverlauf über den kleinsten ungestörten Wellenquerschnitt nicht erreicht. Erst ab einem Abstand von $a = 0,5 \cdot d_w$ bei Torsion bzw. $a = 0,4 \cdot d_w$ bei Biegung und Zug/Druck ist die Spannungsüberhöhung an der Kerbe in axialer Richtung vollständig abgeklungen und wieder der ungestörte Nennspannungsverlauf über den Querschnitt zu erreichen.



a) Formzahlen im freien Auslauf

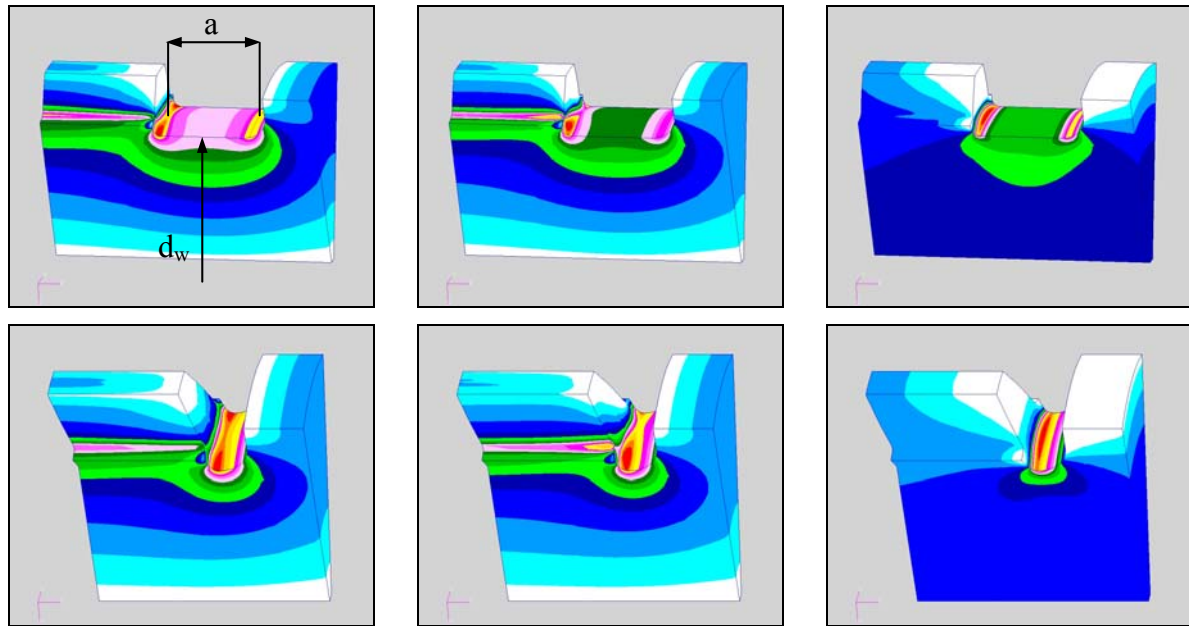
b) Verhältnis der Formzahlen nach GEH und NSH im freien Auslauf

c) Formzahlen im Wellenabsatz

Bild 4.1: Abhängigkeit der Formzahlen bei Zug, Biegung und Torsion vom auf den Wellendurchmesser bezogenen Kerbabstand a/d_w für die Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11 ($\rho_{fmin}/m = 0,16$; $x_l = 0,2$ mm; $d_w = 19$ mm; $d_{a1} = 24,6$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 21,65$ mm; $r/t_{a1-Absatz} = 0,5$; $r = 1,38$ mm; $r_w/t_{a1} = 0,2$; $r_w = 0,55$ mm und $d/D = d_w/d_{a1} = 0,775$; $\phi = 0^\circ$)

Tabelle 4.1: Zahlenwerte der Formzahlen im freien Auslauf je nach Belastungsart abhängig vom Verhältnis a/d_w für die Zahnwelle W25x2x11 ($d_w = 19$ mm; $d_{a1} = 24,6$ mm; $r_w/t_{a1} = 0,2$ und $d_w/d_{a1} = 0,775$; $\phi = 0^\circ$)

Belastungsart	Torsion		Biegung		Zug/Druck	
Formzahl im Auslauf	$\alpha_{\tau t-NSH}$	$\alpha_{\tau t-GEH}$	$\alpha_{\sigma b-NSH}$	$\alpha_{\sigma b-GEH}$	$\alpha_{\sigma zd-NSH}$	$\alpha_{\sigma zd-GEH}$
$a/d_w = 0$	2,262	2,029	3,063	2,667	3,574	3,111
$a/d_w = 0,15$	2,104	1,804	2,630	2,313	2,901	2,553
$a/d_w = 0,25$	2,095	1,796	2,625	2,313	2,859	2,523
$a/d_w = 0,50$	2,081	1,783	2,630	2,323	2,853	2,523
prozentuale Abweichung	8 %	13 %	16,7%	15,3 %	25 %	23,3%
$\Delta\% = \frac{\alpha_{\sigma,\tau}(a/d_w=0) - \alpha_{\sigma,\tau}(a/d_w=0,25)}{\alpha_{\sigma,\tau}(a/d_w=0,25)} \cdot 100\%$						



a) Torsion nach der GEH

b) Torsion nach der NSH

c) Zug/Druck nach der NSH

Bild 4.2: Spannungverteilung und Position der Spannungskonzentration an der Zahnwelle W25x2x11 mit freiem Auslauf; oben: $a/d_w = 0,25$ und unten: $a/d_w = 0$

Zur Verallgemeinerung der gewonnenen Ergebnisse hinsichtlich des Kerbabstandes wurden weitere Berechnungen bei Variationen der Kerbform, der Zähnezahlen sowie der Kerbschärfe realisiert. Hierbei wurden nicht nur die Kerbabstände zwischen Auslauf und Absatz untersucht, sondern auch zwischen zwei freien Ausläufen von auf einer Getriebewelle hintereinander angeordneten Zahnwellen. Dadurch wurden allgemeine Näherungsformeln für eine Festlegung des notwendigen Kerbabstandes in Abhängigkeit von der Kerbschärfe und der Belastungsart entwickelt (**Tabelle 4.2**). Sie sollen als Hilfsmittel bei der Dimensionierung von verzahnten Getriebewellen dienen. Unter Beachtung der Minimalwerte ist eine gegenseitige Beeinflussung der gegenüber liegenden Kerbformen auszuschließen. Es wird darauf hingewiesen, dass die Kerbabstände bei Torsion nach der GEH größer als die nach der NSH einzuschätzen sind. Bei Biegung oder Zug/Druck ist dies umgekehrt.

Tabelle 4.2: Näherungszusammenhänge zur Bestimmung des Kerbabstandes nach der NSH oder GEH zwischen zwei Zahnwellen mit freien Ausläufen (z.B. zwischen W25x0,5x48 und W25x2x11 oder zwischen W25x0,5x48 und W25x0,5x48) bzw. zwischen freiem Auslauf und äquivalentem Absatz

Gültigkeitsbereich			
$0,04 \leq r_w/t_{a1} < 0,15$		$0,15 \leq r_w/t_{a1} \leq 1$	
Beanspruchungsart: Torsion			
$\left(\frac{a}{d_w}\right)_{\pi-NSH} \approx 0,50$	$\left(\frac{a}{d_w}\right)_{\pi-GEH} \approx 0,65$	$\left(\frac{a}{d_w}\right)_{\pi-NSH} \approx 0,45$	$\left(\frac{a}{d_w}\right)_{\pi-GEH} \approx 0,60$
Beanspruchungsart: Zug/Druck oder Biegung			
$\left(\frac{a}{d_w}\right)_{\sigma d,b-NSH} \approx 0,55$	$\left(\frac{a}{d_w}\right)_{\sigma d,b-GEH} \approx 0,45$	$\left(\frac{a}{d_w}\right)_{\sigma d,b-NSH} \approx 0,50$	$\left(\frac{a}{d_w}\right)_{\sigma d,b-GEH} \approx 0,42$

4.2.2 Einfluss des konischen Übergangswinkels der Verzahnung

Ein weiterer Faktor, der sich beeinflussend auf die Form einer Zahnwelle auswirkt, ist die Gestaltung des auslaufseitigen Verzahnungsbeginns mit einem Konus (**Bild 4.3**).

Ein konischer Übergang führt zur Entschärfung der Kerbe im freien Auslauf, da sich der Übergangswinkel vom Wellendurchmesser zur Verzahnung vergrößert. Dadurch verkleinert sich die nutzbare Verzahnungslänge. Die anderen Verzahnungsparameter bleiben jedoch hiervon unberührt. Für die vorliegende Untersuchung weist dies auf einen eindeutigen Zusammenhang mit der Formzahl hin.

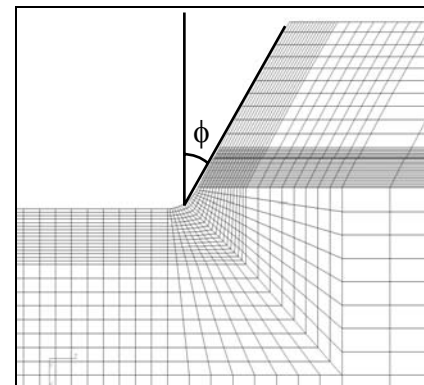
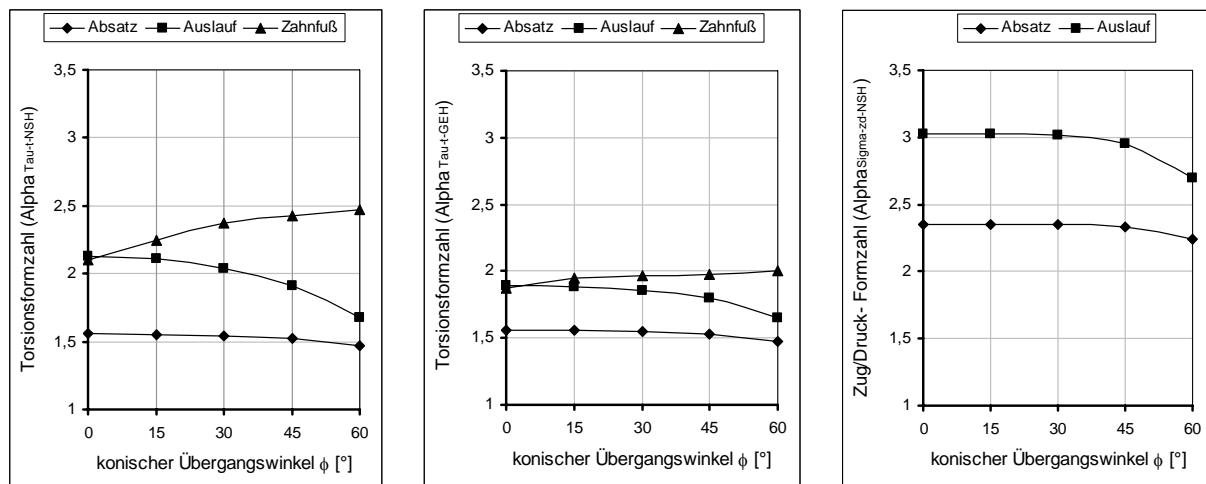


Bild 4.3: Zahnwelle mit einem konischen Verzahnungsübergang

Untersucht wurde dabei die Auswirkung unterschiedlicher Übergangswinkel $\phi = 0^\circ; 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ$ und 60° auf die Formzahlen an der Welle W40x2x18. In **Bild 4.4** ist dieser Einfluss dargestellt.



a) Torsionsformzahlen nach NSH

b) Torsionsformzahlen nach GEH

c) Zug/Druckformzahlen nach NSH

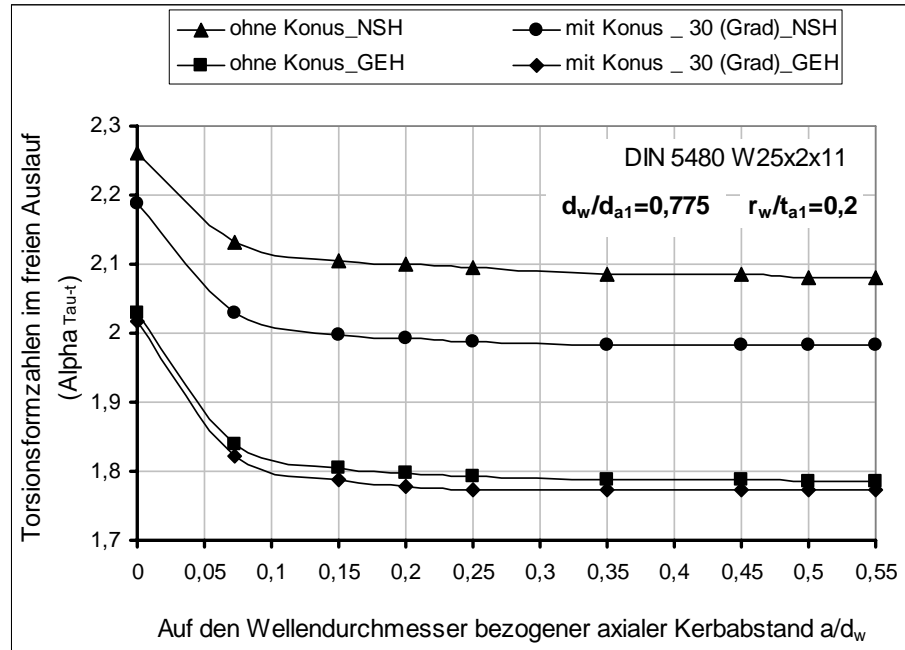
Bild 4.4: Abhängigkeit der Formzahlen vom konischen Übergangswinkel am Verzahnungsauslauf für die Zahnwelle DIN 5480 W40x2x18 ($\rho_{fmin}/m = 0,16$; $x_l = 0,2$ mm; $d_w = 33$ mm; $d_{a1} = 38,6$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 35,6$ mm; $r/t = 0,5$; $r = 1,4$ mm; $r_w/t_{a1} = 0,2$; $r_w = 0,56$ mm und $d/D = d_w/d_{a1} = 0,885$; $a/d_w = 0,25$; $\phi = 0^\circ..60^\circ$)

Zur Abschätzung des Formzahleinflusses durch den Konus kann an dieser Stelle folgende Aussage getroffen werden. Die Formzahl ist außer von den Kennwerten r_w/t_{a1} und d_w/d_{a1} vom Konuswinkel ϕ abhängig. Die Zahnwellen mit konischem Querschnittsübergang rufen eine geringere Kerbwirkung als die konuslosen Zahnwellen (mit spitzem Übergang) hervor. Bei steigendem Konus vermindern sich die Formzahlen im freien Auslauf.

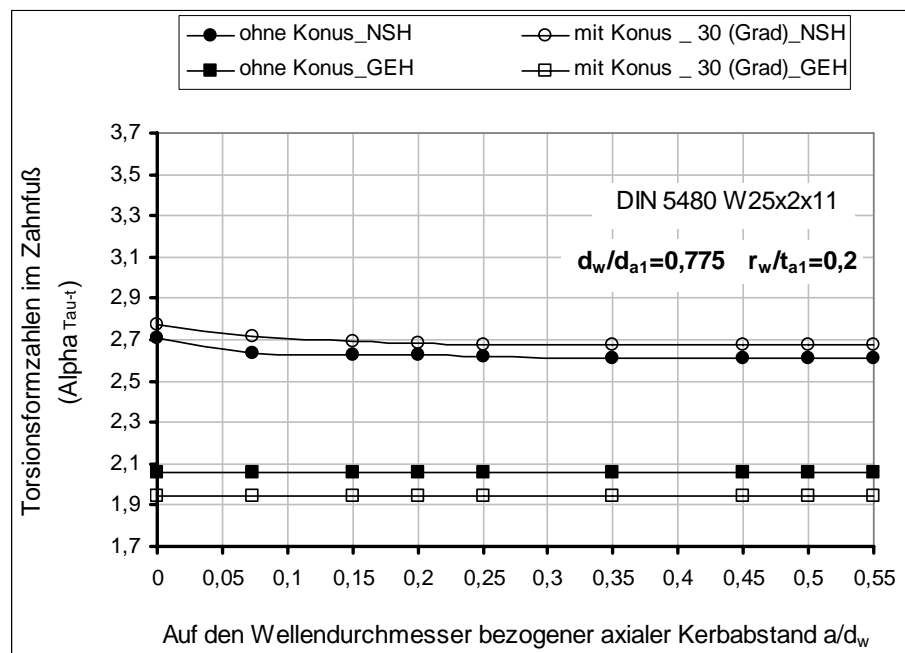
Eine wesentliche Reduzierung der Torsionsformzahl lässt sich ab einem Konuswinkel $\phi > 20^\circ$ erzielen. Bei Zug/Druck und Biegung kann man den Konuseinfluss erst ab einem Winkel von $\phi > 40^\circ$ in Form einer kleinen Abminderung der Formzahl im Auslaufbereich feststellen. Der Grund für die Erhöhung der Formzahlwerte hin zu kleineren Übergangswinkeln liegt in der Vertiefung der hierdurch entstehenden Kerbenform.

Im Zahnfußbereich führt eine Steigerung des Übergangswinkels zur Erhöhung der Torsionsformzahl. Der Ort der Spannungsspitze im Zahnfuß verlagert sich weit von der Auslaufnähe.

Beim Wellenabsatz ist der Einfluss der Aufbringung eines variierten konischen Übergangs sowohl bei Torsion als auch bei Biegung deutlich geringer, siehe (Bild 4.4). In **Bild 4.5** sind Vergleiche der Torsionsformzahlen im Zahnfuß und Auslauf der Zahnwelle W25x2x11 mit und ohne Konus abhängig vom Verhältnis a/d_w enthalten.



a) Torsionsformzahlen im freiem Auslauf



b) Torsionsformzahlen im Zahnfußbereich

Bild 4.5: Darstellung und Vergleich der Formzahlen nach der **NSH** und der **GEH** in Abhängigkeit vom konischen Übergangswinkel sowie vom Kerbabstandsverhältnis a/d_w (siehe dazu Bild 3.1)

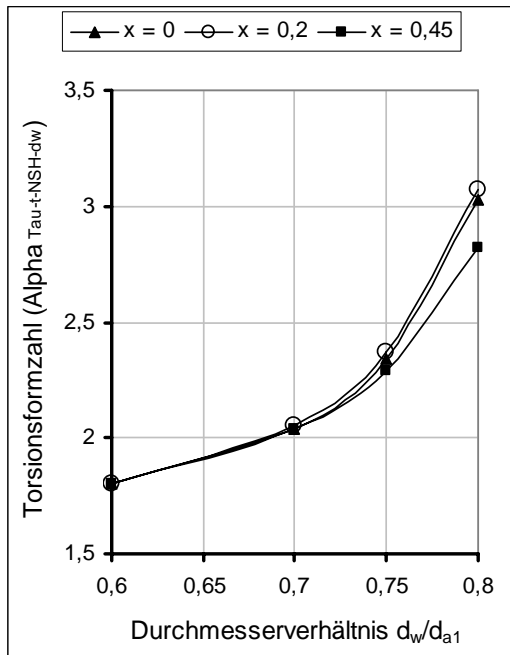
4.2.3 Einfluss der Profilverschiebung

Hierbei soll der Einfluss der Variation der Profilverschiebungsfaktoren auf die Werte der an den kritischen Stellen auftretenden Formzahlen analysiert werden. Ausführungen über die Profilverschiebung nach *DIN 5480* sind im **Abschnitt 2.2.2** enthalten.

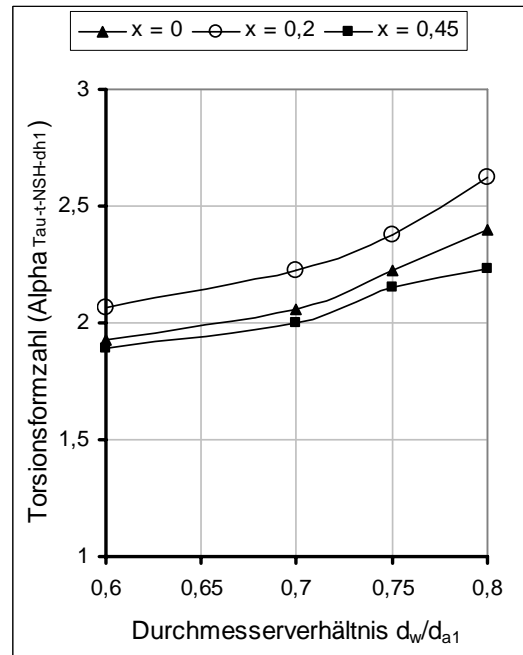
Die Profilverschiebungsfaktoren wurden an der Zahnwelle W25x2x11 in drei Schritten ($x_1 = 0; 0,2$ und $0,45$ je Durchmesser Verhältnis $d_w/d_{a1} = 0,6; 0,7; 0,75$ und $0,8$) variiert. Die Kerbschärfe des freien Auslaufs $r_w/t_{a1} = 0,1$ sowie das Fußausrundungsverhältnis $\rho_{f-min}/m = 0,16$ wurden konstant gehalten. Einen Überblick über die ermittelten Formzahlen zeigt **Bild 4.6**.

Grundsätzlich ist den dargestellten Formzahlverläufen zu entnehmen, dass bei Variation des Profilverschiebungsfaktors nur deutlich geringfügige Unterschiede zwischen den Formzahlen und nur bei sehr scharfen Auslaufkerben und kleinen Zähnezahlen festgestellt werden können. Mit hohen Zähnezahlen ist dieser Einfluss nicht erkennbar.

Der äußerst geringe Einfluss der Profilverschiebung auf die Formzahlen im freien Auslaufbereich bei Torsion, Biegung und Zug/Druck kann außer Acht gelassen werden. Gleiches gilt in etwa auch für die Torsionsformzahl im Zahnfußbereich. Die feststellbaren Unterschiede zwischen den Formzahlen sind in erster Linie auf die Veränderung des für die Berechnung der Nennspannung benötigten Ersatzdurchmessers d_{h1} infolge der Variation der Profilverschiebungsfaktoren zurückzuführen.



a) Torsionsformzahl im freien Auslaufbereich



b) Torsionsformzahl im gestörten auslaufnahen Zahnfußbereich

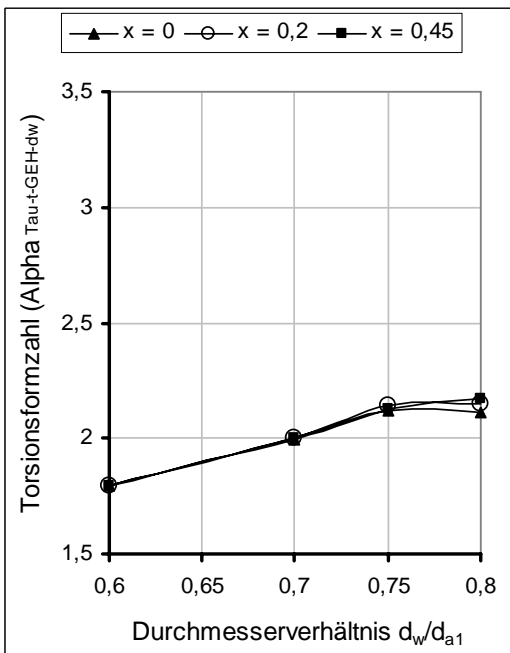
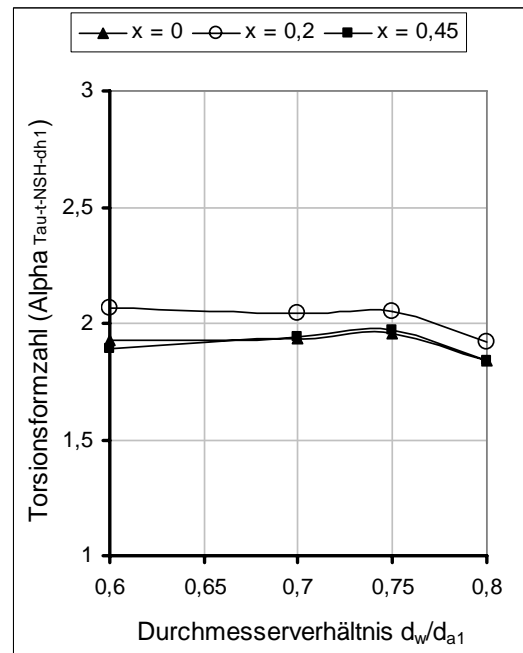

 c) Torsionsformzahl nach der **GEH** im freien Auslaufbereich

 d) Torsionsformzahl nach der **NSH** (bzw. **GEH**) im ungestörten Zahnfuß

Bild 4.6: Einfluss der Profilverschiebungsfaktoren auf die Werte der Formzahl im freien Auslauf und Zahnfuß der Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11; für eine konstante Kerbschärfe $r_w/t_{a1} = 0,1$

4.2.4 Einfluss der Verbindungsbreite

Zur Abschätzung des Einflusses der Verbindungsbreite (bzw. Lastbreite) auf die Formzahl im Zahnfuß oder Auslauf sind mit räumlichen FE-Modellen Variationen des Verhältnisses $b/d_B = 0,05$ bis 1 für unterschiedliche Zahnwellen unter Torsion untersucht worden. *Tabelle A-1* in der *Anlage A* beinhaltet die geometrischen Parameter der untersuchten Zahnwellen. Für die kleinen Verhältnisse $b/d_B < 0,4$ kann man von den scheibenförmigen Zahnwellenverbindungen sprechen. Als Anwendungsgebiete sind z.B. die Lamellenpaketen für die Mitnehmerverzahnungen (Kupplungen und Bremsen) zu bezeichnen.

Als Bewertungskriterium zum Vergleich der aus der Flankenpressung $p_{\text{nenn}} = 100 \text{ N/mm}^2$ resultierenden Beanspruchungen der Zahnwelle wird die Formzahl herangezogen. Sie beschreibt dabei die Lastüberhöhung der Flankenpressung. Es bietet sich an, den Mittelwert der Flankenpressung als Nennspannung zu definieren. Dadurch erhält man Form- bzw. Kerbfaktoren, die jedoch nicht den Formzahlen im klassischen Sinne entsprechen, da die mittlere Flankenpressung nicht mit der klassischen Torsionsnennspannung übereinstimmt.

Die Ergebnisse der Formzahlen sind in **Bild 4.7** in Abhängigkeit vom Verhältnis b/d_B und von den Zähnezahlen enthalten. Es ergab sich für die untersuchten Geometrien ein ausgeprägter Grenzwert für die Verbindungsbreite bei $b/d_B = 0,6$. Dies ist identisch mit der nach *DIN 5466* genormten Verbindungsbreite. Die Auslaufgeometrie hat keinen Einfluss auf dieses Ergebnis.

Dieses Verhältnis hat seine Gültigkeit für die beiden Nablagen (0) und (1), für die Zahnwellen mit freiem und mit gebundenem Auslauf, sowohl bei der Auswertung nach der GEH als auch nach der NSH. Für weitere FE-Rechnungen zur Formzahlermittlung wird die Länge der Flächenlast bzw. die Nabenbreite mit $b = 0,6 \cdot d_B$ angenähert.

Bei zunehmender Verbindungsbreite, d.h. für $b > 0,6 \cdot d_B$ lässt sich die Torsionsformzahl unter gleich bleibender Nennflankenpressung p_{nenn} nicht weiter absenken. Dabei verursachte eine Variation der Verbindungsbreite bei kleinen Zähnezahlen $z < 15$ nur ein leichtes Abfallen der Formzahlverläufe im Auslaufbereich, bei großen Zähnezahlen nahm die Formzahl dagegen stark ab (*Bild 4.7*). Die Änderung der Formzahlwerte blieb im Zahnfuß für die Zug- und Druckseiten ab $b/d_B \geq 0,5$ unter ca. 10 %.

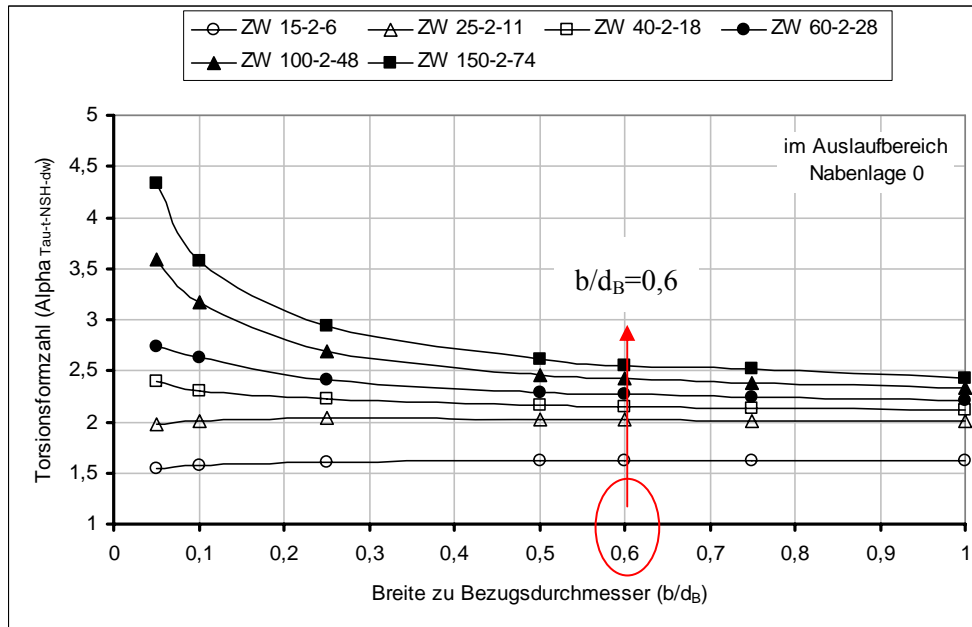
Die maximalen Vergleichsspannungen nach der GEH oder der NSH im Zahnfuß oder im Auslauf steigen bei konstanter Nenn-Flankenpressung $p_{\text{nenn}} = 100 \text{ N/mm}^2$ mit zunehmender Verbindungsbreite linear an. Das bedeutet, es besteht eine direkte Proportionalität zwischen der Beanspruchung an der Kerbe und der Flankenpressung. Auf die Position des Spannungsmaximums haben die Breitenvariationen einen geringen Einfluss. Ab dem Verhältnis $b/d_B \geq 0,2$ ist für alle Zahnwellen keine Änderung der Lage der Spannungsmaxima im Auslauf (weder nach GEH noch nach NSH) zu erkennen.

Die in *DIN 5466-2 /N5/* angegebenen Näherungsfunktionen zur rechnerischen Abschätzung des Tragbreitenfaktors k_b (bzw. Lastüberhöhungsfaktor) für den Festigkeitsnachweis drehmomentbelasteter Verbindungen nach *DIN 5480* gelten auch für die Verbindungen mit freiem und gebundenem Auslauf. Die Näherungsgleichungen gehen auf die Untersuchungsergebnisse von *Villmer /Vil84/* zurück.

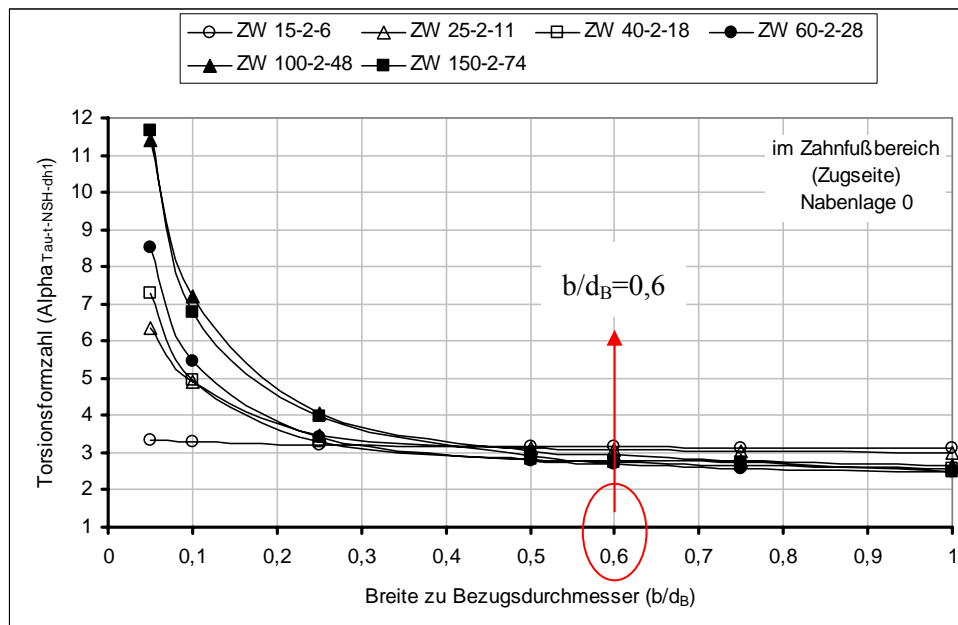
Der Breitenfaktor beschreibt dabei den Übertragungsmechanismus in Abhängigkeit von der axialen Komponente. Er lässt sich für das Verhältnis $b/d_B = 0,6$ mit der Gl. (4.2) bestimmen.

Für Werte $b/d_B < 0,6$ erfolgt die Ermittlung als Funktion der Verbindungsbreite durch die Gl. (4.3), sofern der Lastüberhöhungswert für das Verhältnis $b/d_B = 0,6$ bekannt ist.

$$k_{b0,6} = 20,4 \cdot \left[1 - e^{\left(\frac{z+95}{34,8+16 \cdot x} \right)} \right] - 16 \quad (4.2) \quad k_b = \frac{1}{0,6} \cdot k_{b0,6} \cdot \left(\frac{b}{d_B} \right) \quad (4.3)$$



a) Abhängigkeit der Torsionsformzahlen im **freien Auslaufbereich** vom Verhältnis b/d_B



b) Abhängigkeit der Torsionsformzahlen im **Zahnfußbereich** vom Verhältnis b/d_B

Bild 4.7: Qualitative Abhängigkeit der Torsionsformzahlen nach der NSH im freien Auslauf (a) und im Zahnfuß (b) vom Verhältnis Verbindungsbreite zu Bezugsdurchmesser b/d_B unter gleichbleibender Nennflankenpressung $p_{nenn} = 100 \text{ N/mm}^2$ für unterschiedliche Zahnwellenvarianten; Lastmodell: Flankenpressung als Ersatz für die Nabenlage (0)

4.2.5 Einfluss der Zähnezahl

Neben verschiedenen anderen Geometrieparametern, die sich auf die Form einer Zahnwelle auswirken, wird das Spannungsverhalten durch die Zähnezahl bestimmt. Der Grund hierfür ist die relative Zahngrößenänderung. Wird beispielsweise die Form einer Zahnwelle von sechs auf achtzehn Zähne geändert, so wird hierdurch die Formzahl stark beeinflusst, da sich die Zahngröße und damit die Kerbform stark verkleinern. Wird hingegen die Zähnezahl von sieben auf achtzig verändert, so wird die Formzahl voraussichtlich kaum variieren, da die relative Zahngröße hierbei kaum kleiner wird.

Für den Entwurf von Zahnwellen bietet die *DIN 5480 /N1/* eine Auswahl an Geometrien, die sich über den Bereich von 6 bis zu maximal 82 Zähnen erstreckt. Die zu untersuchenden Zähnezahlen wurden von niedrigen bis zu hohen Zähnezahlen in einer geometrischen Reihe (6; 11; 18; 28; 48 und 78) variiert. Sie umfassen damit den gesamten nach *DIN 5480* standardisierten Zähnezahlbereich.

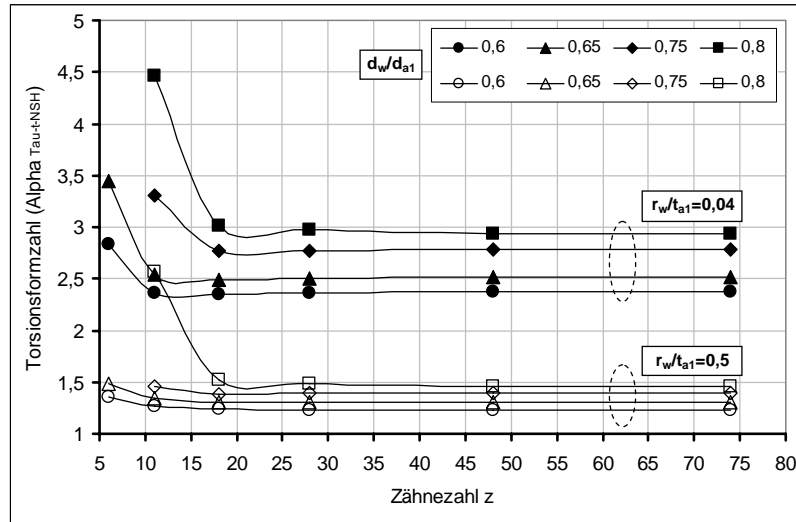
Hierbei ist die Auswahl der Kerbparameter im Auslaufbereich (Kerbschärfe r_w/t_{a1} und Absatzhöhe d_w/d_{a1}) von großer Bedeutung. Deshalb werden hier die Berechnungen in zwei verschiedene Wege bezüglich der kerbbeschreibenden Parameterauswahl durchgeführt. Zum einen wird von einem variablen Wellendurchmesser $d_w = d_{f1} - 1,6 \text{ mm}$ ausgegangen, zum anderen werden die Zahnwellen bei konstantem Durchmesser Verhältnis $d_w/d_{a1} = \text{const.}$ untersucht. In beiden Fällen müssen die anderen Einflussparameter (z.B. $x_1 = 0,2 \text{ mm}$ und $\rho_{f-\min}/m = 0,16$) invariant bleiben.

Erster Untersuchungsweg

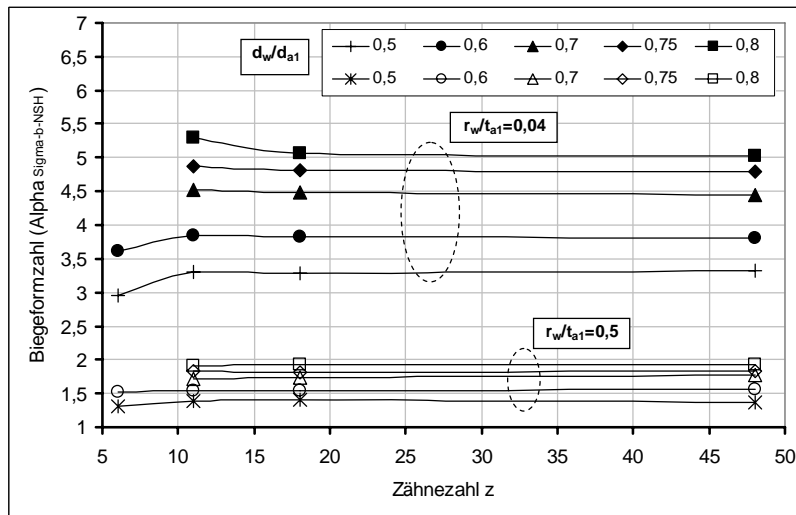
Bei dieser Variantenrechnung (d.h. bei $d_w/d_{a1} = \text{const.}$ und $r_w/t_{a1} = \text{const.}$ jedoch mit veränderlichen Kerbtiefen und Kerbradien) wurden die Zahnwellen W15x2x6; W25x2x11; W40x2x18 und W100x2x48 nach *DIN 5480* untersucht. Die Formzahldarstellungen in den **Bildern 4.8** und **4.9** zeigen den Einfluss der Variation der Zähnezahlen auf die Formzahlen im freien Auslauf bei Torsion, Biegung und Zug/Druck.

Bei den hier durchgeführten FE-Untersuchungen kann man feststellen, dass im Bereich großer Zähnezahlen $z \geq 18$ kein signifikanter Einfluss auf die Torsionsformzahlen zu erwarten ist. Die Formzahlwerte nähern sich Grenzwerten. Im Bereich geringer Zähnezahlen $z < 18$ wird eine starke Abhängigkeit der Formzahl insbesondere bei scharfen Kerbradien nachgewiesen. Die Formzahlen gleicher Auslauf-Kerbform sind bei Zahnwellen mit kleinen Zähnzahlen höher als bei großen Zähnezahlen. Nach der GE-Hypothese hat die Variation der Zähnezahlen im Bereich niedriger Zähnezahlen und kleiner Kerbradien einen geringfügigen Einfluss auf die Torsionsformzahlen, siehe *Bild 4.9-a*.

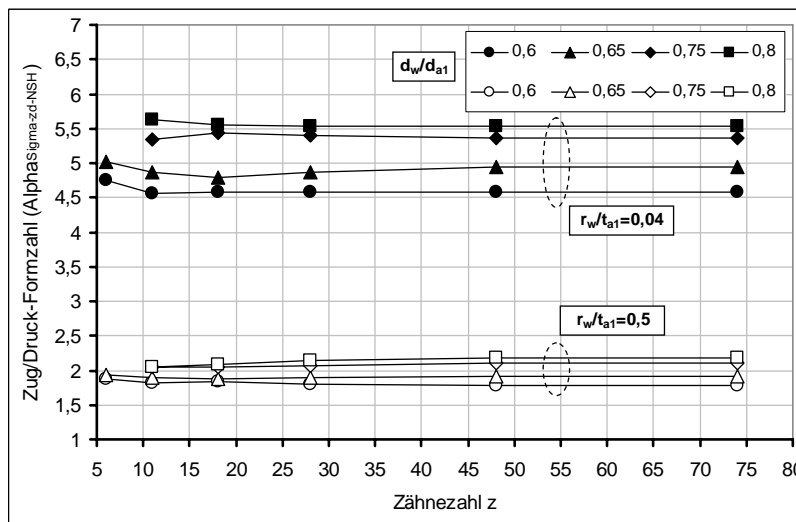
Bei Zug/Druck und Biegung ist die Abhängigkeit der Formzahlen im Auslaufbereich von den Zähnezahlen sowohl nach der GEH als auch nach der NSH vernachlässigbar. Diese Formzahlen hängen in erster Linie von den Kerbkombinationen d_w/d_{a1} und r_w/t_{a1} ab.



a) Torsionsformzahlen im freien Auslauf

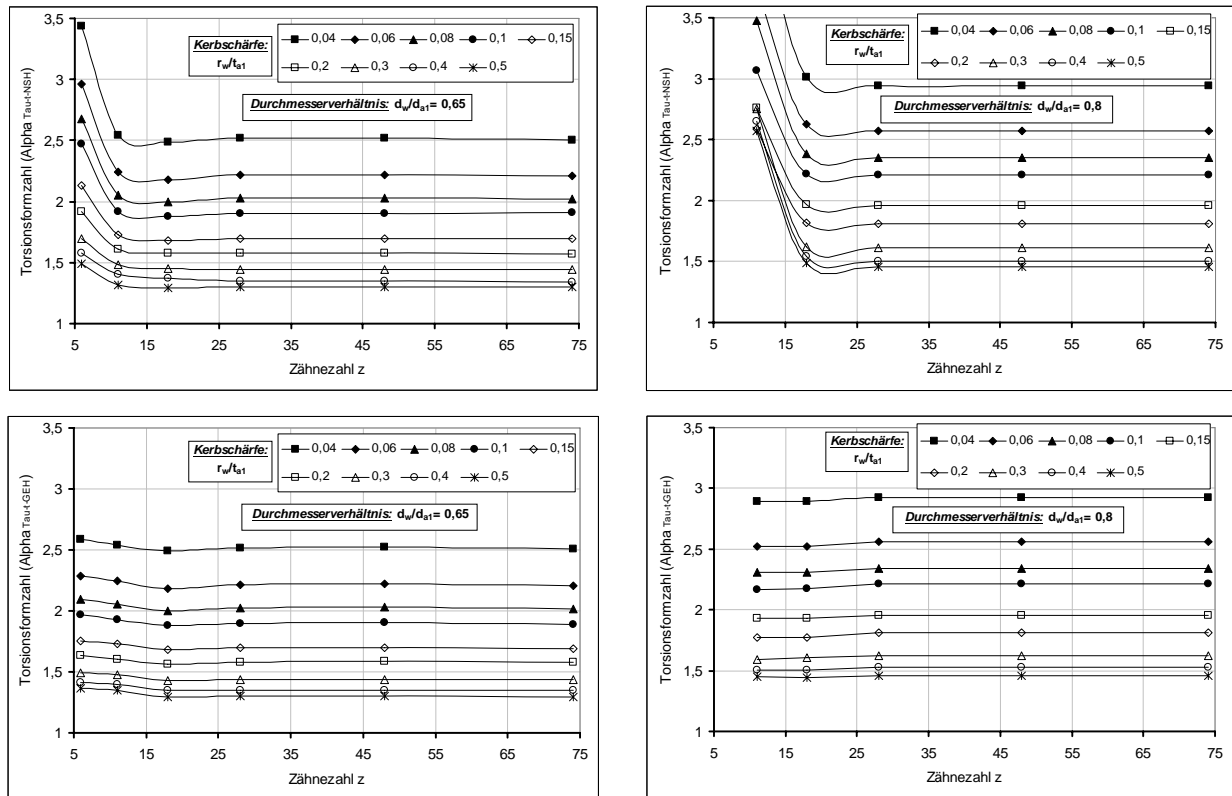


b) Biegeformzahlen im freien Auslauf

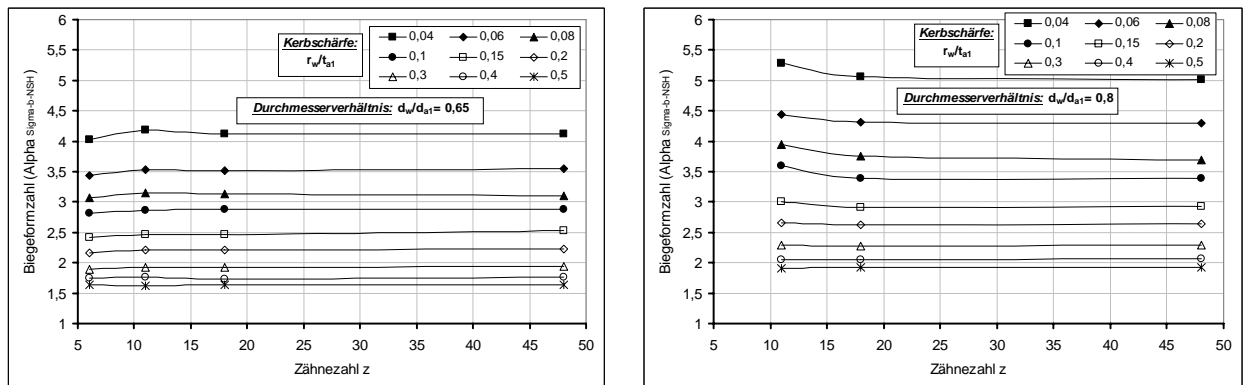


c) Zug/Druckformzahlen im freien Auslauf

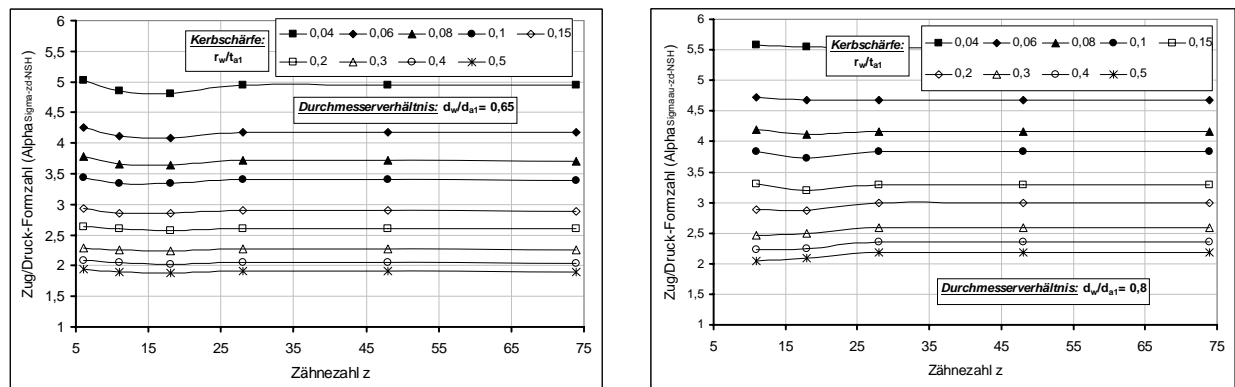
Bild 4.8: Darstellung des Einflusses der Zähnezahlen auf die Größe der Formzahlen nach der NSH im freien Auslaufbereich bei Torsion (a), Biegung (b) und Zug/Druck (c); in Abhängigkeit vom Durchmesser Verhältnis bei konstanter Kerbschärfe, $\tau_{l-nenn-NSH-dw} = \sigma_{z,d,b-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$



a) Torsionsformzahlen im freien Auslauf; oben: nach der NSH und unten: nach der GEH



b) Biegeformzahlen im freien Auslauf nach der NSH



c) Zug/Druck-Formzahlen im freien Auslauf nach der NSH

Bild 4.9: Einfluss der Zähnezahlen auf die Formzahlen im freien Auslauf je Belastungsart; in Abhängigkeit von der Kerbschärfe bei konstantem Durchmesser Verhältnis, links: $d_w/d_{a1} = 0,65$ und rechts: $d_w/d_{a1} = 0,8$

Zweiter Untersuchungsweg

Die variierten Verzahnungsdaten und die geometrischen Kerbvarianten für diese Untersuchung sind in der *Tabelle A-1* in der *Anlage A* aufgeführt. Für alle untersuchten Zahnwellen gelten die Kerbschärfe $r_w/t_{a1} = 0,2$ und der Wellendurchmesser d_w im Kerbgrund $d_w = d_{f1} - 1,6$ mm (d.h. eine konstante Kerbtiefe $t_{a1} = (d_{a1} - d_w) / 2 = \text{const.}$).

In **Bild 4.10** sind die Formzahlverläufe im Auslauf- sowie im Zahnfußbereich je Belastungsart als Funktion der Zähnezahln zusammengestellt. Außerdem beinhaltet dieses Bild Näherungsgleichungen zur Beschreibung der Formzahlen für das interessierende Verhältnis $b/d_B = 0,6$ in Abhängigkeit vom geometrischen Ort der Flankenpressungslage (*Bild 3.17*), von der Spannungshypothese (GEH bzw. NSH) sowie von der Zähnezahln.

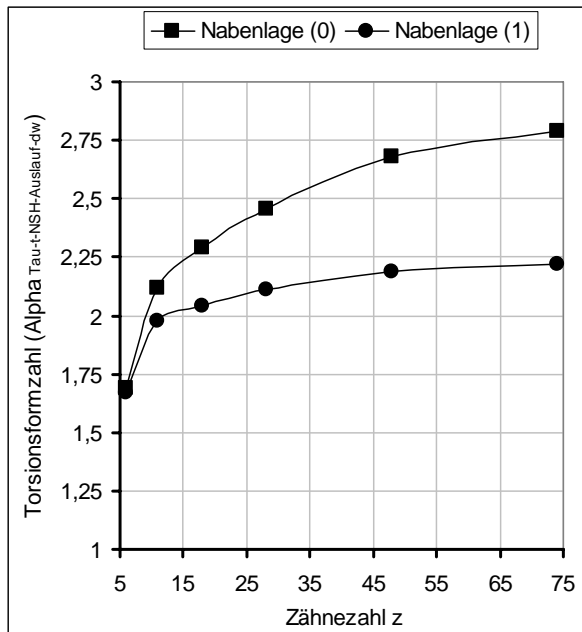
Die Ergebnisse zeigen, dass der Wert der maximalen Spannung im freien Auslauf stark zwischen kleiner und großer Zähnezahln variiert. Die Formzahl ist von der Anzahl der Zähne, von den Kerbparametern der Auslaufgeometrie sowie von der Position der Drehmomentaufbringung abhängig.

Mit zunehmender Zähnezahln erhöhen sich die Torsionsformzahlen im freien Auslauf. Im Zahnfuß verkleinern sie sich insbesondere nach der NSH. Diese Aussage gilt jedoch nur unter Berücksichtigung der hier ausgewählten Geometrieparameter und der verwendeten Nennspannungsdefinitionen. Die aus der Nabenlage (0) resultierenden Formzahlen im Auslauf liegen über denen für die Nabenlage (1) (*Bild 4.10-a* und *b*). Ein Grund für den im *Bild 4.10* gezeigten ansteigenden Formzahlverlauf im freien Auslauf bzw. abfallenden Verlauf im Zahnfuß ist nicht nur auf die Zahnformveränderung, sondern auch auf die Geometrieänderung des Auslaufes infolge der zunehmenden Absatzhöhe d_w/d_{a1} zurückzuführen.

Bei den Belastungsarten Zug/Druck und Biegung zeigt der Verlauf der Formzahlen eine deutliche Steigerung mit zunehmender Zähnezahln, siehe *Bild 4.10-d*. Das ist wiederum auf die veränderte Geometrie des Auslaufes zurückzuführen.

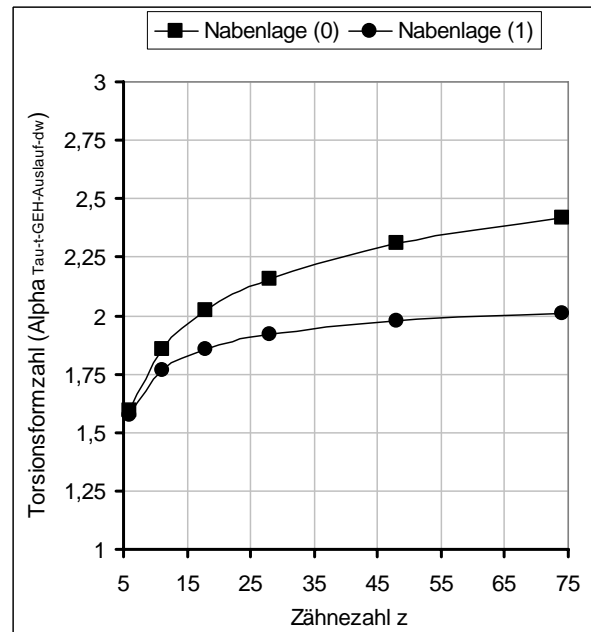
Zur Verdeutlichung der Auswirkung der Nennspannungswahl (bezogen auf d_{h1} oder d_w) auf die Formzahldarstellung und Ergebnisinterpretation hinsichtlich der gegenseitigen Beeinflussung der Kerben im Zahnfuß und im Auslauf sind die Torsionsformzahlen über der Zähnezahln in **Bild 4.11** wiedergegeben.

Durch Vergleiche der Formzahlen im Auslauf und Zahnfuß, abhängig von Zähnezahln, Nennspannungsdefinition sowie Vergleichsspannungshypothese kann bestimmt werden, an welche Stelle Bruchgefahr besteht bzw. die schärfste Kerbwirkung auftritt. Der Ort des Höchstwertes der Vergleichsspannung nach der NSH oder der GEH liegt für die untersuchten Zahnwellen im freien Auslauf, d.h. $\tau_{t\text{-max-Auslauf}} > \tau_{t\text{-max-Zahnfuß}}$.



$$\alpha_{\pi-NSH-d_w-Nabenlage(0)} \approx 0,43 \cdot \ln(z) + 1,02$$

$$\alpha_{\pi-NSH-d_w-Nabenlage(1)} \approx 0,2 \cdot \ln(z) + 1,4$$

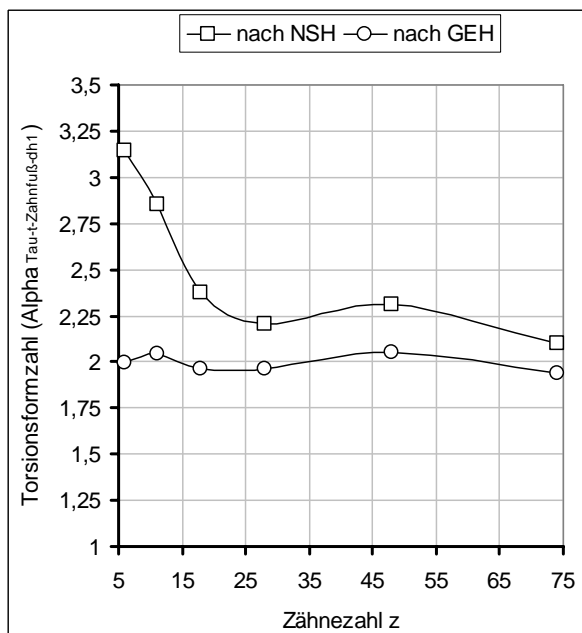


$$\alpha_{\pi-GEH-d_w-Nabenlage(0)} \approx 0,32 \cdot \ln(z) + 1,05$$

$$\alpha_{\pi-GEH-d_w-Nabenlage(1)} \approx 0,17 \cdot \ln(z) + 1,34$$

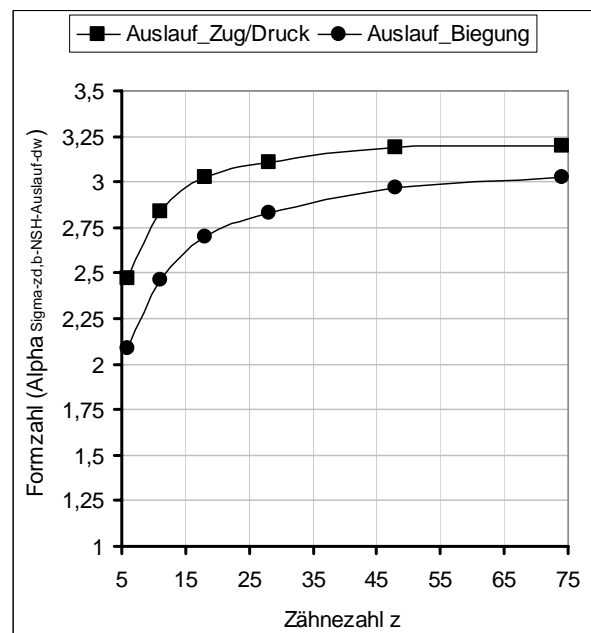
a) Torsionsformzahl im freien Auslauf nach der NSH

b) Torsionsformzahl im freien Auslauf nach der GEH



$$\alpha_{\pi-NSH-d_{h1}-Zahnfuß} \approx -0,41 \cdot \ln(z) + 3,76$$

$$\alpha_{\pi-GEH-d_{h1}-Zahnfuß} \approx -0,015 \cdot \ln(z) + 2,04$$

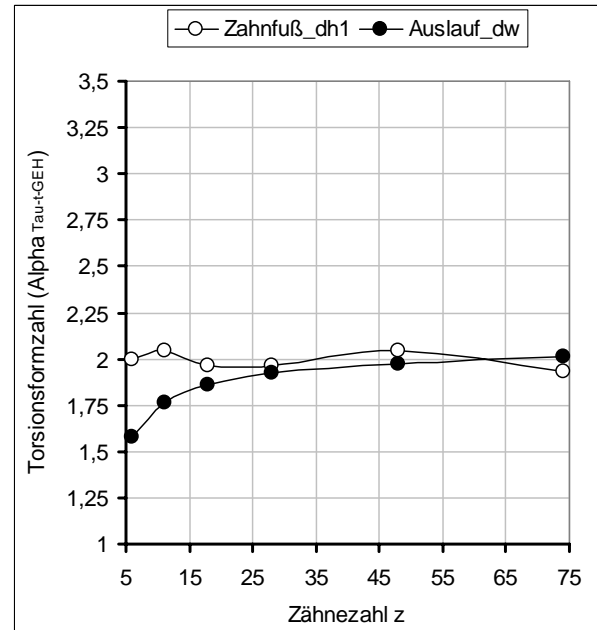
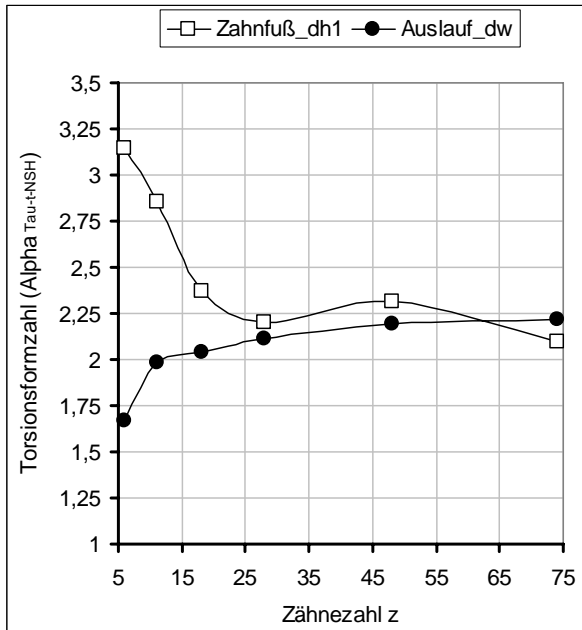


$$\alpha_{\sigma d,b-GEH} \approx 0,885 \cdot \alpha_{\sigma d,b-NSH}$$

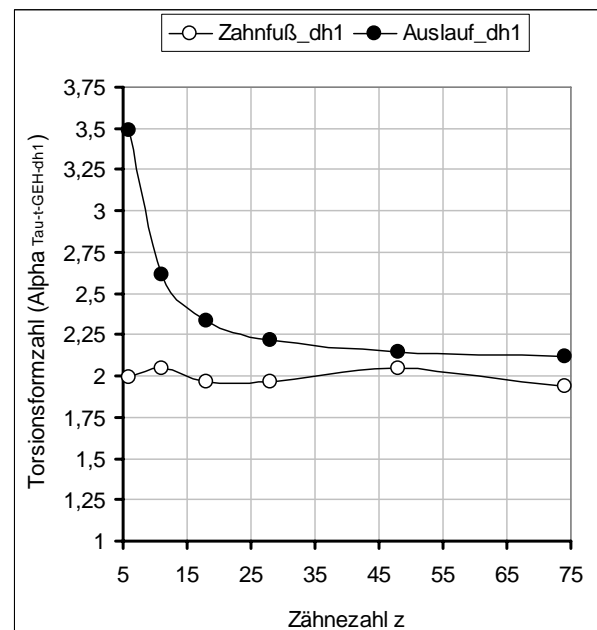
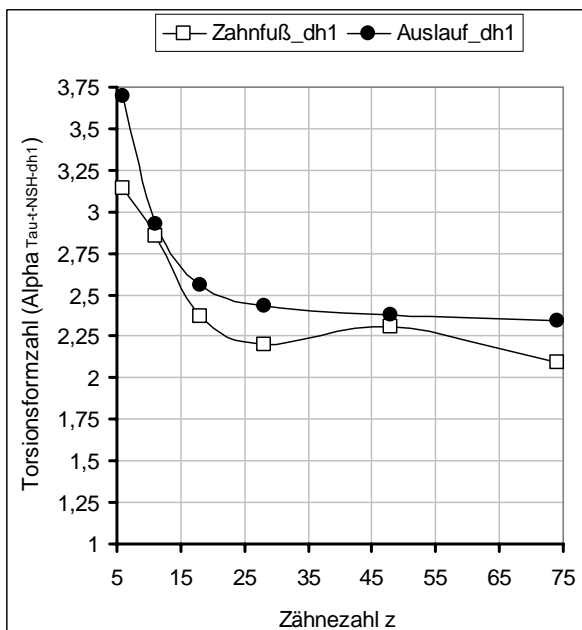
c) Torsionsformzahl im Zahnfußbereich (für NL „1“) nach der NSH und der GEH

d) Zug- und Biegeformzahl im freien Auslauf nach der NSH

Bild 4.10: Darstellung der Formzahlkurven für die Zahnwellen mit freiem Auslauf in Abhängigkeit von Zähnezahl, ($d_w = d_f - 1,6 \text{ mm}$ und $r_w/t_{a1} = 0,2$ für alle Zahnwellengeometrien)



a) Torsionsformzahl im freien Auslauf bezogen auf d_w und im Zahnfuß bezogen auf d_{h1} ; **links:** nach der NSH und **rechts:** nach der GEH. Es gilt: $\alpha_{\pi-Auslauf-d_w} < \alpha_{\pi-Zahnfuß-d_{h1}}$



b) Torsionsformzahl im freien Auslauf und im Zahnfuß bezogen auf d_{h1} ; **links:** nach der NSH und **rechts:** nach der GEH. Es gilt: $\alpha_{\pi-Auslauf-d_{h1}} > \alpha_{\pi-Zahnfuß-d_{h1}}$

Bild 4.11: Vergleich der Formzahlkurven bei Torsion im Zahnfußbereich und im freien Auslauf für Zahnwellen in Abhängigkeit von der Zähnezahl und der Nennspannungsdefinition; ($d_w = d_{f1} - 1,6 \text{ mm}$ und $r_w/t_{a1} = 0,2$ für alle Zahnwellengeometrien)

4.2.6 Einfluss des Zahnfußausrundungsverhältnisses

Frühere Spannungsanalysen (z.B. /Vil84/ und /Koh86/) an verzahnten Wellen ohne Auslauf zeigten, dass bei der Belastung einer Zahnscheibe die höchsten Spannungswerte in den Zahnfußradien auftreten. Dementsprechend ist bei Zahnwellen mit freiem Auslauf auch der Zahnfußrundungsradius als einer der bestimmenden Faktoren der Formzahlentwicklung definiert.

Durch eine Vergrößerung der Fußausrundungsradien bei sonst unveränderter Zahngeometrie lässt sich der Wellenquerschnitt im Zahnfußbereich geringfügig vergrößern. Dadurch nehmen die maximalen Fußspannungen bedingt durch die geringere Kerbschärfe ab. Deshalb werden für höhere Rundungsradien fallende Werte der Formzahl im Zahnfußgebiet erwartet.

Für die Erklärung des Einflusses der Fußrundung auf die Formzahlen werden immer Zahnwellen mit gleichem Quotienten von Radius und Modul zusammengestellt, um sicherzustellen, dass Formzahlergebnisse gleichwertiger Zahnfußradien zusammengetragen werden, insbesondere dann, wenn die Zahnwellen unterschiedliche Moduln besitzen. Hierbei wurden drei unterschiedliche Quotientenwerte von $\rho_f/m = 0,16$; $0,23$ und $0,3$ untersucht, wobei das nach *DIN 5480* kleinste zulässige Fußausrundungsverhältnis $0,16$ ist. Die sämtlichen Geometrieparameter der untersuchten Zahnwellen sind in der *Tabelle A-1* in der *Anlage A* aufgeführt. Der Einfluss der Profilverschiebung kann in erster Näherung vernachlässigt werden.

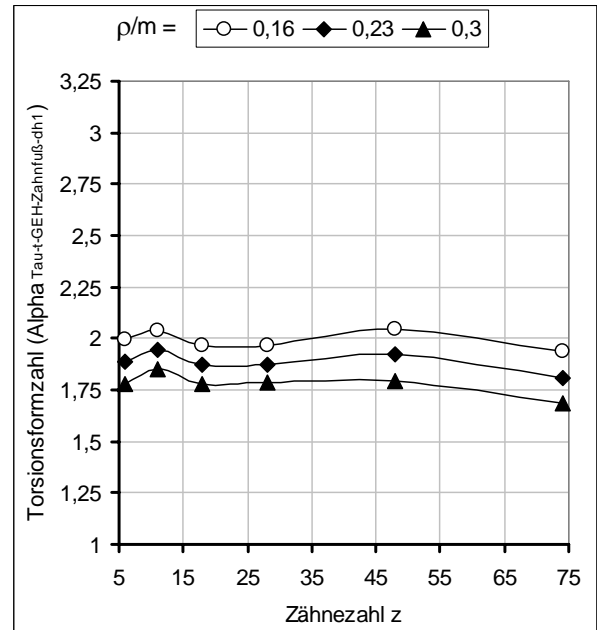
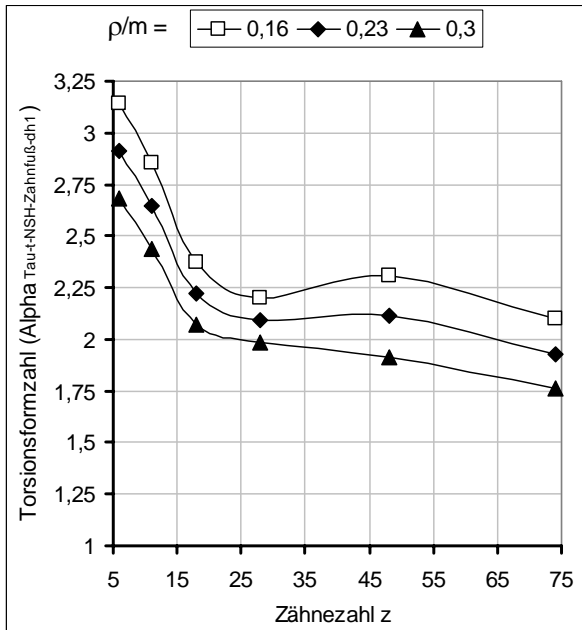
Der Einfluss des Fußausrundungsverhältnisses auf die Torsionsformzahl wird als Funktion der Zähnzahl durch **Bild 4.12** belegt. Die ermittelten Formzahlen gelten über einen großen nach *DIN 5480* festgelegten Zähnezahnbereich. Die Zahnfußspannungen sind deutlich von den Fußrundungsradien abhängig. Die höchsten Spannungen sind bei der Verwendung des minimalen Verhältnisses $\rho_{f-min}/m = 0,16$ auf Grund der größten Kerbwirkung aufgetreten.

Je kleiner der Fußradius wird, umso spitzer wird der Übergang vom Zahnfußkreisdurchmesser zur Evolventenflanke. Die ursächliche Kerbwirkung wird hierdurch verstärkt, und die Formzahlen erreichen höhere Werte.

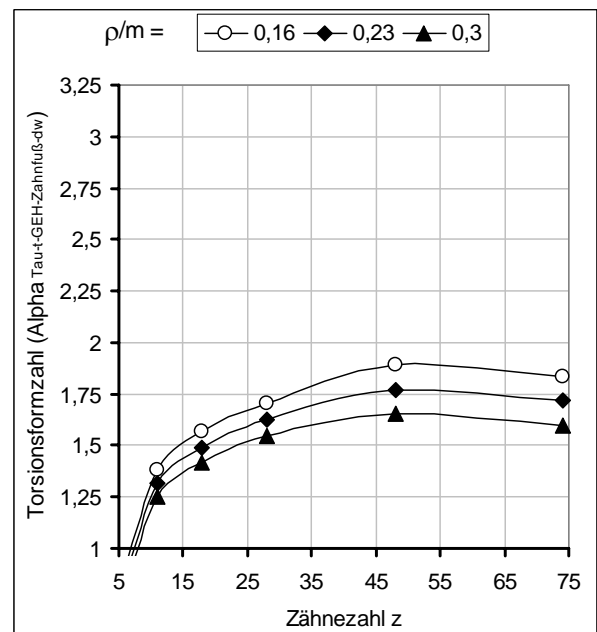
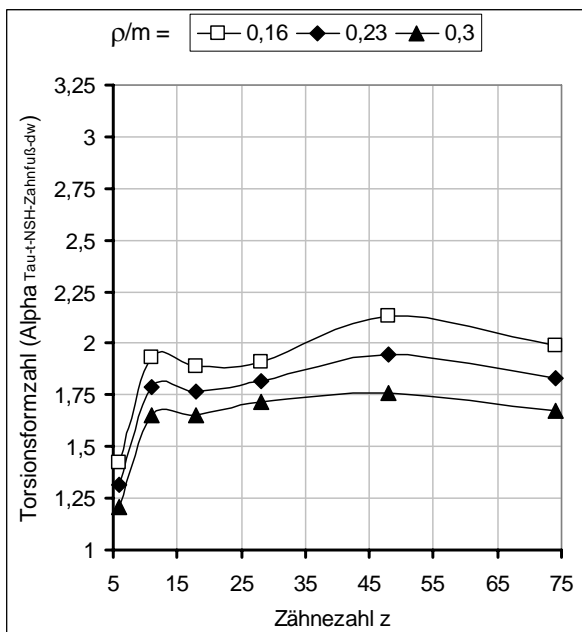
Die Formzahlen für das Verhältnis $\rho_{f-min}/m = 0,16$ liegen um durchschnittlich 12 % nach der GEH bzw. ca. 16 % nach der NSH über denen von $\rho_f/m = 0,30$.

Eine Vergrößerung der Fußradien bis hin zur vollen Ausrundung reduziert die Kerbwirkung in der Fußausrundung eindeutig. Die bekannte Tatsache der spannungsmindernden Wirkung vergrößerter Zahnfußradien wurde ebenfalls von *Wesolowski* /Wes96/ gezeigt.

Die Variation des Verhältnisses ρ_f/m hat keinen Einfluss auf die Torsions- und Biegeformzahlen weder an der absatzseitigen Kerbe noch an der Verzahnungsauslaufkerbe. Auch bei Variation der Kerbkombinationen des Auslaufs d_w/d_{a1} und r_w/t_{a1} konnte keinen Einfluss auf die Formzahl im freien Auslauf festgestellt werden. Diese Verhältnisvariation beeinflusst nur die Zahnfußspannungen. Mit zunehmendem Fußradius ergeben sich abnehmende Formzahlwerte im Zahnfuß der Evolventenzahnwellen.



a) Torsionsformzahl im Zahnfuß bezogen auf d_{h1} ; links: nach der NSH und rechts: nach der GEH



b) Torsionsformzahl im Zahnfuß bezogen auf d_w ; links: nach der NSH und rechts: nach der GEH

Bild 4.12: Charakteristischer Verlauf der Torsionsformzahlen im Zahnfußbereich von Zahnwellen mit freiem Auslauf in Abhängigkeit von der Zähnezahl und vom Fußausrundungsverhältnis ρ/m

4.2.7 Einfluss der Kerbschärfe und der Absatzhöhe

Mit dem Ziel, die Formzahlen für die Torsions-, Zug/Druck- und Biegebeanspruchungen an der freien Auslaufzone zu ermitteln und entsprechende Diagramme zu erstellen, wurden zahlreiche Untersuchungen an den dreidimensionalen FE-Modellen der Zahnwellen mit freiem Auslauf W15x2x6; W25x2x11; W40x2x18 und W100x2x48 bzw. W25x0,5x48 nach *DIN 5480* durchgeführt. Die Untersuchungen erstrecken sich über einen breiten Bereich hinsichtlich der Zähnezahl und der Kerbgeometrieinflüsse.

Die geometrische Beschreibung der Kerbe im freien Verzahnungsauslauf erfolgt dabei durch Einführung des Durchmesserverhältnisses d_w/d_{a1} (kleinster Wellendurchmesser / Kopfkreisdurchmesser) und der Kerbschärfe r_w/t_{a1} , wobei r_w der Auslaufkerbradius und t_{a1} die Kerbtiefe sind. Für jede Zahnwelle wurden unterschiedliche Kerbparameterkombinationen des Auslaufs r_w/t_{a1} und d_w/d_{a1} untersucht. Am Beispiel der Zahnwelle W25x2x11 werden folgende Parameterkombinationen analysiert:

Kerbschärfe	$r_w/t_{a1} =$	0,04	0,06	0,08	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5
Absatzhöhe	$d_w/d_{a1} =$	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,75	0,775	0,8	0,83

Diese Verhältnisvariationen ermöglichen die Ermittlung der Formzahlen für verschiedene Gestaltungsmöglichkeiten der Zahnwellen, d.h. Zahnwellen mit kleinen, mittleren und großen Durchmesserverhältnissen sowie mit scharfen und weniger scharfen Kerbradien.

Folglich konnte nahezu der gesamte Bereich möglicher und technisch interessierender Formzahlen abgedeckt werden. Daraus ergab sich eine sehr hohe Anzahl von FE-Modellen für die genaue Beschreibung der Vergleichsspannungen an der Auslaufkerbe. Es wurden etwa 700 FE-Modelle benötigt, um genügende Ergebnisse je Belastungsart zu erhalten.

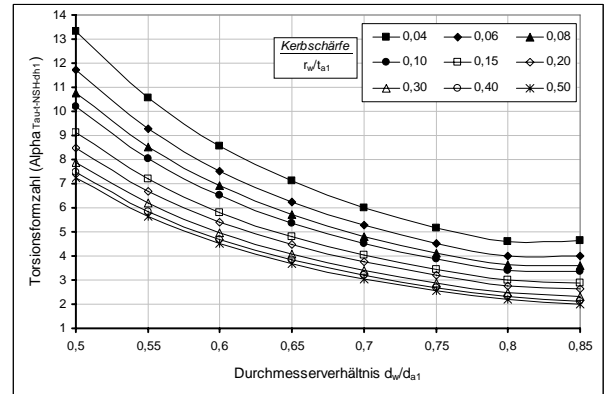
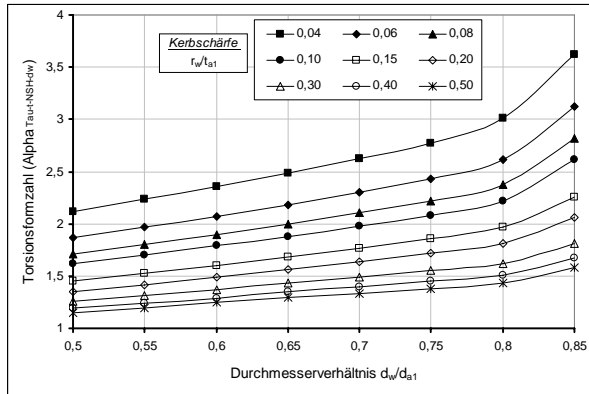
Damit der Einfluss der Kerbschärfe und der Absatzhöhe eindeutig erkennbar ist, soll die Formzahldarstellung in einer leicht überschaubaren Form erfolgen. Es erwies sich nach umfangreichen Vorüberlegungen als sinnvoll, die nach *DIN 743 /N3/* etablierte Auftragsweise r/t und d/D für die Formzahldarstellung anzuwenden.

Am Beispiel der Geometrie W40x2x18 sind die Formzahlen je Belastungsart und Nennspannungsdefinition in **Bild 4.13** dargestellt. In **Bild 4.14** sind Formzahlvergleiche verschiedener Zahnwellen in Abhängigkeit von der Kerbschärfe und vom Durchmesserverhältnis enthalten.

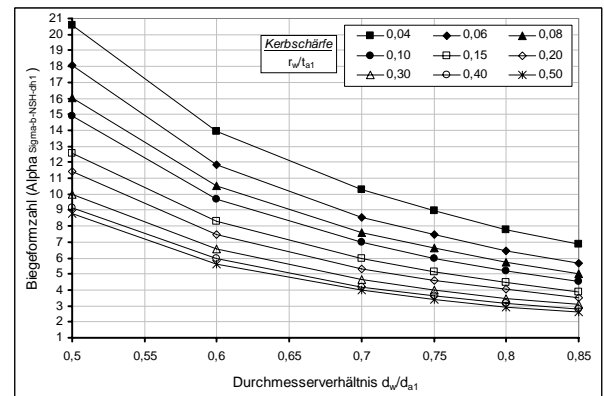
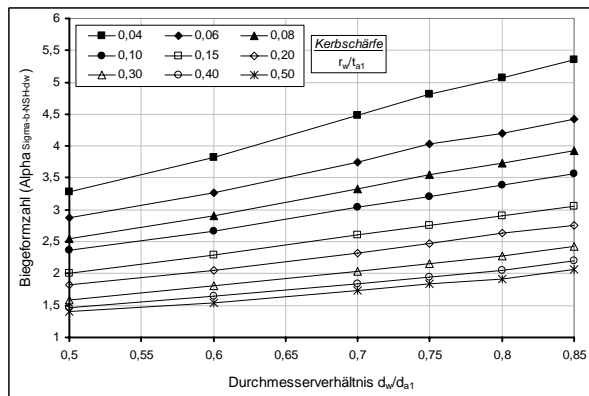
Die sämtlichen Ergebnisse der gewonnenen Formzahlen aus den FE-Berechnungen sind in der **Anlage C** des Anhangs ohne weiterführende Erläuterungen in Tabellen (**Tabellen C-1 bis C-4**) aufgelistet und in Diagrammformen (**Bilder C-1 bis C-5**) visualisiert. Die Formzahlen sind für die Belastungsarten Torsion, Biegung und Zug/Druck in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und der Absatzhöhe d_w/d_{a1} dargestellt. Neben dem Wellendurchmesser d_w im Kerbgrund wird das Bezugsmaß Ersatzdurchmesser d_{h1} zur Ermittlung der Nennspannung als Vergleichsmaß gewählt.

Die durchgeführten kerbspannungsorientierten FE-Untersuchungen von torsions- und biegebeanspruchten Zahnwellen mit freiem Auslauf haben gezeigt, wie es aus der Elastizitätstheorie bekannt ist, dass eine Vergrößerung des Kerbradius bei gleichbleibender Kerbtiefe einen leichten Abfall der Formzahlen im freien Auslauf bewirkt. Die Kerbtiefe hat in diesem Fall einen formzahlmindernden Einfluss. Hingegen steigen die Formzahlen mit sinkendem Kerb-

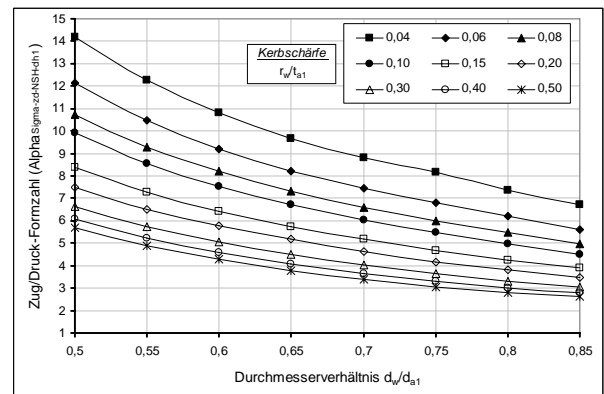
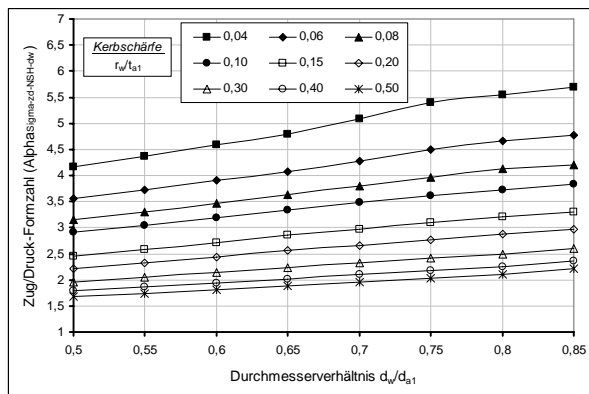
radius oder mit steigendem Verhältnis d_w/d_{a1} bei konstantem Radius an. Der Auslaufradius hat einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Formzahl im Zahnfuß. Die Zahnwellen mit großer Zähnezahl sind formzahlbedingt in jedem Fall günstiger als solche mit wenigen Zähnen.



a) Torsionsformzahlen im freien Auslaufbereich; links: bezogen auf d_w und rechts: auf d_{h1}

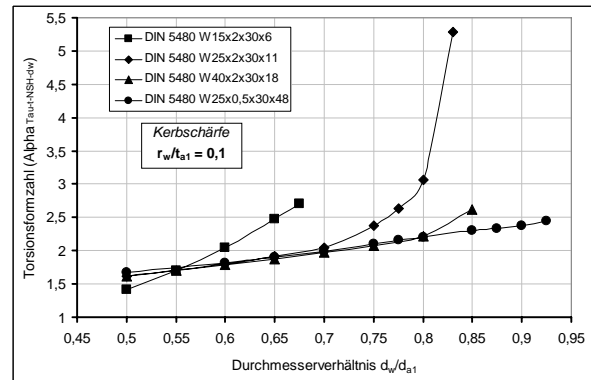
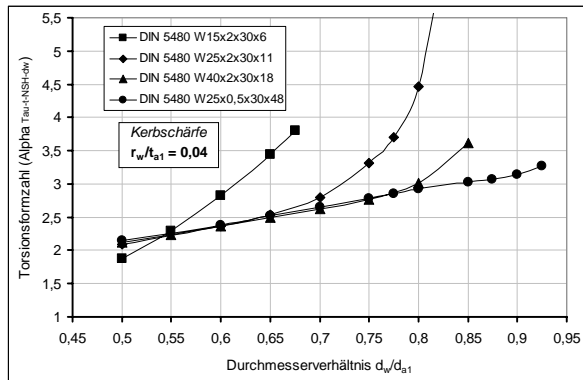


b) Biegeformzahlen im freien Auslaufbereich; links: bezogen auf d_w und rechts: auf d_{h1}

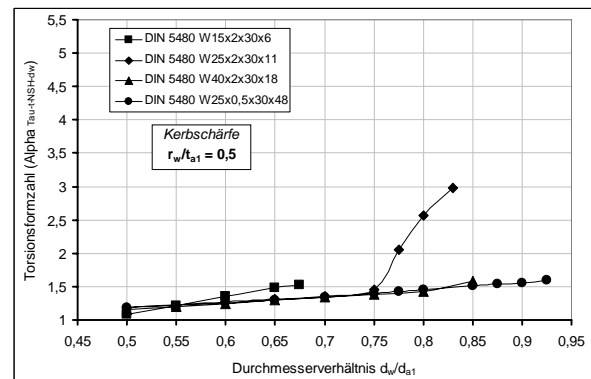
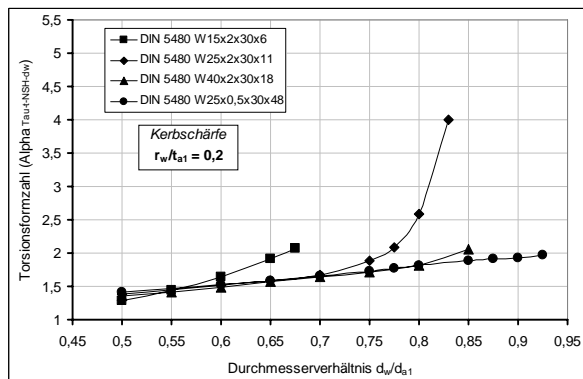


c) Zug/Druckformzahlen im freien Auslaufbereich; links: bezogen auf d_w und rechts: auf d_{h1}

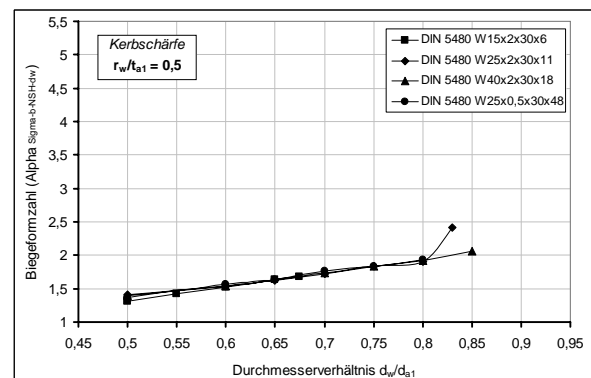
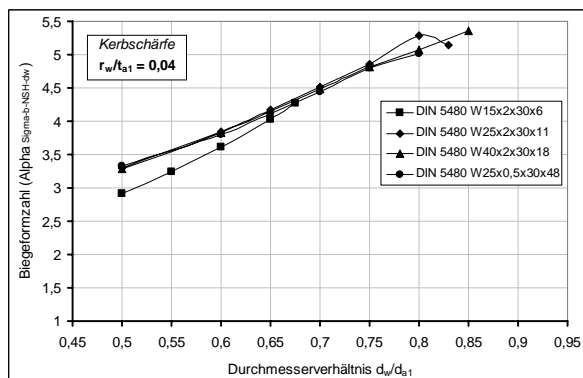
Bild 4.13: Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei Torsion, Biegung und Zug/Druck in Abhängigkeit von Kerbschärfe und Durchmesser Verhältnis für die Zahnwelle W40x2x18 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2 \text{ mm}$; $d_{a1} = 38,6 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{h1} = 35,6 \text{ mm}$; $\rho_{f\text{-}min}/m = 0,16$)



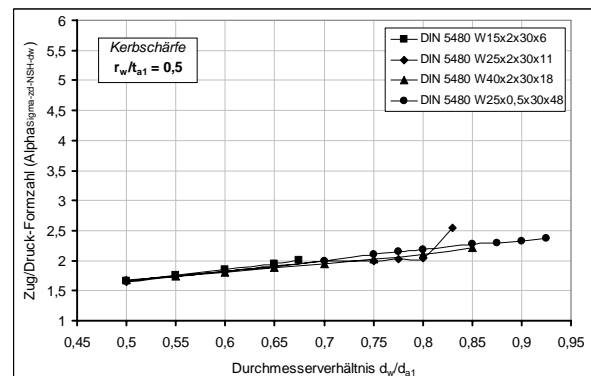
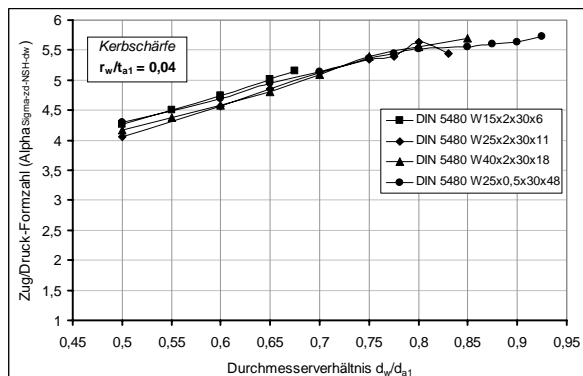
a) Formzahlvergleiche bei Torsionsbeanspruchung je nach Kerbschärfe ($r_w/t_{a1} = 0,04$ und $0,1$)



b) Formzahlvergleiche bei Torsionsbeanspruchung je nach Kerbschärfe ($r_w/t_{a1} = 0,2$ und $0,5$)



c) Formzahlvergleiche bei Biegebeanspruchung je nach Kerbschärfe ($r_w/t_{a1} = 0,04$ und $0,5$)



d) Formzahlvergleiche bei Zug/Druckbeanspruchung je nach Kerbschärfe ($r_w/t_{a1} = 0,04$ und $0,5$)

Bild 4.14: Vergleich der Formzahlen im freien Auslauf verschiedener Zahnwellengeometrien in Abhängigkeit von der Absatzhöhe d_w/d_{a1} und der Kerbschärfe r_w/t_{a1} ; $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = \sigma_{b,zd-nenn-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

Im Allgemeinen ist für alle untersuchten Geometrien der Wert der Formzahl $\alpha_{\sigma, \tau\text{-NSH}}$ größer als $\alpha_{\sigma, \tau\text{-GEH}}$, damit liegt der Anwender mit der Formzahlberechnung nach der NSH auf der sicheren Seite. Die Maximalspannung ist im Auslauf immer größer als die im Zahnfuß ermittelte. Weiterhin kann man zwischen den Formzahlen aus der NSH im freien Auslauf für Zug, Biegung und Torsion grobe Näherungen ermitteln (**Tabelle 4.3**).

Tabelle 4.3: Näherungszusammenhänge zwischen den ermittelten Spannungsformzahlen im freien Auslauf

für $z \geq 18$: $\alpha_{\sigma b} \approx \frac{\alpha_{\sigma d} + \alpha_{\pi}}{1,8 \pm 0,05}$	für $z < 18$: $\alpha_{\sigma b} \approx \frac{\alpha_{\sigma d} + \alpha_{\pi}}{2 \pm 0,1}$
für $z \geq 11$: $\frac{\alpha_{\pi}}{\alpha_{\sigma d}} \approx 0,51..0,69$	für $z = 18$: $\frac{\alpha_{\sigma b}}{\alpha_{\sigma d}} \approx 0,82..0,93$

Sonderfall $d_w \approx d_{f1}$

Um den Einflussparameter der Kerbschärfe bei konstantem Durchmesser Verhältnis auf die Formzahl einzuschätzen, wird ein geometrischer Sonderfall der Geometrie W25x2x11 untersucht, bei dem der Wellendurchmesser gleich dem Zahnfußkreisdurchmesser $d_w = d_{f1}$ bzw. $d_w/d_{a1} = 0,83$ ist. Der freie Auslauf ist in die Verzahnung hineingeschnitten. Die FE-Vernetzung dieses räumlichen Kerbbereiches mit Hex-Elementen ist beim gegenwärtigen Stand der Modellierungstechnik nur mit viel Aufwand möglich (**Bild 4.15**).

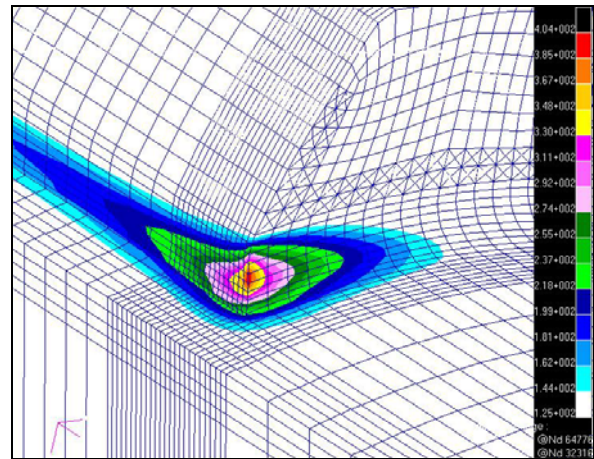
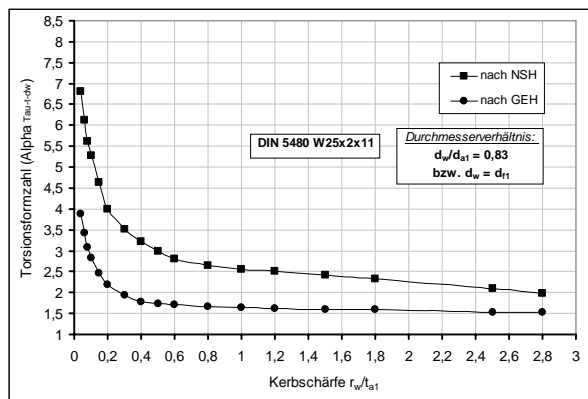


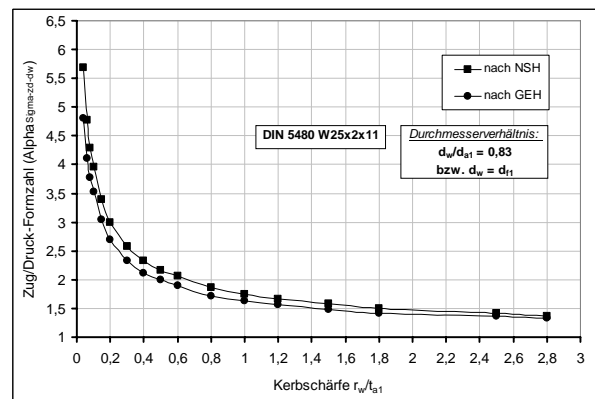
Bild 4.15: FE-Netz der Zahnwelle W25x2x11 ($d_w = d_{f1}$) und Ort der Spannungsspitze bei Torsion

Die erzeugte Spannungsspitze von der Kerbe des freien Auslaufs wird durch die Kerbwirkung der sie durchdringenden Kerbe im Zahnfuß weiter vergrößert. Bei dieser kritischen Mehrfachkerbe sind sehr hohe Formzahlen zu erwarten. Da dieser Verhältniswert $d_w/d_{f1} = 1$ in der Realität unsinnig und deshalb nicht vorhanden ist, wird hier die Formzahlermittlung nur exemplarisch für die Belastungsarten Torsion und Zug/Druck durchgeführt. Die FE-Ergebnisse sind in den **Bildern 4.16** und **4.17** zusammengefasst.

Für die Kerbschärfe $r_w/t_{a1} < 0,2$ liegen die Torsionsformzahlen nach der NSH im Bereich von $\alpha_{\tau\text{-NSH}} = 4$ bis 7, die Zugformzahlen sind kleiner und liegen zwischen $\alpha_{\sigma d\text{-NSH}} = 3$ bis 6 (**Bild 4.16**). Die maximalen Torsionsspannungen für $r_w/t_{a1} < 0,2$ und $d_w/d_{a1} = 0,83$ entsprechen etwa dem Vierfachen bis dem Siebenfachen der Nennspannung (**Bild 4.17**). Dies kommt dadurch zustande, dass sich die scharfen Kerben in der Zahnfußausrundung und im Auslauf gegenseitig stark beeinflussen. Unterschreitet die Größe des Kerbradius im Verzahnungsübergang die des Zahnfußradius, ist die Spannungsspitze im Auslauf zu finden. Ist der Auslaufradius ca. gleich dem Fußradius, so befindet sich die Lage der Spannungsspitze an der Überschneidungskontur beider Kerben (**Bild 4.15**). Mit steigendem Auslaufradius bei konstantem Verhältnis $d_w/d_{f1} = 1$ verschiebt sich die geometrische Örtlichkeit der Maximalspannung bei Torsion weiter in die Richtung des Zahnfußbereiches hinein, siehe **Bild 4.18**.



a) Formzahlen bei Torsionsbeanspruchung



b) Formzahlen bei Zug/Druckbeanspruchung

Bild 4.16: Darstellung der Formzahlen im freien Auslaufbereich nach der NSH und der GEH bezogen auf den Wellendurchmesser d_w in Abhängigkeit von der Kerbschärfe für die Zahnwelle W25x2x11 ($d_w = d_{f1}$; $x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 24,6$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 21,65$ mm; $\rho_{f-min}/m = 0,16$)

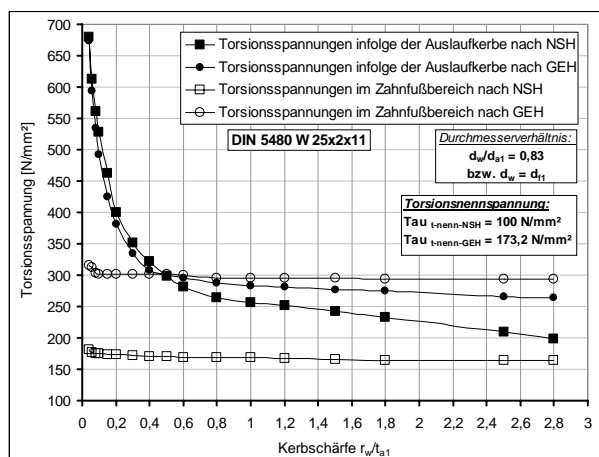


Bild 4.17: Darstellung der maximalen Vergleichsspannungen bei Torsion nach der NSH und der GEH im freien Auslauf sowie im Zahnfußgebiet für die Zahnwelle W25x2x11 ($d_w = d_{f1}$) abhängig von der Kerbschärfe

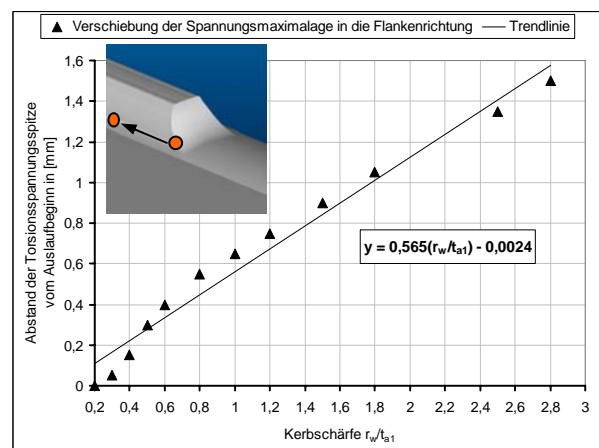


Bild 4.18: Lage der Torsionsspannungsspitze im Zahnfuß nach der NSH oder GEH in Abhängigkeit von der Kerbschärfe

Es kann festgehalten werden, dass ab einer Kerbschärfe von $r_w/t_{a1} = 0,2$ die beiden Kerbspannungskonzentrationen nach der NSH und der GEH an der selben Stelle in der Fußausrundung aufgetreten sind. Bei einer relativ großen Entfernung vom Auslaufbeginn stabilisiert sich der Ort der Spannungsspitze. In diesem begrenzten Geometriegebiet erfolgt keine maßgebliche Kerbüberlagerung.

Eine Mehrfachkerbe erschwert die Formzahlberechnung und stellt die Gültigkeit des Hooke-schen Gesetzes in Frage. Mit Hilfe von elastisch plastischer Untersuchung ist ein quantitatives Verständnis der Auswirkung der Materialeigenschaften auf die Formzahlberechnung möglich.

Es sei noch angemerkt, dass die resultierende Torsionsformzahl an einer solchen Mehrfachkerbe (Durchdringung zweier Einzelkerbe) durch Multiplikation der Formzahl des ungestörten Zahnfußbereiches nach DIN 5466-2 mit der Formzahl eines äquivalenten Absatzes ($d_w/d_{a1} = d/D$ und $r_w/t_{a1} = r/t$) nach DIN 743 als eine grobe Abschätzung bestimmt werden kann. Dies gilt für die Kerbschärfe $r_w/t_{a1} < 1,2$. Für die Verhältnisswerte $r_w/t_{a1} \geq 1,2$ nähert sich die Formzahl für die untersuchte Geometrie einem Grenzwert von ca. $\alpha_{tl-NSH} = 2,2$.

4.2.8 Einfluss der Zahnnahe

Um den Einfluss der Zahnnahe auf die Größe der Formzahlen bei Torsion und Biegung zu beurteilen, wurden FE-Kontaktrechnungen an der Zahnwellenverbindung mit freiem Auslauf DIN 5480 -25x1,75x13 (**Tabelle 4.4**) durchgeführt. Hierzu liegen Untersuchungsergebnisse /Wes96/ zur näherungsweise Bestimmung der Maximalspannungen am Nabenbeginn sowie innerhalb der Verbindung bei Torsion vor. Das Problem des Spannungszustandes am Nabenanfang ist jedoch ohne Berücksichtigung der Auslaufgeometrie behandelt worden.

Tabelle 4.4: Geometrische Parameter der untersuchten Zahnwellenverbindung mit freiem Auslauf

Geometriebezeichnung der Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf				
$x = 0,093$ [mm]	$\rho_{fmin}/m = 0,16$	$r_w/t_{a1} = 0,23$	$l_z = d_B$	$b/d_B = 0,6$
$t_{a1} = 2,38$ [mm]	$d_{a1} = 24,645$ [mm]	$r_w = 0,55$ [mm]	$d_{f1} = 21,153$ [mm]	$d_{h1} = 22,05$ [mm]
$d_w = 19,9$ [mm]	$d_i/d_w = 0,19$	$d_w/d_{a1} = 0,81$	$d_{e2}/d_B = 2$	$d_{e2} = 50$ [mm]

Die Untersuchungen konzentrieren sich auf den Fall der steifen Nabe. Die Nabenbreite ist $b = 0,6 \cdot d_B$ nach /N5/. Das Verhältnis Nabenaußendurchmesser zu Bezugsdurchmesser beträgt $d_{e2}/d_B = 2$ und ist damit groß genug um Ergebnisverfälschungen durch etwaige Randbedingungen auszuschließen. In früheren Untersuchungen wurde als Grenzwert für die steife Nabe ein Verhältnis von $d_{e2}/d_B = 1,5$ ermittelt und entsprechend in der DIN 5466 aufgenommen.

Es wurden zwei Nabensitzlagen (0) und (1) berücksichtigt (**Bild 4.19**). Während sich die Nabe in Nabenslage (0) dicht am Auslaufbeginn befindet, ist der Abstand zwischen dem Sitz der Nabe zum Auslaufbeginn in Nabenslage (1) ca. $l_z \approx d_B$. Der Abstand l_z ist damit groß genug um eine Überlagerung der Kerbspannungen im Auslauf und im Zahnfuß abzuschließen.

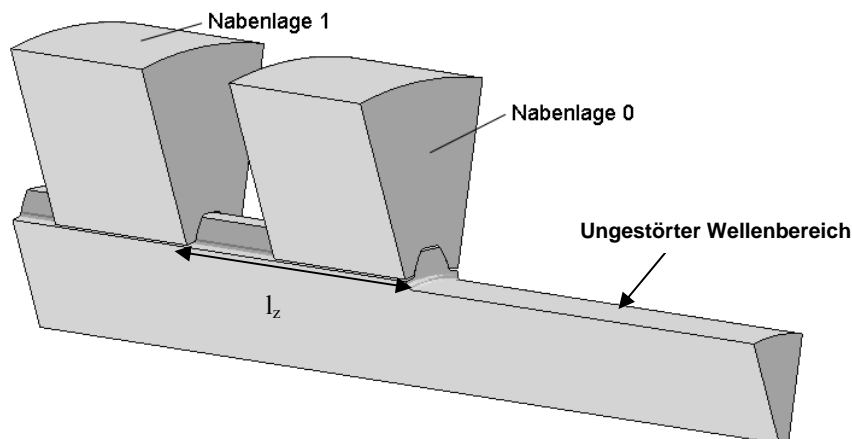
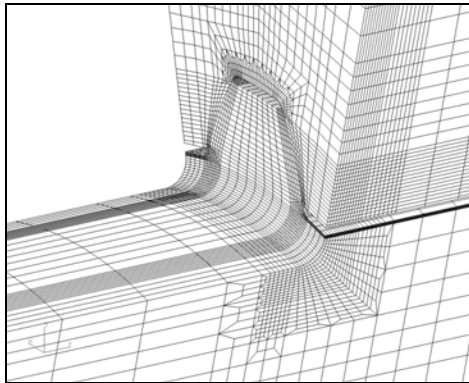


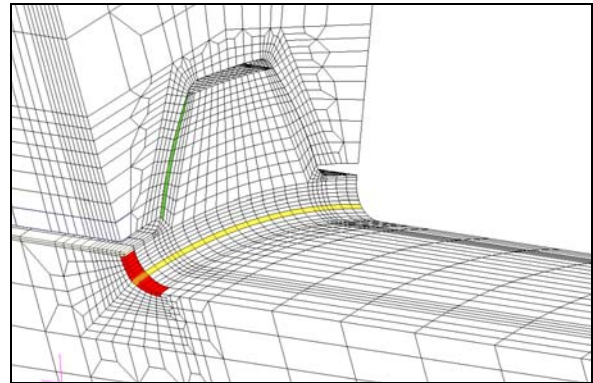
Bild 4.19: Untersuchte Nabenslagen (0) und (1) an der Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13), /Str07/

Für die Modellierung von Kontakt zwischen einem Zahnwelle-Nabe-Paar wurden zwei vollkommen unterschiedliche Kontaktverfahren verwendet. Die erste Lösung beschreibt das Kontaktproblem unter der Verwendung von GAP-Elementen (Knoten/Knoten-Kontakt). Das zweite Verfahren ist eine flächendefinierte Master/Slave Kontaktmodellierung in Verbindung mit Federelementen. Generell wird bei nichtlinearen Problemstellungen (z.B. bei großen Verschiebungen und sich ändernden Kontaktrandbedingungen) eine inkrementelle Vorgehensweise eingesetzt. Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt in diesem Fall durch ein Iterationsverfahren. Die Last wird nicht in einem Schritt sondern inkrementell aufgebracht.

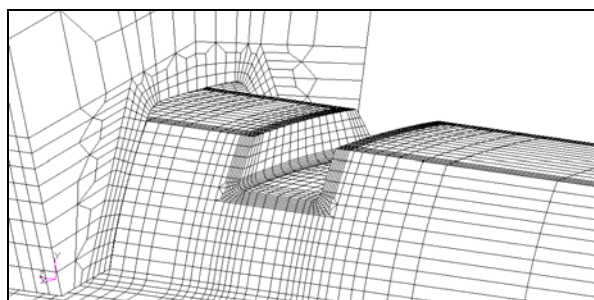
Für die Vernetzung der Modelle wurden Hexaederelemente mit 8 Knoten verwendet (siehe *Bild 3.10*, S. 73). Eine sinnvolle Vernetzung beinhaltet eine Netzverfeinerung im Auslaufradius und am Verbindungsbeginn, wegen der dort zu erwartenden hohen Spannungsgradienten, sowie einer Gewährleistung der Kompatibilität der Welle und Nabe durch eine gleichmäßige Anordnung der Elemente im Kontaktbereich. Dabei wurden zwei Modellvernetzungsvarianten (grobes und feines Netz) überprüft, demzufolge wurde die Anzahl der Elemente im Auslaufkerbradius (12 und 16 Elemente) variiert, siehe *Bild 4.20*. Letztendlich sollte das Modell aus Berechnungszeitgründen so grob wie möglich und so fein wie nötig vernetzt werden.



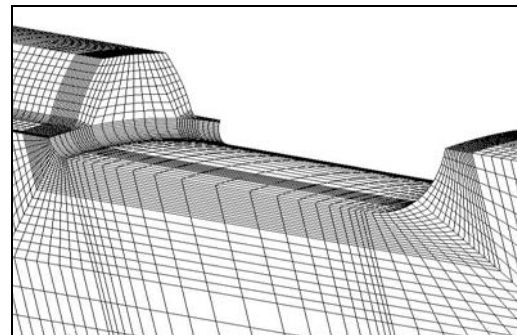
a) Zahnwellenverbindung (Nabenlage 0), ein **feines Netz** mit 16 Elementen im Kerbradius



b) Zahnwellenverbindung (Nabenlage 0), ein **grobes Netz** mit 12 Elementen im Kerbradius



c) Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit oberhalb des Teilkreises liegender SR-Nut



d) Zahnwelle mit freiem Auslauf ohne Nabe

Bild 4.20: Vernetzungsmodelle der Zahnwellenverbindung mit freiem Auslauf mit und ohne SR-Nut

Zusätzlich wurde exemplarisch der Schwächungseinfluss einer SR-Nut nach DIN 471 -25x1,2 /N2/ neben der Nabenlage (1) der Zahnwellenverbindung (*Bild 4.20-c*) untersucht.

Bezüglich der Drehmomenteinleitung (*Bild 4.21*) wurden zwei Möglichkeiten zur Formzahlermittlung genauer betrachtet. In der ersten Variante wird die Torsionsbeanspruchung bei Einspannung des freien Wellenendes durch ein am Nabenaußendurchmesser angreifendes Drehmoment über tangentielle Kräfte in die Zahnwelle eingeleitet. In der zweiten Variante erfolgt die Lasteinleitung durch Umfangskräfte am ungestörten Wellenende. Die Nabe wird am Außendurchmesser eingespannt.

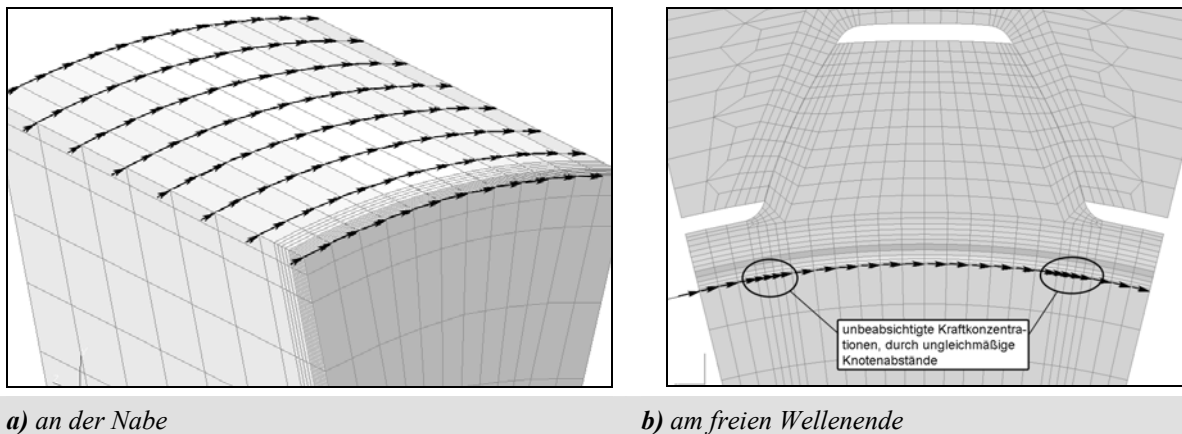


Bild 4.21: Variation der Drehmomenteinleitung, a): an der Nabe und b): am freien Wellenende), /Str07/

Bei den FE-Kontaktuntersuchungen werden die Formzahlen im freien Verzahnungsauslauf zur glatten Welle, im ungestörten Zahnfußgebiet zwischen Auslauf und Nabenbeginn (für Nabenlage „1“), am Welle-Nabe-Verbindungsanfang (für die Zug- und Druckseite), in der SR-Nut und innerhalb der Welle-Nabe-Verbindung ermittelt. In der Praxis werden diese Formzahlen sowohl separat (für den Fall der mit Abstand zum Auslauf montierten Nabe) als auch in einer Überlagerung (für den Fall der dicht am Auslauf sitzenden Nabe) benötigt.

Anmerkung

Erläuterungen zu den erwähnten Auswertungspositionen der maximalen Vergleichsspannungen bzw. der Formzahlen nach der GEH und NSH für die torsionsbelastete Zahnwellen-Verbindung nach DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf sind in der **Anlage C** des Anhanges in den Bildern (**Bilder C-6 bis C-8**) visualisiert. Die Bilddarstellung der auszuwertenden kritischen Spannungsstellen erfolgt unter Berücksichtigung des Nabeneinflusses (Nabenlage „0“ und Nabenlage „1“) und des Einflusses der SR-Nut DIN 471 – 25 x 1,2.

Die ermittelten Ergebnisse werden grafisch sowie in Zahlenform dargestellt. Zunächst werden die Verteilungen sowie die Positionen der maximalen Vergleichsspannung bei torsions- und biegebelasteter Zahnwellenverbindung mit freiem Auslauf mit und ohne Nabeneinfluss gezeigt, siehe **Bild 4.22**.

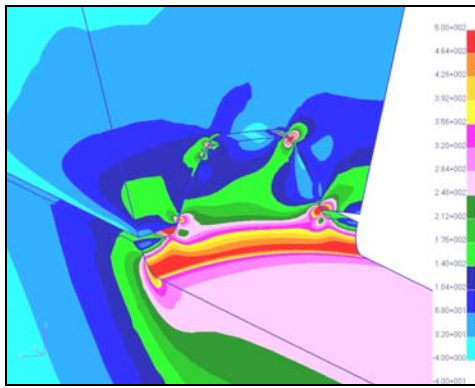
Im Auslaufbereich bildet die maximale Vergleichsspannung nach der GEH eine annähernd absolut symmetrische Spannungsverteilung zur Zahnmitte (**Bild 4.22-c**), dem hingegen befindet sich das Vergleichsspannungsmaximum nach der NSH auf der Zugseite unterhalb der Zahnfußausrundung (**Bild 4.22-d**).

Bei Biegung befindet sich die maximale Vergleichsspannung nach der NSH oder GEH am selben Ort, d.h. im Auslaufradius in der Mitte des Vollzahn (**Bild 4.22-g und h**). Die Vergleichsspannungsverteilung der Hohlzahnwelle entspricht quantitativ der der Vollwelle.

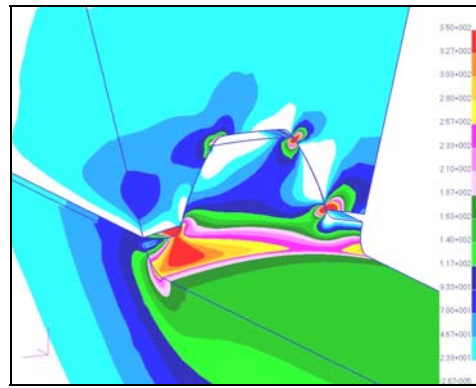
Anschließend werden die ermittelten Formzahlergebnisse tabellarisch gegenübergestellt.

Tabelle 4.5 beinhaltet die Berechnungsergebnisse bei Torsionsbelastung. Die durch die Kontaktanalyse ermittelten Ergebnisse (mit Nabeneinfluss) wurden mit den durch die Flankenpressung berechneten Formzahlwerten (ohne Nabeneinfluss) verglichen.

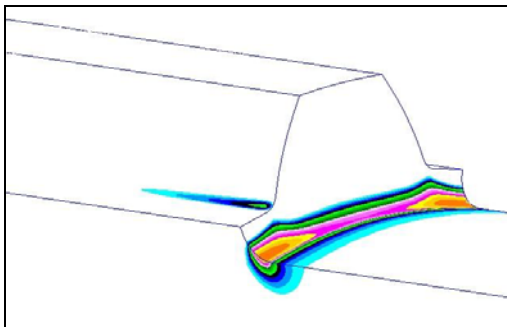
In **Tabelle 4.6** sind die Biegeformzahlen für die Hohl- und Vollwelle mit und ohne Nabeneinfluss wiedergegeben.



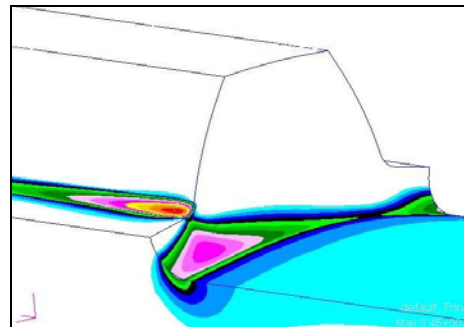
a) bei Torsion nach der **GEH**, Nabenlage „0“ (durch Kontaktanalyse)



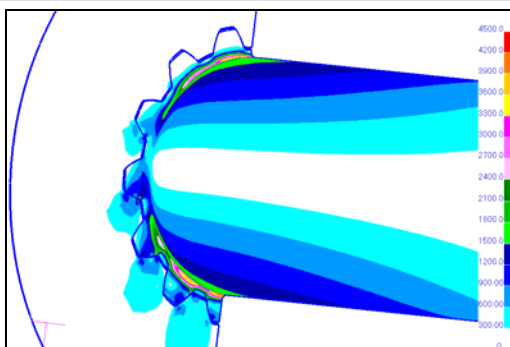
b) bei Torsion nach der **NSH**, Nabenlage „0“ (durch Kontaktanalyse)



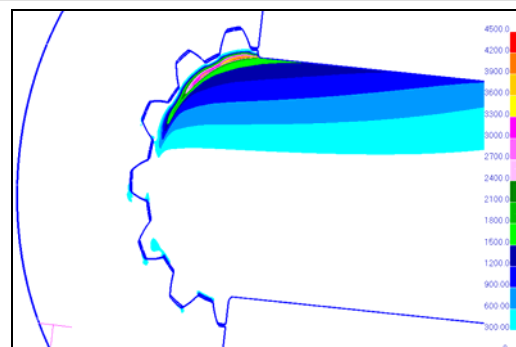
c) bei Torsion nach der **GEH**, ohne Nabeneinfluss (Flächenpressung an der Nabenlage „0“)



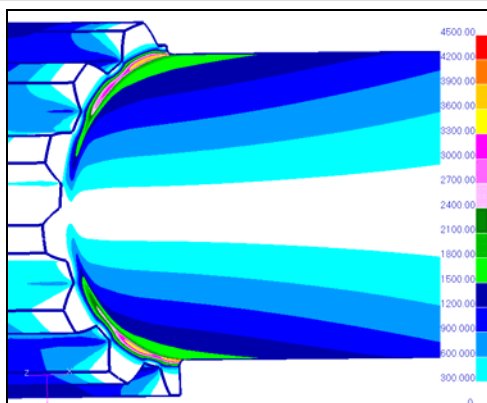
d) bei Torsion nach der **NSH**, ohne Nabeneinfluss (Flächenpressung an der Nabenlage „0“)



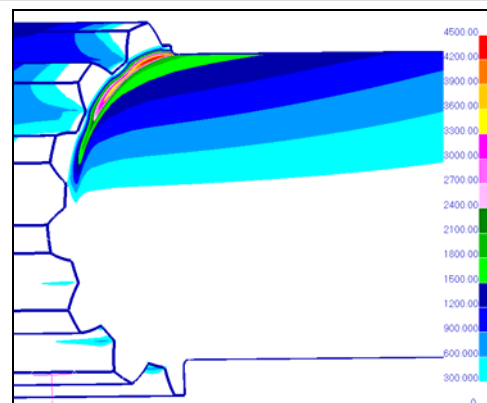
e) bei Biegung nach der **GEH**, Nabenlage „0“ (durch Kontaktanalyse)



f) bei Biegung nach der **NSH**, Nabenlage „0“ (durch Kontaktanalyse)



g) bei Biegung nach der **GEH**, ohne Nabeneinfluss



h) bei Biegung nach der **NSH**, ohne Nabeneinfluss

Bild 4.22: Darstellung der Vergleichsspannungsüberhöhungen bei Torsion und Biegung nach der GEH und der NSH an der Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf, mit und ohne Nabe

Tabelle 4.5: Torsionsformzahlen an der Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf abhängig von der Variation der Nabenlage: **NL (0)** unmittelbar am Auslaufbeginn und **NL (1)** entfernt vom Auslaufbeginn, mit und ohne SR-Nut DIN 471 – 25 x 1,2, **K/K-Kv:** Knoten/Knoten-Kontaktverfahren und **M/S-Kv:** Master/Slave-Kontaktverfahren, $d_w = 19,9$ mm, $d_{h1} = 22,05$ mm und $d_{SRN} = 23,55$ mm

Kerbform (Auswertungsposition)**	Freier Auslauf	WNV-Beginn (Druckseite)	WNV-Beginn (Zugseite)	Ungestörter Fußbereich	Fußbereich (auslaufnah)
Nabenlage (0); Formzahlbestimmung nach der GEH					
Torsionsformzahl	$\alpha_{\pi-GEH-NL0-d_w}$	$\alpha_{\pi-GEH-NL0-d_{h1}}$			
K/K-Kv, fein	1,98	2,65	3,47	--	--
K/K-Kv, grob	1,95	1,98	2,06	--	--
M/S-Kv, grob	1,85	1,97	1,83	--	--
Flächenpressung, fein	1,85	1,90	1,87	--	--
Nabenlage (1) ; Formzahlbestimmung nach der GEH					
Torsionsformzahl	$\alpha_{\pi-GEH-NL1-d_w}$	$\alpha_{\pi-GEH-NL1-d_{h1}}$			
K/K-Kv, fein	1,75	2,29	2,60	2,04	--
K/K-Kv, grob	1,73	2,21	1,93	2,06	--
M/S-Kv, grob	1,72	2,20	2,11	2,01	--
K/K-Kv, fein, SRN	1,73	--	3,12	2,06	--
Flächenpressung, fein	1,74	2,13	2,11	2,07	--
In der SRN	$\alpha_{\pi-GEH-NL1-SRN-d_{SRN}} = 1,78$				
Kerbform (Auswertungsposition)**	Freier Auslauf	WNV-Beginn (Druckseite)	WNV-Beginn (Zugseite)	Ungestörter Fußbereich	Fußbereich (auslaufnah)
Nabenlage (0); Formzahlbestimmung nach der NSH					
Torsionsformzahl	$\alpha_{\pi-NSH-NL0-d_w}$	$\alpha_{\pi-NSH-NL0-d_{h1}}$			
K/K-Kv, fein	2,65	4,80	6,25	--	--
K/K-Kv, grob	2,45	4,15	3,10	--	--
M/S-Kv, grob	2,07	3,37	2,99	--	--
Flächenpressung, fein	2,08	3,53	3,45	--	--
Nabenlage (1); Formzahlbestimmung nach der NSH					
Torsionsformzahl	$\alpha_{\pi-NSH-NL1-d_w}$	$\alpha_{\pi-NSH-NL1-d_{h1}}$			
K/K-Kv, fein	2,01	2,94	4,20	2,04	2,58
K/K-Kv, grob	1,99	2,72	2,67	2,05	2,60
M/S-Kv, grob	2,00	2,94	5,33	2,06	2,59
K/K-Kv, fein, SRN	1,94	2,78	2,54	2,01	2,46
Flächenpressung, fein	2,02	2,53	2,49	2,06	2,60
In der SRN	$\alpha_{\pi-NSH-NL1-SRN-Druckseite-d_{SRN}} = 2,99$				
	$\alpha_{\pi-NSH-NL1-SRN-Zugseite-d_{SRN}} = 2,62$				

Anmerkung

)**: Erläuterungen zu den in der Tabelle erwähnten Auswertungspositionen der Formzahlen nach der GEH und NSH sind in der **Anlage C** des Anhanges in den Bildern (**Bilder C-6 bis C-8**) visualisiert.

Tabelle 4.6: Formzahlen bei Biegebelastung im freien Auslaufbereich der Zahnwellenverbindung DIN 5480 - 25x1,75x13, für Hohl- und Vollwelle, mit und ohne Nabeneinfluss

Biegeformzahl α_{ob} im freien Auslaufbereich					
Vollzahnwelle			Hohlzahnwelle		
$\alpha_{ob-GEH-d_W}$	$\alpha_{ob-NSH-Z-d_W}$	$\alpha_{ob-NSH-D-d_W}$	$\alpha_{ob-GEH-d_W}$	$\alpha_{ob-NSH-Z-d_W}$	$\alpha_{ob-NSH-D-d_W}$
Mit Nabeneinfluss – Nabenlage (0)					
2,36	2,45	2,74	2,32	2,41	2,70
Ohne Nabeneinflussung					
2,31	2,55	2,62	2,28	2,52	2,59

Schlussfolgerungen

Die Einleitung des Drehmoments in die Welle einer Zahnwellen-Verbindung durch die Nabenaußenseite ist einer Einleitung durch tangentielle Einzelkräfte am ungestörten Wellenbereich ähnlich. Es ergeben sich für beide Varianten annähernd identische Formzahlen.

Die Torsionsformzahl im freien Auslauf erhöht sich durch ein Heranrücken der Nabe an den Auslaufbeginn (Nabenlage „0“) um ca. 14 % nach der GEH bzw. ca. 22 % nach der NSH im Vergleich zur Formzahlgröße infolge der Nabenlage (1).

Der Ort der maximal auftretenden Vergleichsspannung im Auslaufbereich wechselt nicht wenn sich die Nabe von Nabenlage (1) zu Nabenlage (0) verschiebt.

Die maximale Zahnfußspannung befindet sich stets am Nabenbeginn.

Ein Einbringen einer Sicherungsringsnut in Nabenlage (1) erhöht die Formzahl besonders im Zahnfußbereich. Die SR-Nut hat jedoch keinen Einfluss auf die Formzahl im Auslaufbereich.

Die sich durch die Kontaktanalyse ermittelten Formzahlwerte im Auslaufbereich, im ungestörten Zahnfußbereich oder im auslaufnahen Fußbereich weichen nur unwesentlich von den durch die Flankenpressung simulierten Ergebnissen ab. Die prozentualen Unterschiede betragen sowohl nach der NSH als auch nach der GEH weniger als 5 %. Damit eignet sich die Verwendung gleichmäßiger Flankenpressung zur Bestimmung der Formzahl in diesen genannten Kerbbereichen hervorragend.

Wie aus *Tabelle 4.6* ersichtlich ist, erhöhen sich die Biegeformzahlen im freien Auslaufbereich nach der GEH oder NSH um ca. 5 % unter Berücksichtigung des Nabeneinflusses im Vergleich zu den berechneten Formzahlen ohne Nabeneinflussung. Bei Biegung ist der Einfluss des Vorhandenseins einer Nabe auf die Formzahlermittlung deutlich kleiner als bei Torsion. Es gilt im Allgemeinen $\alpha_{ob-GEH} \approx 0,87 \cdot \alpha_{ob-NSH}$.

Der Innendurchmesser der Bohrung hat keinen wesentlichen Einfluss auf die Biegeformzahl sowohl mit Nabeneinfluss als auch ohne Nabe. Auf Grund der ungeraden Zähnezahls sind kleine vernachlässigbare Formzahlunterschiede auf der Zug- und Druckseite vorhanden.

Um eine Vergleichsmöglichkeit zu den hier gewonnenen FE-Formzahlergebnissen bei Torsionsbelastung zu bekommen, wurden die Form- bzw. Kerbwirkungszahlen aus den bekannten Näherungen in der Fachliteratur unter Berücksichtigung der geometrischen Abmessungen der untersuchten Gesamtverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 berechnet.

Die aus der Fachliteratur vorhandenen bzw. umgerechneten Werte bei Torsionsbelastung sind in der **Tabelle 4.7** enthalten. Diese Anhaltswerte gelten jedoch nur für den Zahnfußbereich.

In der **Tabelle 4.7** sind auch die mit der FEM ermittelten Torsionsformzahlen nach der NSH für unterschiedliche Auswertungspositionen aufgelistet, siehe dazu **Tabelle 4.5**. Diese Formzahlen gelten für das Lastmodell „Flächenpressung“ und sind in Abhängigkeit von der Nabelage (0) und (1) dargestellt. Die Formzahlen im freien Auslaufbereich beziehen sich auf den kleinsten ungestörten Wellendurchmesser $d_w = 19,9$ mm. In Zahnfußbereich sind sie auf den Ersatzdurchmesser $d_{h1} = 22,05$ mm bezogen.

Tabelle 4.7: Vergleich der mit der FEM gewonnenen Formzahlen mit den aus der Fachliteratur entnommenen Formzahlen bzw. Kerbwirkungszahlen bei Torsionsbelastung, entsprechend der Geometrie der Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13

Literaturquelle	α_π bzw. β_π	Anmerkung
Nakazawa /Nak51/	$\alpha_{\pi-d_{h1}} = 3,07$	Gl. (2.74) - S. 49; $d_{h1} = 22,05$ mm
Yoshitake (z.B. in /Pet88/)	$\alpha_{\pi-d_{h1}} = 3,70$	Gl. (2.75) - S. 50; $d_{h1} = 22,05$ mm; für Keilwellen
DIN 743 /N3/ bzw. FKM-Richtlinie /FKM/	$\beta_\pi = 1,36$	Tabelle 2.7 - S. 48; $d_{BK} = 29$ mm; für $R_m = 970$ N/mm ²
TGL 19340 /TGL/	$\beta_\pi = 1,40$	Tabelle 2.8 - S. 50; $d = 35$ mm
Lehrbücher (z.B. in /Dec98/)	$\alpha_\pi = 2,00$	Tabelle 2.9 - S. 51; $d_{h1} =$ unbekannt
Schöpf /Sch76/	$\alpha_{\pi-d_{h1}} = 3,85$	Bild 2.34 - S. 56; $d_{h1} = 22,05$ mm; für DIN 5480 40x2x18 und DIN 5480 60x3x18
Wesolowski /Wes96/ bzw. DIN 5466-2 /N5/	$\alpha_{\pi-d_{h1}} = 2,15$	Tabelle 2.10 - S. 51; $d_{h1} = 22,05$ mm
Aus der FEM-Berechnung je nach Auswertungsposition		
Freier Auslaufbereich, NL0	$\alpha_{\pi-NSH-NL0-d_w} = 2,08$	Tabelle 4.5 - S. 135 $d_w = 19,9$ mm und $d_{h1} = 22,05$ mm
Freier Auslaufbereich, NL1	$\alpha_{\pi-NSH-NL1-d_w} = 2,02$	
WNV-Beginn (Zugseite), NL0	$\alpha_{\pi-NSH-NL0-d_{h1}} = 3,45$	
WNV-Beginn (Zugseite), NL1	$\alpha_{\pi-NSH-NL1-d_{h1}} = 2,49$	
Ungestörter Fußbereich, NL1	$\alpha_{\pi-NSH-NL1-d_{h1}} = 2,06$	
Fußbereich (auslaufnah), NL1	$\alpha_{\pi-NSH-NL1-d_{h1}} = 2,60$	

Weiterhin wurden die sich einstellenden Vergleichsspannungskonzentrationen an den Kontaktflächen der Zahnwelle und Nabe bei Torsion betrachtet. Das folgende Bild (**Bild 4.23**) kennzeichnet die Eckpunkte der untersuchten Kontaktflächen.

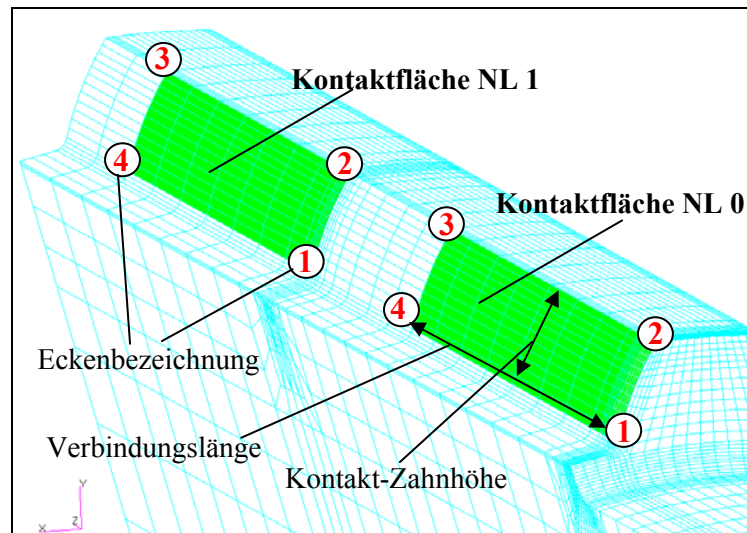
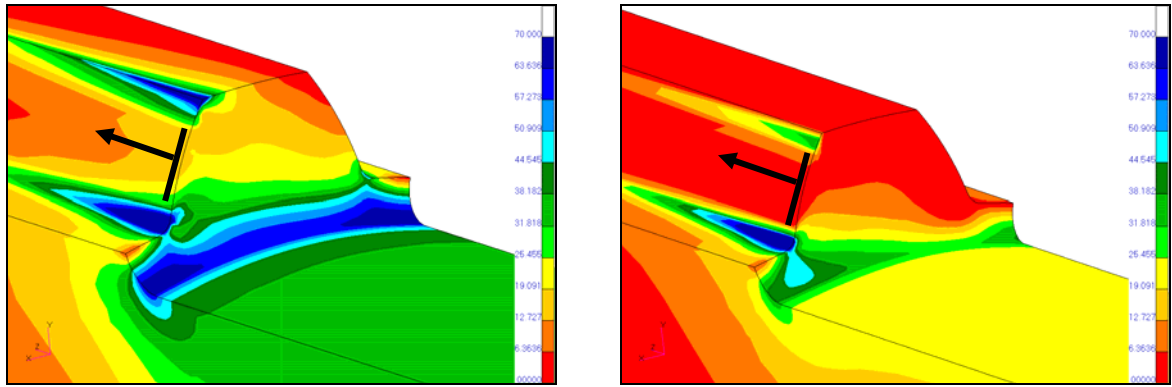


Bild 4.23: Eckenbezeichnung der untersuchten Kontaktflächen an der Zahnwelle in Nabenlagen (0) und (1)

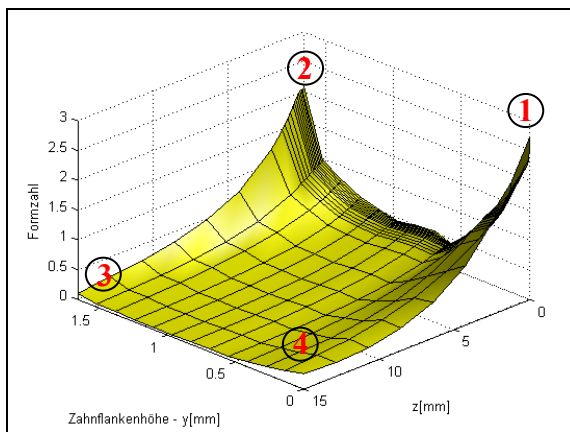
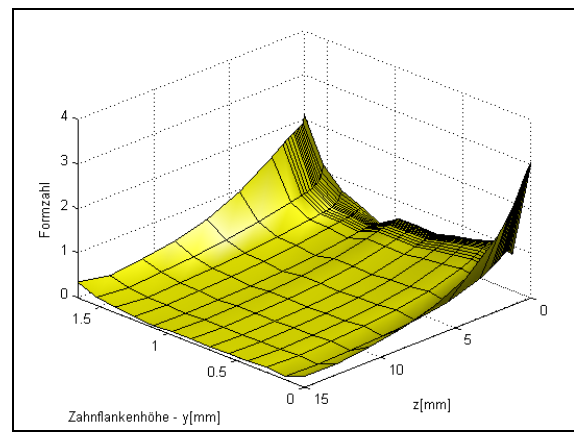
Zur besseren Vorstellung der Vergleichsspannungsverteilung im Kontaktbereich wurde die Formzahl über der Kontaktfläche bzw. über der Zahnhöhe und der Verbindungsbreite dreidimensional dargestellt. Die folgenden Abbildungen (**Bilder 4.24 bis 4.27**) zeigen die Auswertung der Formzahlverläufe nach der GEH und der NSH an den Kontaktflächen von Welle und Nabe für die Nabenlage (0) und (1).

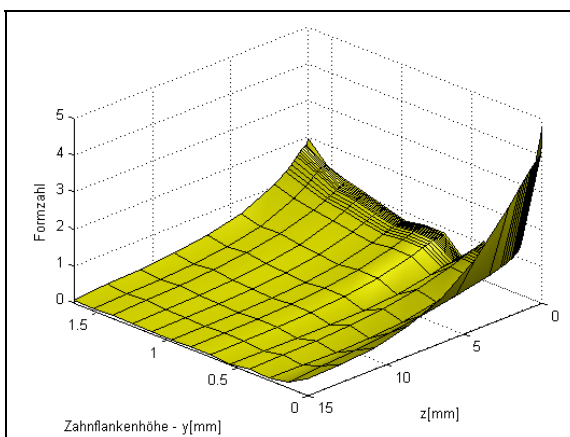
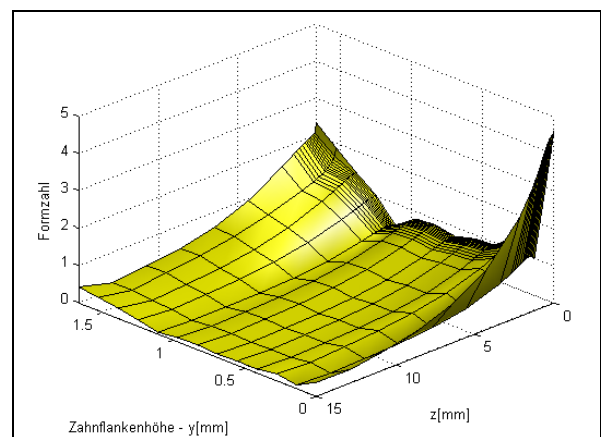
Tendenziell liegen die Formzahlen nach NSH über denen nach der GEH ermittelten Formzahlen im Kontaktbereich. Die Verläufe an Zahnwelle und Zahnnabe sind etwas ähnlich. Es ergeben sich Spannungserhöhungen im Zahnkopf und Zahnfußbereich. Bei der Nabenlage (0) wird der Zahnfuß stärker als der Zahnkopf beansprucht. Bei der Nabenlage (1) befindet sich der Ort der maximalen Formzahl deutlich im Zahnkopfbereich. Die maximal auftretende Formzahl nach GEH und NSH in Nabenlage (1) ist wesentlich größer als in Nabenlage (0). Ursache dafür ist die geringere Nachgiebigkeit des Zahnes der Welle in Nabenlage (1). Die Struktur ist dort wesentlich steifer. Dies hat zu Folge, dass sich ein schärferer Formzahlgradient und auch größere Absolutwerte einstellen.


 a) Kontaktbereich nach der **GEH** für NL 0

 b) Kontaktbereich nach der **NSH** für NL 0

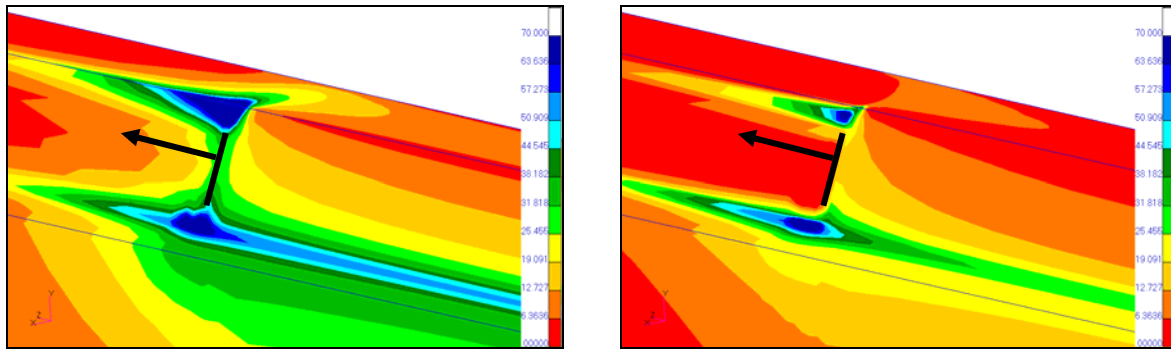
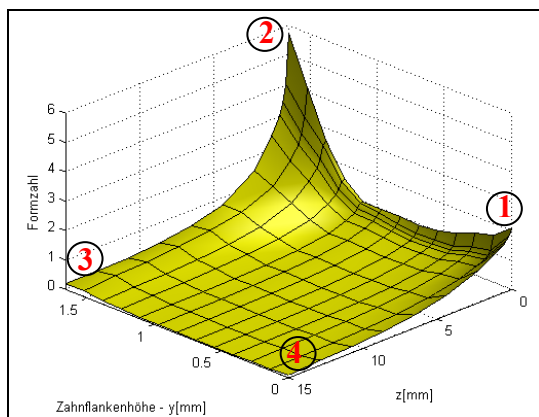
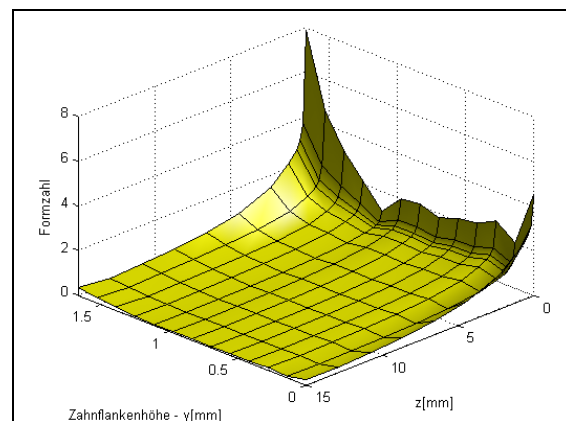
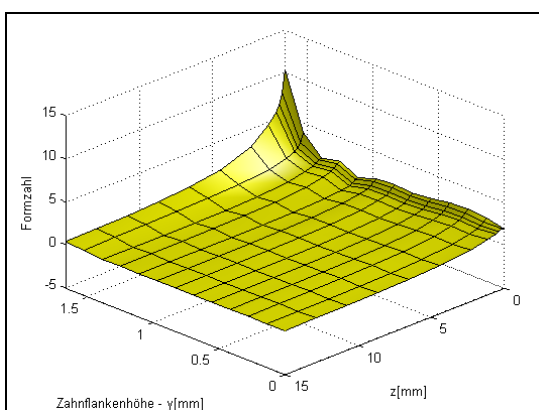
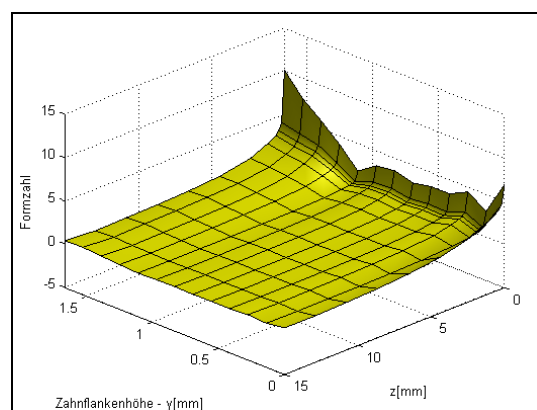
Bild 4.24: Vergleichsspannungsverteilung torsionsbelasteter Zahnwelle, im Kontaktbereich der Nabenlage (0)


 an der Kontaktfläche der **Zahnwelle**

 an der Kontaktfläche der **Zahnnabe**

 a) 3D-Formzahlverteilung nach der **GEH** im Kontaktbereich für die Nabenlage (0)

 an der Kontaktfläche der **Zahnwelle** (Druckseite)

 an der Kontaktfläche der **Zahnnabe** (Druckseite)

 b) 3D-Formzahlverteilung nach der **NSH** im Kontaktbereich für die Nabenlage (0)

 Bild 4.25: Dreidimensionale Darstellung der Formzahlverläufe in Nabenlage (0) (bezogen auf den kleinsten Wellendurchmesser $d_w = 19,9 \text{ mm}$) nach der GEH und NSH für die Welle und Nabe über dem Kontaktbereich (über der Zahnhöhe und der Verbindungsbreite), /Str07/

a) Kontaktbereich nach der **GEH** für NL 1b) Kontaktbereich nach der **NSH** für NL 1**Bild 4.26:** Vergleichsspannungsverteilung torsionsbelasteter Zahnwelle, im Kontaktbereich der **Nabenlage (1)**an der Kontaktfläche der **Zahnwelle**an der Kontaktfläche der **Zahnnabe****a) 3D-Formzahlverteilung nach der **GEH** im Kontaktbereich für die **Nabenlage (1)****an der Kontaktfläche der **Zahnwelle** (Druckseite)an der Kontaktfläche der **Zahnnabe** (Druckseite)**b) 3D-Formzahlverteilung nach der **NSH** im Kontaktbereich für die **Nabenlage (1)******Bild 4.27:** Dreidimensionale Darstellung der Formzahlverläufe in **Nabenlage (1)** (bezogen auf den kleinsten Wellendurchmesser $d_w = 19,9$ mm) nach der GEH und NSH für die Welle und Nabe über dem Kontaktbereich (über der Zahnhöhe und der Verbindungsbreite) , /Str07/

4.3 Analysen und theoretische Ableitungen

4.3.1 Formzahlvergleich zwischen Wellenabsatz und Zahnwelle

In der Fachliteratur liegen bisher kaum Formzahlwerte von Zahnwellen mit freiem Auslauf vor. Für die Einschätzung der Qualität der berechneten Formzahlen im freien Auslaufbereich wurden die Formzahlen an äquivalenten Wellen mit Absatz gemäß der nach *Melzer /Mel100/* angepassten „DIN 743-Gleichung“ **(2.85)** zum Vergleich herangezogen. Der Vergleich der Zahlenwerte wird durch Diagramme aufgezeigt (**Bild 4.28**).

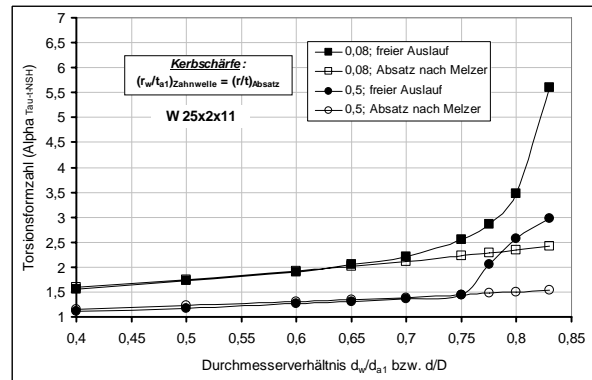
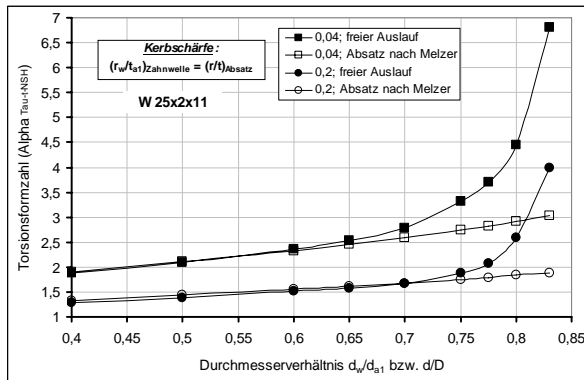
Bei der Ergebnisanalyse konnte in einem großen Bereich des untersuchten Spektrums eine überraschend gute Übereinstimmung zwischen den Formzahlen an beiden Kerbformen gefunden werden. Das Spannungsverhalten weicht nur lokal im Bereich der Zähne von dem des Absatzes ab. Es traten nur vereinzelt Abweichungen bei Torsion auf.

Im Bereich kleiner Zähnezahl $z \leq 11$ und scharfer Kerben weichen die Formzahlen im freien Auslauf mit zunehmendem Verhältnis d_w/d_{a1} stärker von den Vergleichswerten für den Absatz ab. Für den Geometriebereich ($z = 11$ und $d_w/d_{a1} = 0,8$) sind Abweichungswerte von ungefähr 60 % bzw. von etwa 125 % für den Bereich ($d_w/d_{a1} = 0,83$ bzw. $d_w/d_{f1} = 1$ und $z = 11$) festzustellen.

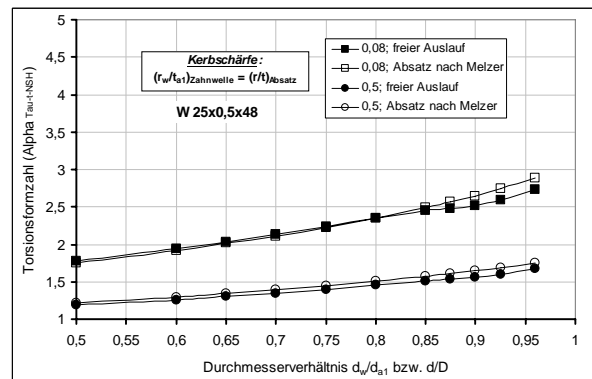
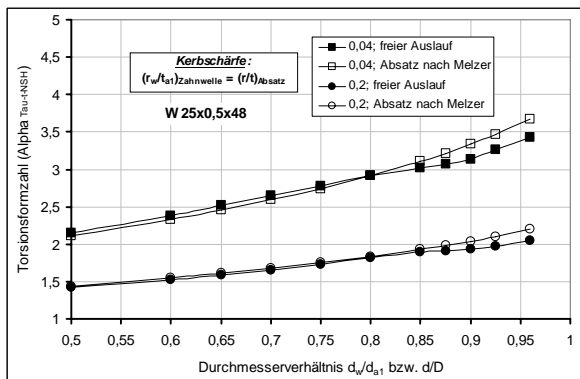
Bei großer Zähnezahl und großen Durchmesserhältnissen liegen die Abweichungswerte unterhalb von 7 % (z.B. W25x0,5x48). Eine ausgezeichnete Übereinstimmung kann somit bei Torsion hauptsächlich für die Zahnwellen mit großer Zähnezahl ermittelt werden.

Bei Zug/Druckbelastung liegen die Werte der Abweichungen für große Durchmesserhältnisse d_w/d_{a1} im normalen Bereich bei ca. 10 %.

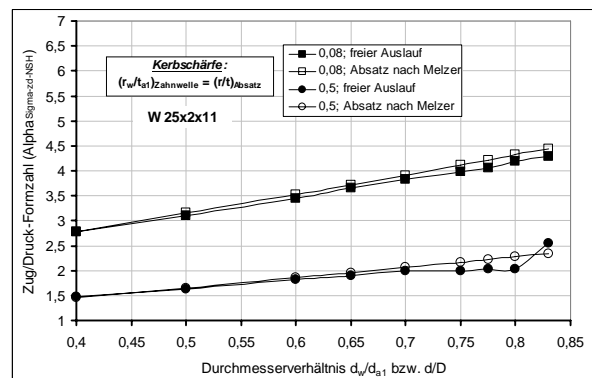
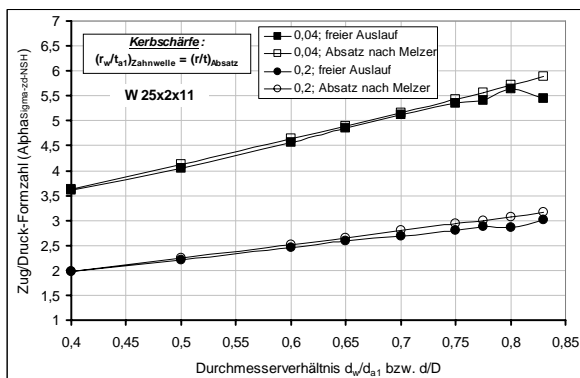
Bei kleinen Verhältnissen d_w/d_{a1} und beliebigen Zähnezahlen liegt die prozentuale Abweichung je Belastungsart unterhalb von 3 %. Die Höhe und Verteilung der maximalen Spannungen für die Zahnwellen und abgesetzten Wellen sind bei kleinen Durchmesserprüngen nahezu identisch. Demzufolge kann auf die FE-Ermittlung weiterer Formzahlen für andere Zahnwellen verzichtet und auf die Berechnungsformel **(2.85)** zurückgegriffen werden.



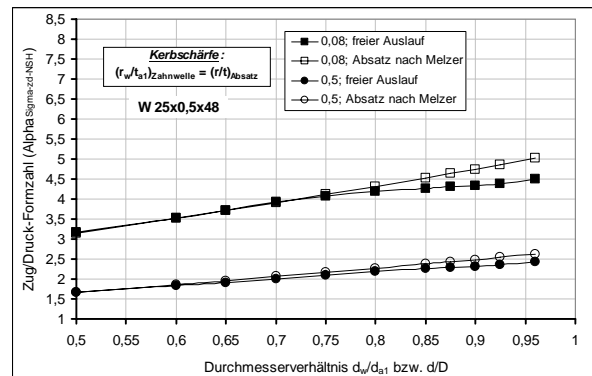
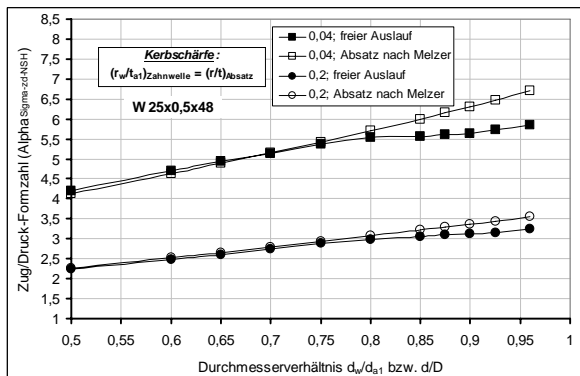
a) Torsionsformzahlvergleiche zwischen freiem Auslauf der Zahnwelle W25x2x11 und äquivalentem Absatz



b) Torsionsformzahlvergleiche zwischen freiem Auslauf der Zahnwelle W25x0,5x48 und äquivalentem Absatz



c) Zug/Druckformzahlvergleiche zwischen freiem Auslauf der Zahnwelle W25x2x11 und äquivalentem Absatz



d) Zug/Druckformzahlvergleiche zwischen freiem Auslauf der Zahnwelle W25x0,5x48 und äquivalentem Absatz

Bild 4.28: Vergleiche der Formzahlen für unterschiedliche Kerbschärffen zwischen Zahnwellen mit freiem Auslauf W25x0,5x48 bzw. W25x2x11 nach DIN 5480 und äquivalenten Absätzen; $d/D = d_w/d_{a1}$ und $r/t = r_w/t_{a1}$

4.3.2 Lage und Abklingverhalten der Spannungsmaxima

Eine Vielzahl von Spannungsfeldanalysen mit FEM-Berechnungen wurde für die Belastungsarten Torsion, Biegung und Zuck/Druck durchgeführt und ausgewertet. Ziel ist es, Aussagen zur ersten Orientierung hinsichtlich der Abschätzung des vollständigen Abklingverhaltens Δz in axialer Richtung des ungestörten Wellenbereiches sowie zur Beurteilung des Ortes der größten Spannungsspitze γ [°] an der Kerbe zu erhalten (**Bild 4.29**).

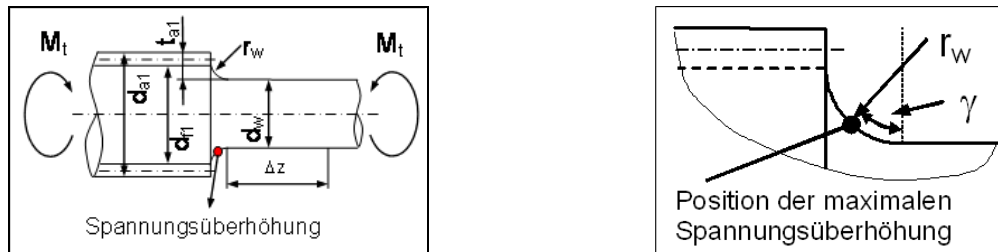


Bild 4.29: Axiales Abklingverhalten und Lage der Spannungsmaxima an Zahnwellen mit freiem Auslauf

Den Untersuchungen liegen zwei verschiedene Zahnwellen W25x2x11 und W25x0,5x48 mit freiem Auslauf zu Grunde. Weiterhin bestand die Notwendigkeit, unterschiedliche Geometrieverhältnisse d_w/d_{a1} und r_w/t_{a1} in die numerischen Untersuchungen einfließen zu lassen. Damit lässt sich feststellen, welche FE-Werte sich in diesen Fällen ergeben und wie sich diese Verhältnisse auf die Koordinaten und den Abklingabstand auswirken.

Axiales Abklingverhalten der Maximalbeanspruchung

Die Kerbvergleichsspannungen in der Umgebung einer ausgebildeten Spannungsspitze im freien Auslauf klingen mit zunehmender Entfernung Δz von der Kerbe umso rascher ab, je größer die Spannungsüberhöhung an der Kerbe ist (**Bild 4.30**).

Der ursprüngliche Nennspannungsverlauf über den kleinsten ungestörten Wellenquerschnitt wird im Allgemeinen in verhältnismäßig geringem Abstand Δz vom Kerbgrund wieder erreicht. Der Bereich der gestörten Spannungsverteilung beschränkt sich auf die engere Umgebung der Kerbe (das Abklingungsgesetz nach Neuber) /Neu85/.

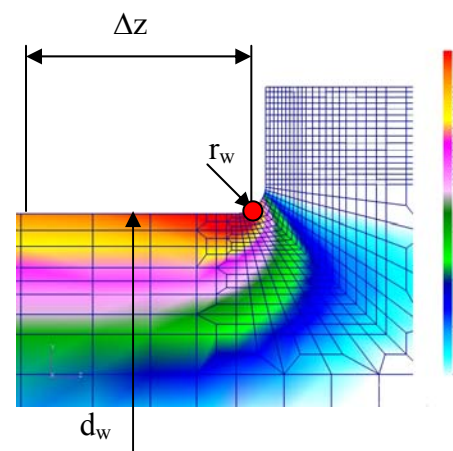
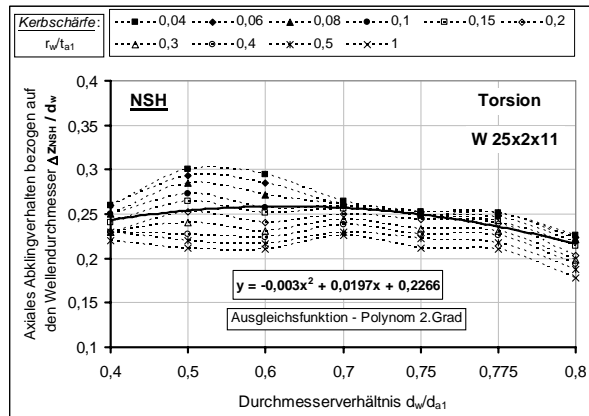


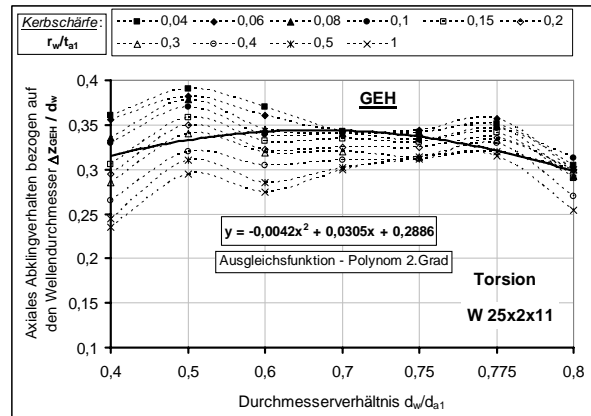
Bild 4.30: Axiale Abklingung der max. Vergleichsspannung torsionsbelasteter Zahnwellen mit freiem Auslauf

Die Ergebnisse zum axialen Abklingverhalten für die höchst beanspruchte Stelle sind abhängig von den Kerbverhältnissen d_w/d_{a1} und r_w/t_{a1} in **Bild 4.31** für Torsion und in **Bild 4.32** für Zug/Druck bzw. Biegung dargestellt. Weiterhin wurden Ausgleichsfunktionen zur Beschreibung des Abklingverhaltens abhängig vom Verhältnis d_w/d_{a1} ermittelt, siehe **Bilder 4.31** und **4.32**. Der Einfluss der Kerbschärfe r_w/t_{a1} blieb dabei unberücksichtigt.

Der axiale Abstand Δz ist auf den Durchmesser d_w im Kerbgrund normiert. Es wurde festgestellt, dass sich die Abklingabstände für Torsion bei steigendem Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} durch die Verlagerung des Ortes der Maximalspannung in die Zahnfußrichtung verkleinern. Die Übertragbarkeit der gewonnenen Ergebnisse auf andere Durchmesser ist auf Grund des linear elastischen Verhaltens möglich.

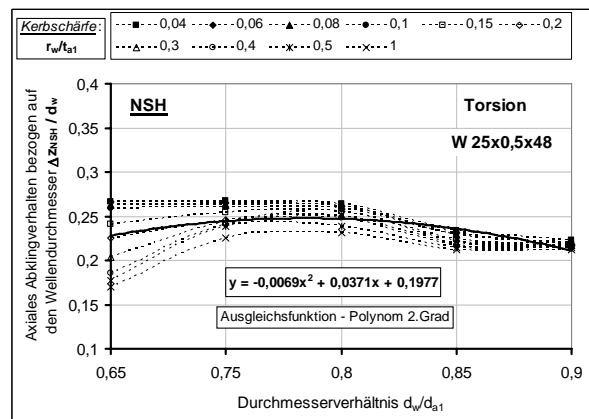


$$\left(\frac{\Delta z}{d_w}\right)_{\pi-NSH} = -0,003 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right)^2 + 0,02 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right) + 0,23$$

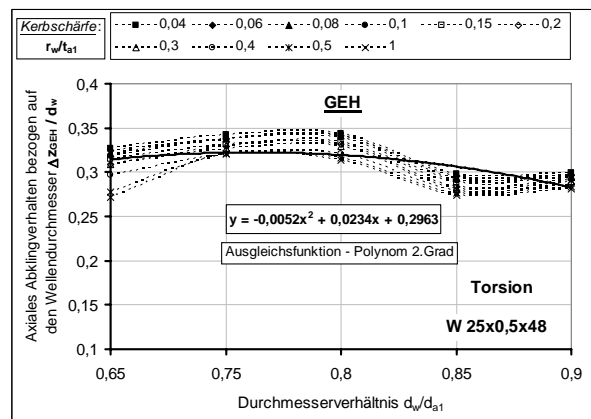


$$\left(\frac{\Delta z}{d_w}\right)_{\pi-GEH} = -0,004 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right)^2 + 0,031 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right) + 0,3$$

a) axiales Abklingverhalten bei Torsion für die Zahnwelle **W25x2x11**; links: nach **NSH** und rechts: nach **GEH**



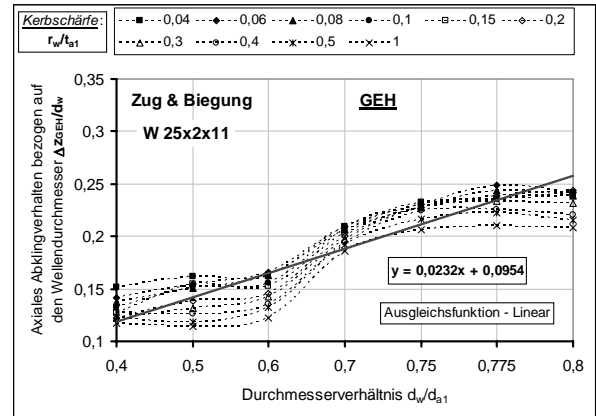
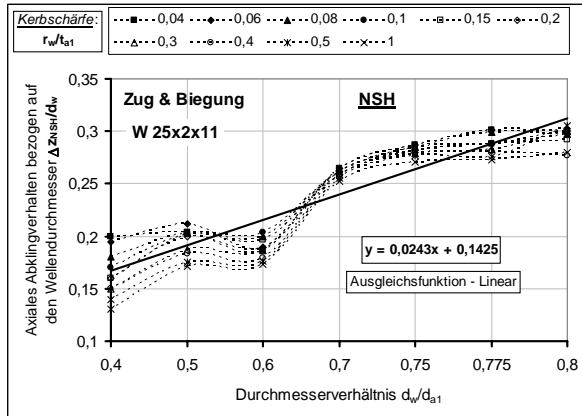
$$\left(\frac{\Delta z}{d_w}\right)_{\pi-NSH} = -0,007 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right)^2 + 0,037 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right) + 0,2$$



$$\left(\frac{\Delta z}{d_w}\right)_{\pi-GEH} = -0,005 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right)^2 + 0,023 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right) + 0,3$$

b) axiales Abklingverhalten bei Torsion für die Zahnwelle **W25x0,5x48**; links: nach **NSH** und rechts: nach **GEH**

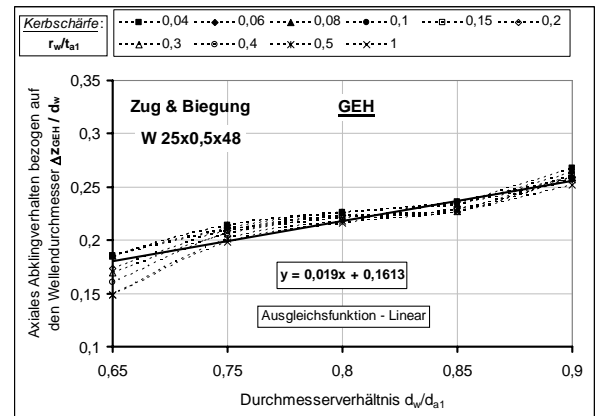
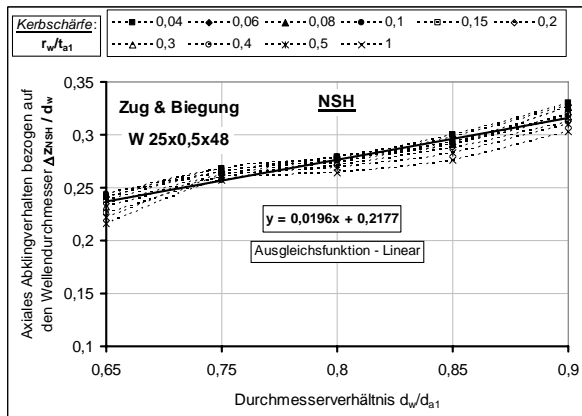
Bild 4.31: Darstellung des axialen Abklingverhaltens $\Delta z/d_w$ der Spannungsüberhöhung bei **Torsion** für die Zahnwellen **W25x2x11** und **W25x0,5x48** mit freiem Auslauf abhängig vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} und der Kerbschärfe r_w/t_{a1}



$$\left(\frac{\Delta z}{d_w}\right)_{\sigma_{d,b}-NSH} = 0,024 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right) + 0,14$$

$$\left(\frac{\Delta z}{d_w}\right)_{\sigma_{d,b}-GEH} = 0,023 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right) + 0,1$$

a) axiales Abklingverhalten bei **Zug/Druck** bzw. **Biegung** für die Zahnwelle **W25x2x11**; **links:** nach der **NSH** und **rechts:** nach der **GEH**



$$\left(\frac{\Delta z}{d_w}\right)_{\sigma_{d,b}-NSH} = 0,02 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right) + 0,22$$

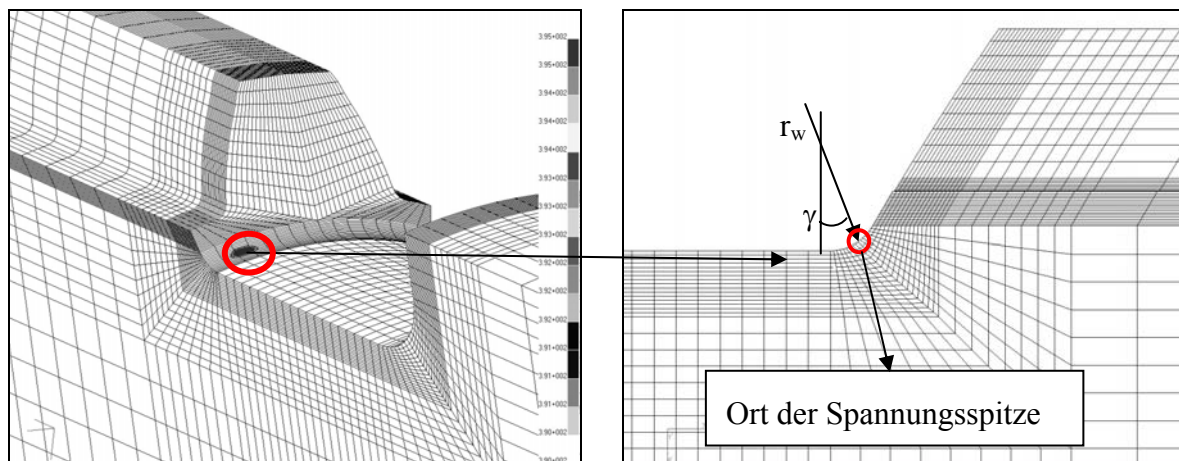
$$\left(\frac{\Delta z}{d_w}\right)_{\sigma_{d,b}-GEH} = 0,02 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}}\right) + 0,16$$

b) axiales Abklingverhalten bei **Zug/Druck** bzw. **Biegung** für die Zahnwelle **W25x0,5x48**; **links:** nach der **NSH** und **rechts:** nach der **GEH**

Bild 4.32: Darstellung des axialen Abklingverhaltens $\Delta z/d_w$ der Spannungsüberhöhung bei **Zug/Druck** bzw. **Biegung** für die Zahnwellen **W25x2x11** und **W25x0,5x48** mit freiem Auslauf abhängig vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} und der Kerbschärfe r_w/t_{a1}

FE-Bestimmung der Lage der Spannungsmaxima

Eine Winkel- bzw. Koordinatenabschätzung der größten Spannungsüberhöhung in und durch die Kerbe ist von praktischem Interesse. Bei bekannter Position der Spannungsmaxima können durch konstruktive Maßnahmen (z.B. elliptische Kerben) die Kerbwirkung verringert und die Ungleichmäßigkeiten in der Spannungsverteilung ausgeglichen werden. Außerdem wird dies zur höheren Genauigkeit bei der experimentellen Bestimmung der Formzahlen (z.B. durch Dehnmessstreifen) beitragen. Zur Beschreibung der Spannungsspitzenlage auf der Kerbberandung im freien Auslauf wird der Winkel γ [°] eingeführt, wie in **Bild 4.33** dargestellt. Die notwendigen x- und y-Lagekoordinaten zur Berechnung des gesuchten Winkels werden aus den numerischen Untersuchungen gewonnen.



a) Ort der max. Vergleichsspannung bei Torsion nach der NSH

b) Beschreibung der Maximalspannungslage γ [°] im freien Auslauf

Bild 4.33: Winklabschätzung γ [°] zur Beschreibung des Ortes der maximalen Vergleichsspannung im freien Auslauf (hier bei Torsionsbeanspruchung nach der NSH)

Die gewonnenen FE-Zahlenwerte sowie die ermittelten Näherungsbeziehungen zur Winkelberechnung γ im freien Auslauf sind für die Zahnwellen mit kleinen und großen Zähnezahlen in Diagrammform aufgeführt (**Bild 4.34**). Bei Analyse der Ergebnisse kann deutlich festgehalten werden, dass die Position der Spannungsspitze hauptsächlich von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und geringfügig vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} abhängig ist.

Der Maximalwert der Spannungsüberhöhung befindet sich nicht unmittelbar bei Beginn des Kerbradius (der Hohlkehle) im Kerbgrund wie bei Wellen mit Rundnut (**Bild 4.35**), sondern kurz dahinter, wo der Querschnitt schon etwas vergrößert ist.

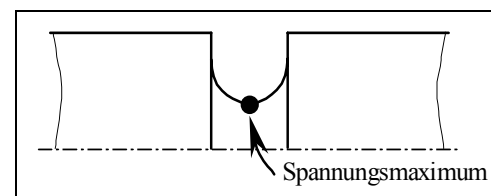
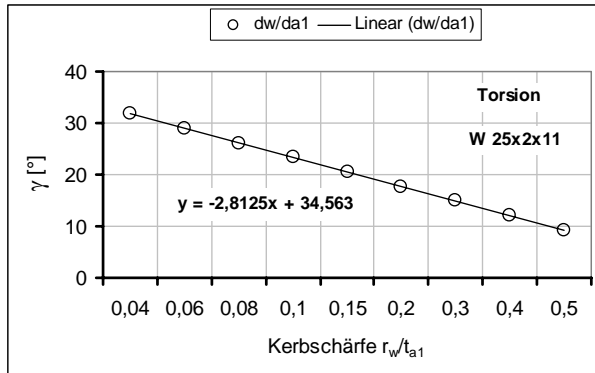


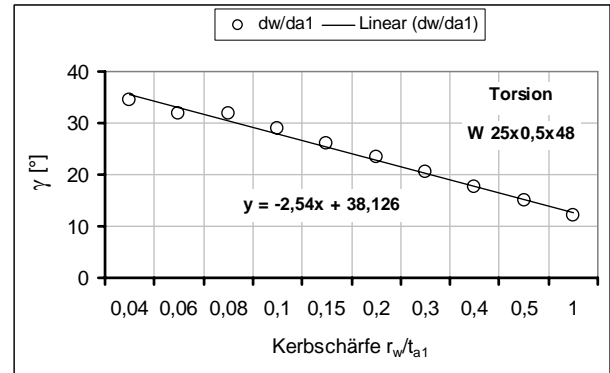
Bild 4.35: Ort des Spannungsmaximums bei Wellen mit Rundnuten

Die Lage des Maximalspannungspunktes an der Kerbkontur verändert sich je nach der Form der Auslauferkebe. Je schärfer die Kerbe ist, um so weiter verlagert sich die Position des Spannungsmaximums aus dem Kerbgrund hinaus. Und umgekehrt nähert sie sich vom Kerbgrund bei sanften Kerben an. Bei großem Kerbradius und wachsendem Verhältnis $d_w/d_{f1} \approx 1$ verschiebt sich die Torsionsspannungsspitze in Richtung der Fußausrundung hinein (**Bild 4.18**).

Mit den Angaben aus den Näherungsfunktionen für die Ermittlung des Abklingverhaltens und der Lage der Spannungsmaxima ist es möglich, bereits im Vorfeld Aussagen treffen zu können, wo lokale plastische Verformungen (bei duktilem Werkstoff) bzw. Anrisse (bei sprödem Werkstoff) zu erwarten sind.



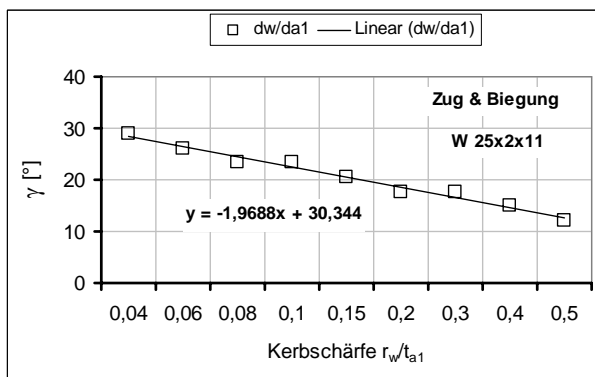
$$\gamma_{\pi} [^{\circ}] = -2,8 \cdot \left(\frac{r_w}{t_{a1}} \right) + 34,6$$



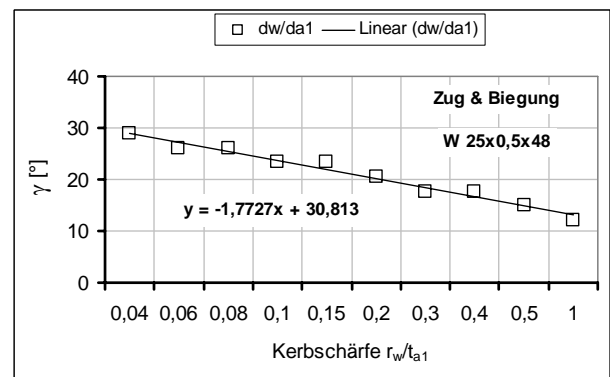
$$\gamma_{\pi} [^{\circ}] = -2,5 \cdot \left(\frac{r_w}{t_{a1}} \right) + 38,13$$

a) Lage der Spannungsspitze γ [°] bei **Torsion** im freien Auslauf der Zahnwelle **W25x2x11**

b) Lage der Spannungsspitze γ [°] bei **Torsion** im freien Auslauf der Zahnwelle **W25x0,5x48**



$$\gamma_{\sigma d, b} [^{\circ}] = -2 \cdot \left(\frac{r_w}{t_{a1}} \right) + 30,35$$



$$\gamma_{\sigma d, b} [^{\circ}] = -1,8 \cdot \left(\frac{r_w}{t_{a1}} \right) + 30,8$$

c) Lage der Spannungsspitze γ [°] bei **Biegung** oder **Zug** im freien Auslauf der Zahnwelle **W25x2x11**

d) Lage der Spannungsspitze γ [°] bei **Biegung** oder **Zug** im freien Auslauf der Zahnwelle **W25x0,5x48**

Bild 4.34: Darstellung der Position der maximalen Spannungsüberhöhung auf der Kerbberandung im freien Auslauf der Zahnwellen **W25x2x11** und **W25x0,5x48** unter **Torsion** und **Biegung** abhängig von der Zähnezahl und von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} ; d_w/d_{a1} = beliebig

4.3.3 Zusammenhänge zwischen den Formzahlen aus der GEH und der NSH

Zwischen den ermittelten Formzahlen aus der GEH und der NSH bei Torsion, Biegung und Zug/Druck $\alpha_{\sigma,\tau-GEH} = f(\sigma_{v-GEH})$ und $\alpha_{\sigma,\tau-NSH} = f(\sigma_{v-NSH})$ für die Zahnwellen mit freiem Auslauf bestehen Näherungszusammenhänge. Bei Ermittlung der Zusammenhänge ist darauf zu verweisen, dass die Abweichungen vom ebenen Verzerrungszustand (**Abschnitt 2.4.2**) insbesondere auf die unterschiedliche Lage der Spannungsmaxima (nach der GEH oder der NSH) zurückzuführen sind. Hierbei spielt auch die Kerbüberlagerung eine Rolle. Die Unterschiede (maximal 5 %) vom linearen Zusammenhang beruhen auf der Numerik des Verfahrens. Die Spannungsspitzen bei Zug/Druck und Biegung einerseits und bei Torsion andererseits treten nicht an der gleichen Stelle der Kerbberandung auf.

Bei Zug/Druck- und Biegebelastung

Für die Belastungsarten Zug/Druck und Biegung befindet sich der Ort der Spannungsspitze je nach der GEH oder der NSH für alle untersuchten Geometrieparameter (d_w/d_{a1} , r_w/t_{a1} und z) im freien Auslauf unter dem Kopfkreis, in der Mitte des Vollzahn, siehe **Bild 4.36**.

Die maximale Spannung klingt ab in die beiden Sektorseiten in Richtung der Zahnücke. Bei kleinen Verhältnissen d_w/d_{a1} konzentriert sich die Maximalspannung nicht in einem Punkt, sondern verteilt sich gleichmäßig über den Umfang der Zahnwelle im Kerbgrund wie beim Wellenabsatz.

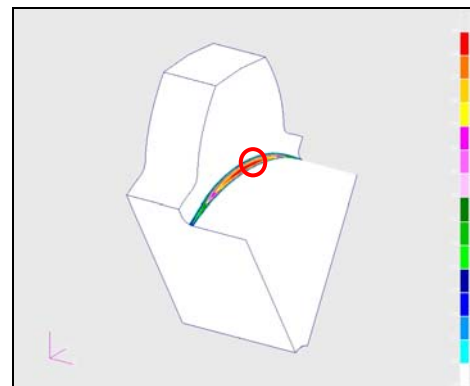


Bild 4.36: Ort der Maximalspannung bei Zugbelastung im freien Auslauf der Zahnwelle z.B. W15x2x6 mit $d_w/d_{a1} = 0,65$ und $r_w/t_{a1} = 0,1$

Die prozentualen Abweichungen der abgeklungenen Spannung vom Größenwert vergrößern sich mit zunehmendem Verhältnis d_w/d_{a1} . Sie sind z.B. für die Zahnwelle W25x2x11 bei Zugbelastung wie folgt aufgelistet.

d_w/d_{a1}	0,6	0,65	0,7	0,75	0,775
Proz. Abweichung	1 %	2 %	4 %	11,5 %	16 %

Diese Abweichungswerte gelten in etwa für die Auswertung aus der NSH oder GEH und werden mit zunehmendem Verhältnis r_w/t_{a1} etwas kleiner.

Die Umrechnung zwischen der ersten Hauptspannung σ_{v-NSH} und der max. Vergleichsspannung σ_{v-GEH} erfolgt unabhängig von der Zähnezah, von der Kerbschärfe oder vom Durchmesser-Verhältnis. Es gilt dabei die Gl. (4.4) mit sehr geringer Streuung der FE-Ergebnisse:

$$\alpha_{\sigma_{b,zd-GEH}} \approx (0,85 \dots 0,93) \cdot \alpha_{\sigma_{b,zd-NSH}} \quad (4.4)$$

Bei Torsionsbelastung

Bei Torsion wird zwischen den Formzahlen im freien Auslauf und im Zahnfuß unterschieden. Außerdem unterscheidet man zwischen den Formzahlen gestörter und ungestörter Torsionsspannungsbereiche.

Im ungestörten freien Auslaufbereich:

Solange $d_w \leq d_{fl}$ ist, ist die Lage der Torsionsspannungsmaxima nach der GEH bzw. der NSH identisch. Sie ist in diesem geometrischen Bereich unabhängig von der Zähnezahzahl (z.B. für $d_w/d_{a1} \leq 0,7$ bei W25x2x11). Es tritt keine gegenseitige Wechselwirkung der Kerben (Zahnfuß/Auslauf) auf. Die höchsten Spannungen verteilen sich gleichmäßig über dem Umfang des Sektorübergangs (**Bild 4.37**). Zwischen den Vergleichsspannungen σ_{v-GEH} und σ_{v-NSH} gilt die Beziehung (4.5). Damit besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Formzahlen nach Gl. (4.6). Die Formzahl steigt linear mit dem Verhältnis $(t_{a1}/r_w)^{0,5}$ an.

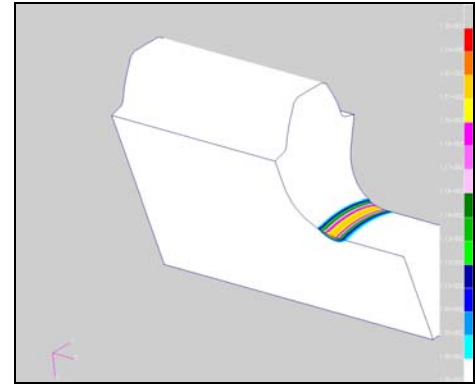


Bild 4.37: Ort der Maximalspannung bei Torsion (**GEH** bzw. **NSH**) im freien Auslauf der Zahnwelle; z.B. W25x2x11 mit $d_w/d_{a1} = 0,5$ und $r_w/t_{a1} = 0,4$

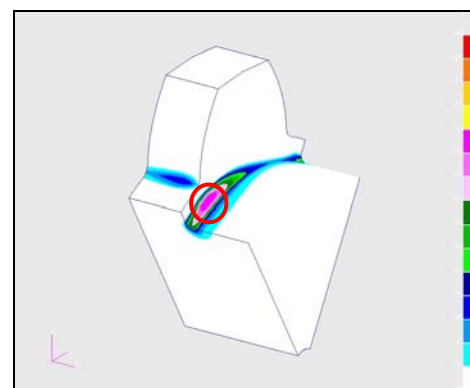
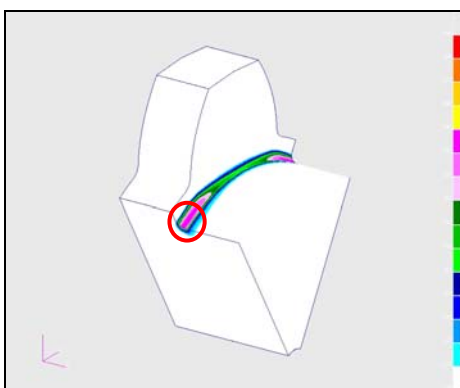
$$\sigma_{v-GEH} = \sqrt{3} \cdot \sigma_{v-NSH} \quad (4.5)$$

$$\alpha_{\pi-GEH} \approx (0,99 \dots 1,01) \cdot \alpha_{\pi-NSH} \quad (4.6)$$

Im gestörten freien Auslaufbereich:

Besonders im technisch interessierten Geometriebereich von $d_{fl}-3 \text{ mm} \leq d_w \leq d_{fl}$ tritt eine Kerbüberlagerung auf. Die Lageunterschiede der Spannungsüberhöhung nach der GEH und NSH können vor allem bei den Zahnwellen mit kleinen Zähnezahlen und großem Durchmesser-Verhältnis (z.B. ab $d_w/d_{a1} = 0,75$ für W25x2x11) festgestellt werden.

Während sich die Lage der Höchstspannung aus der GEH in der Mitte der Zahnücke am freien Auslauf unter dem Fußkreis konzentriert, tritt sie nach der NSH im Auslauf unter dem Beginnspunkt der Zahnfußausrundung auf, siehe **Bild 4.38**. Diese Vergleichsspannungsmaxima klingen in die Mitte der Sektorübergangszone unter dem Kopfkreis ab.



a) Ort der max. Torsionsspannung nach der **GEH**

b) Ort der max. Torsionsspannung nach der **NSH**

Bild 4.38: Ort der Maximalspannung bei Torsion im freien Auslauf der Zahnwellen; z.B. W15x2x6 mit $d_w/d_{a1} = 0,65$ und $r_w/t_{a1} = 0,1$; a) nach der **GEH** und b) nach der **NSH**

Die prozentualen durchschnittlichen Abweichungen des Wertes der max. Kerbspannung (aus der GEH oder der NSH) vom Wert der abgeklungenen Spannung im Auslauf in der Vollzahnmitte sind sowohl vom Durchmesser-Verhältnis als auch von der Kerbschärfe abhängig. Sie betragen z.B. bei der Zahnwelle W25x2x11 wie folgt:

d_w/d_{a1}	0,6	0,65	0,7	0,75	0,775
Proz. Abweichung	1,6 %	4 %	6 %	12 %	18 %

Mit zunehmender Schärfe der Kerbe erhöhen sich die Vergleichsspannungen und klingen schneller ab. Beispielsweise beträgt die durchschnittliche Abweichung gemäß der NSH etwa 7 % (für $d_w/d_{a1} = 0,775$ und $r_w/t_{a1} = 1$) und etwa 22,5 % (für $d_w/d_{a1} = 0,775$ und $r_w/t_{a1} = 0,04$).

Die Lage der Maximalspannung aus der NSH ändert sich mit Variation der Kerbparameter ständig. Sie liegt nicht mehr im Kerbradius, sondern an der Außenkante der Verzahnung (**Bild 4.39**), oder etwas weiter innen innerhalb der Zahnfußausrundung. Da sich die Lagen der Spannungsspitzen σ_{v-NSH} und σ_{v-GEH} und ebenfalls die Formzahlen α_{tt-GEH} und α_{tt-NSH} in Abhängigkeit von der Auslaufgeometrie voneinander zum Teil erheblich unterscheiden, weichen die Formzahlverhältnisse vom angenommenen Verzerrungszustand ab. Hier ist ein quantitativer, allgemein gültiger Zusammenhang zwischen den Formzahlen für die Bestimmung von σ_{v-NSH} und σ_{v-GEH} schwer festzulegen, siehe **Tabelle 4.8**.

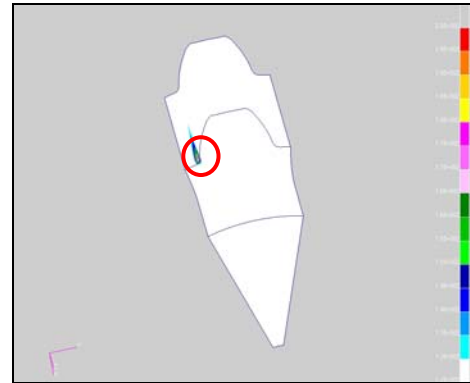


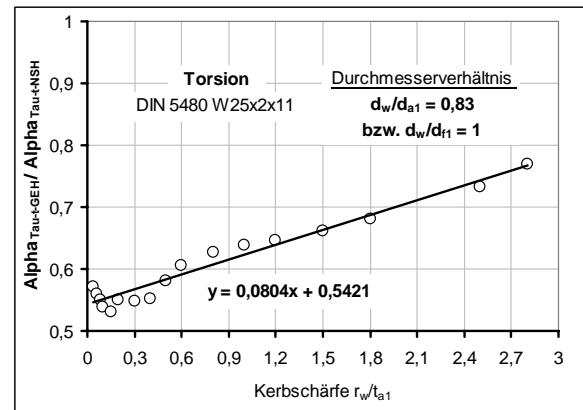
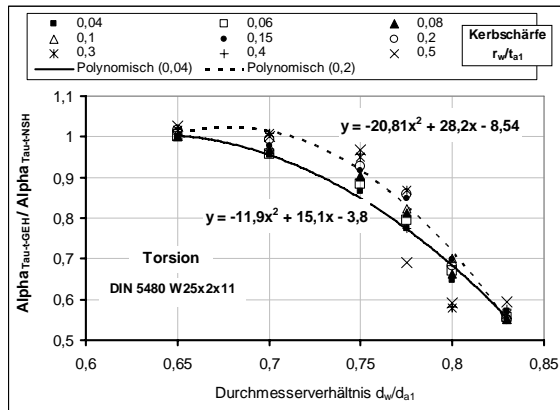
Bild 4.39: Position der höchsten Hauptspannung bei Torsion nach der NSH an der Zahnwelle W25x2x11 mit $d_w/d_{a1} = 0,75$ und $r_w/t_{a1} = 1$ oder mit $d_w/d_{a1} = 0,775$ und $r_w/t_{a1} = 0,5$

Tabelle 4.8: Zusammenhänge zwischen den Torsionsformzahlen und den Vergleichsspannungen (GEH bzw. NSH)

Zahnwellengeometrie	Zusammenhang im freien Auslauf $\frac{\alpha_{\pi-GEH}}{\alpha_{\pi-NSH}} = f(\alpha_{\tau})$	Gültigkeitsbereich
W15x2x6	$\alpha_{\pi-GEH} \approx (0,78...0,95) \cdot \alpha_{\pi-NSH}$	$d_w/d_{f1} \geq 0,75$
	$\sigma_{v-GEH} \approx (1,35...1,65) \cdot \sigma_{v-NSH}$	
W25x2x11	$\alpha_{\pi-GEH} \approx (0,55...0,95) \cdot \alpha_{\pi-NSH}$	$d_w/d_{f1} \geq 0,84$
	$\sigma_{v-GEH} \approx (0,95...1,65) \cdot \sigma_{v-NSH}$	
W40x2x18	$\alpha_{\pi-GEH} \approx (0,85...0,97) \cdot \alpha_{\pi-NSH}$	$d_w/d_{f1} \geq 0,9$
	$\sigma_{v-GEH} \approx (1,47...1,68) \cdot \sigma_{v-NSH}$	
W25x0,5x48	$\alpha_{\pi-GEH} \approx (0,96...0,99) \cdot \alpha_{\pi-NSH}$	$d_w/d_{f1} \geq 0,935$
	$\sigma_{v-GEH} \approx (1,66...1,71) \cdot \sigma_{v-NSH}$	
Die kleinen Werte in den Klammern gelten für die großen Verhältnisse d_w/d_{f1} und umgekehrt.		

Mit zunehmender Zähnezahl $z > 18$ (z.B. W25x0,5x48) wird die Zahnwelle steifer und nähert sich dem Wellenabsatz. Die maximalen Torsionsspannungen aus der GEH und der NSH treten am gleichen Ort unabhängig vom Durchmesser Verhältnis auf. Die Abweichung der Formzahl α_{tt-GEH} von der Formzahl α_{tt-NSH} nimmt stark ab, siehe **Tabelle 4.8**.

Bilder 4.40 und 4.41 beinhalten eine Darstellung der Torsionsformzahlverhältnisse aus der GEH und der NSH im freien Auslauf verschiedener Zahnwellen mit unterschiedlichen Verhältnissen d_w/d_{a1} und r_w/t_{a1} . Für kleine Verhältnisse $d_w/d_{a1} < 0,7$ gilt $\alpha_{\tau\text{-GEH}} = \alpha_{\tau\text{-NSH}}$. Mit den in den Bildern aufgelisteten Formeln kann das Formzahlverhältnis beschrieben werden.

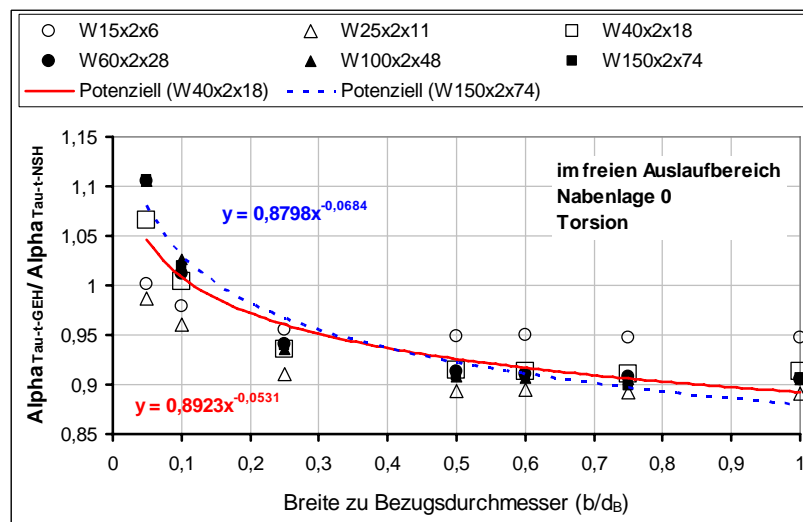


$$\frac{\alpha_{\tau\text{-GEH}}}{\alpha_{\tau\text{-NSH}}} \approx -21 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}} \right)^2 + 28 \cdot \left(\frac{d_w}{d_{a1}} \right) - 8,5$$

$$\frac{\alpha_{\tau\text{-GEH}}}{\alpha_{\tau\text{-NSH}}} \approx 0,08 \cdot \left(\frac{r_w}{t_{a1}} \right) + 0,54$$

a) für unterschiedliche Verhältnisse $0,7 \leq d_w/d_{a1} \leq 0,83$ b) bei konstantem Verhältnisse $d_w/d_{a1} = 0,83 = \text{const.}$ und $0,04 \leq r_w/t_{a1} \leq 0,5$

Bild 4.40: Darstellung des Zusammenhanges zwischen den Torsionsformzahlen nach der **GEH** und der **NSH** im freien Auslauf für die Zahnwelle **W25x2x11**; abhängig von d_w/d_{a1} und r_w/t_{a1}



$$\frac{\alpha_{\tau\text{-GEH}}}{\alpha_{\tau\text{-NSH}}} \approx 0,9 \cdot \left(\frac{b}{d_B} \right)^{-0,06}$$

Bild 4.41: Torsionsformzahlverhältnisse im freien Auslauf für verschiedene Zahnwellengeometrien ($6 \leq z \leq 82$; $r_w/t_{a1} = 0,2$ und $d_w = d_{f1} - 1,6 \text{ mm}$) in Abhängigkeit vom Verhältnis Breite zu Bezugsdurchmesser b/d_B

Im ungestörten Zahnfußbereich:

Im durch die Belastungseinflüsse oder Auslaufkerbgeometrie ungestörten Zahnfußbereich sind die Torsionsformzahlen nach der GEH und der NSH unabhängig von der Zähnezahl, für die belastete und lastfreie Seite fast gleich. Es gelten ebenfalls die Beziehungen (4.5) und (4.6). Werden die Torsionsformzahlen im Zahnfuß auf den Wellendurchmesser d_w bezogen, so hängen sie von der Zähnezahl und stark vom Verhältnis d_w/d_{a1} ab (**Bild 4.42-a**). Bei dieser Nennspannungsdefinition erreichen sie nur sehr geringe Werte $0,2 < \alpha_{\tau\text{-}dw} < 1,6$. Bezieht man diese Formzahlen auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} , so hängen sie nur von der Zähnezahl ab. Die Variation der Verhältnisse r_w/t_{a1} und d_w/d_{a1} hat somit keinen Einfluss auf die Formzahlgröße. Sie erreichen einen Wert von ca. $\alpha_{\tau\text{-}dh1} \approx 2$, siehe **Bild 4.42-b**.

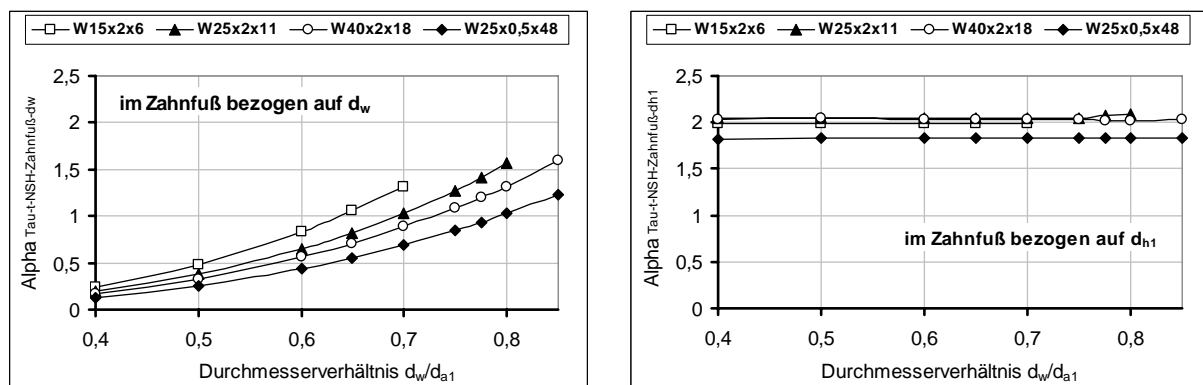
a) Torsionsformzahl bezogen auf d_w b) Torsionsformzahl bezogen auf d_{h1}

Bild 4.42: Verlauf der Torsionsformzahl im ungestörten Zahnfußbereich der Zahnwellen mit freiem Auslauf über dem Durchmesser Verhältnis; a) bezogen auf d_w und b) auf d_{h1}

Im gestörten Zahnfußbereich:

Bei Zahnwellen mit kleinen Zähnezahlen $z < 18$ und bei steigenden Verhältnissen d_w/d_{f1} und r_w/t_{a1} bildet sich in der Zahnfußausrundung eine Spannungserhöhung im benachbarten Bereich der Auslauf-Spannungserhöhung aus (**Bild 3.43**). Diese Spannungsspitze liegt vom Verzahnungsbeginn im Abstand von $a < 1,5$ mm entfernt und ist nur nach der NSH anzutreffen. Benachbart angeordnete Kerben beeinflussen wechselseitig die zugehörigen Formzahlen. Sie vermindern bzw. erhöhen die Maximalspannung. Nach der GEH dagegen befindet sich die am höchsten beanspruchte Stelle im freien Auslaufbereich. Demzufolge muss eine separate Ergebnissauswertung bezüglich der verwendeten Spannungshypothese erfolgen.

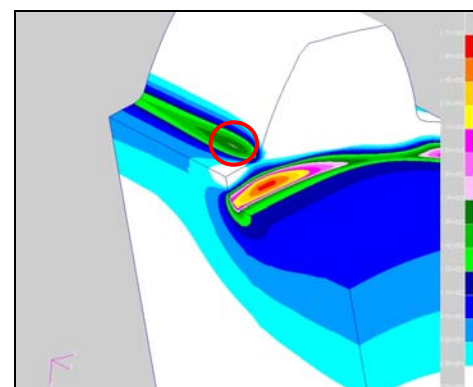


Bild 4.43: In der Nähe vom freien Auslauf liegende Spannungskonzentration bei Torsion nach der NSH, am Beispiel der Zahnwelle W25x2x11 mit $d_w/d_{a1} = 0,775$ und $r_w/t_{a1} = 0,1$

Die Stärke dieser zweifachen Spannungsüberhöhung ist hauptsächlich vom Durchmesser Verhältnis und von der Zähnezahl abhängig. Sie wächst auch geringfügig mit zunehmender Kerbschärfe. Mit zunehmender Zähnezahl $z > 28$ verringert sie sich betragsmäßig enorm. Z.B. verschwindet sie bei der Geometrie W25x0,5x48. Dadurch reduziert sich die Formzahl bei großen Zähnezahlen und erhöht sich bei kleinen Zähnezahlen.

Der Ort dieser Spannungskonzentration nähert sich mit zunehmenden Kerbparametern vom Ort der Maximalspannung im Auslauf an (**Bild 4.44**). Bei bestimmten Kerbverhältnissen (z.B. W25x2x11 bei $d_w/d_{a1} = 0,775$ und $r_w/t_{a1} = 0,4$) gleichen sich die Spannungsspitzen betragsmäßig etwas aus (**Bild 4.45-c**). Ferner verschmelzen sie sich in ein einziges Spannungsmaximum und führen zur Formzahlerhöhung im Auslauf, siehe **Bild 4.45**. In diesem Falle befindet sich die maximale Kerbspannung am Rande des Verzahnungsübergangs. Sie setzt sich aus den Spannungsüberhöhungen im freien Auslauf und im Zahnfuß zusammen.

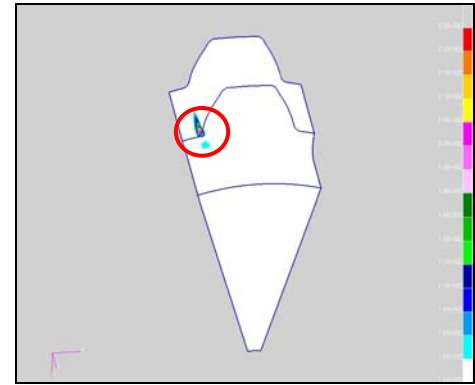
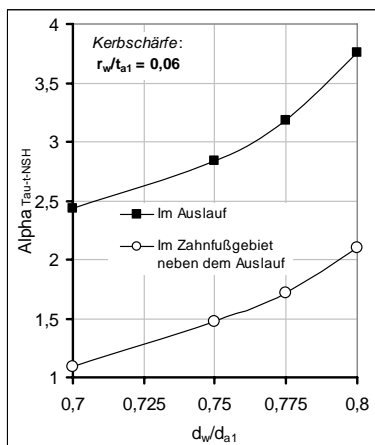
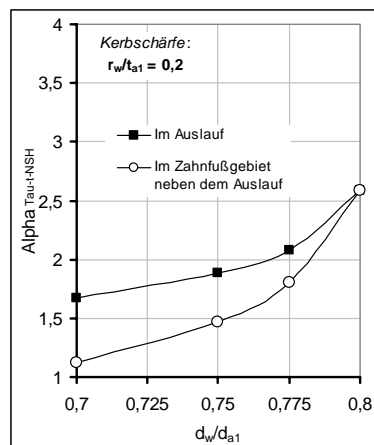


Bild 4.44: Ort der max. Torsionsspannung am Rand zwischen Zahnfuß und Auslauf; am Beispiel der Zahnwelle W25x2x11 mit $d_w/d_{a1} = 0,775$ und $r_w/t_{a1} = 0,5$

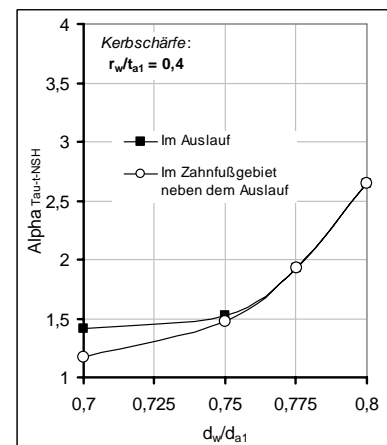
Wiederum wandert diese Spannungsspitze weg vom Verzahnungsübergang hin in die Richtung des Zahnfußbereiches und stabilisiert sich in der Zahnfußausrundung weit vom Auslauf (z.B. W25x2x11 ab $d_w/d_{a1} = 0,8$ und $r_w/t_{a1} > 0,1$).



a) Kerbschärfe $r_w/t_{a1} = 0,06$



b) Kerbschärfe $r_w/t_{a1} = 0,2$



c) Kerbschärfe $r_w/t_{a1} = 0,4$

Bild 4.45: Wechselwirkung zwischen den Torsionsformzahlen im freien Auslaufbereich und im auslaufnahen Zahnfußbereich, nach der NSH; für die Zahnwelle W25x2x11; abhängig vom Durchmesserverhältnis und der Kerbschärfe; die Formzahlen beider Kerbbereiche auf d_w bezogen

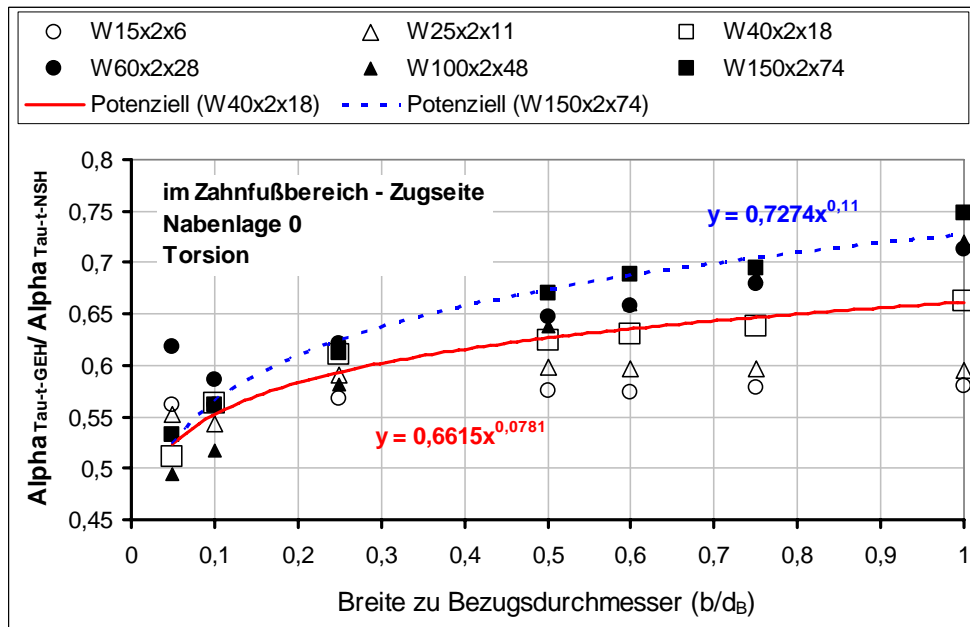
Es ist allerdings keine quantitative Beziehung zwischen den errechneten Formzahlen nach der GEH und der NSH im benachbarten Auslaufbereich erkennbar, da die Spannungsspitze nach der GEH nicht vorhanden ist. Jedoch kann diese Formzahl bezogen auf die im ungestörten Zahnfuß berechnete Formzahl ins Verhältnis gesetzt werden. Darüber hinaus gilt im Allgemeinen das Näherungsverhältnis (4.7) für die Nabenlage (1).

$$\alpha_{\tau-NSH-Zahnfuß-auslaufnah} \approx (1,18..1,33) \cdot \alpha_{\tau-GEH-Zahnfuß-ungestört} \quad (4.7)$$

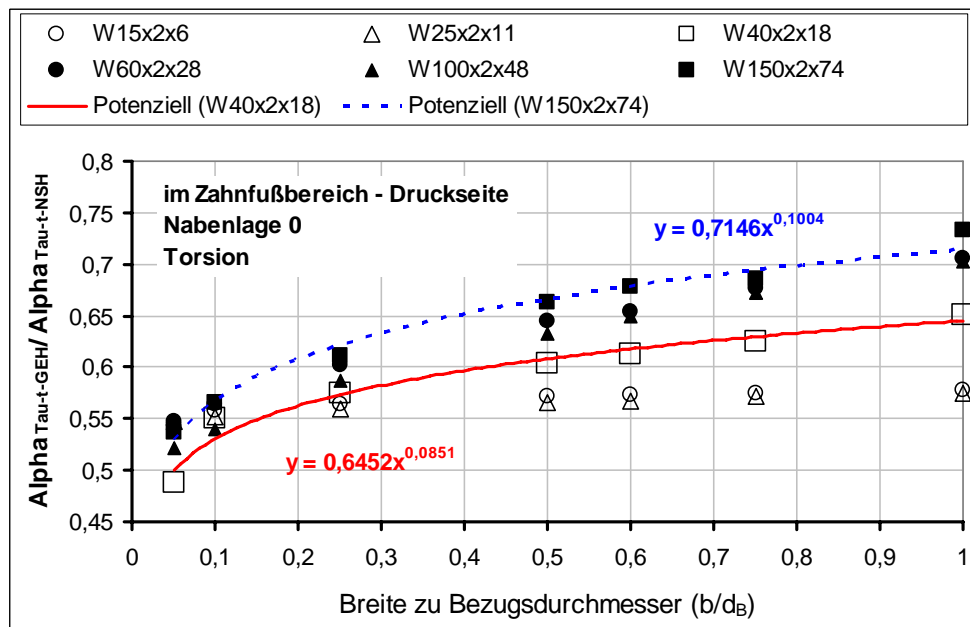
Bild 4.46 gibt einen Überblick über die ermittelten Verhältnisse der Torsionsformzahlen im Zahnfußgebiet durch Flankenpressung (Nabenlage 0). Mit dem aus **Bild 4.46** resultierenden Näherungsverhältnis (4.8) kann der Zusammenhang zwischen den Formzahlen (GEH und NSH) für die Zug- oder Druckseite beschrieben werden.

$$\frac{\alpha_{\pi-GEH}}{\alpha_{\pi-NSH}} \approx 0,65 \cdot \left(\frac{b}{d_B} \right)^{0,1} \quad \text{für:} \quad 6 \leq z \leq 82 \quad (4.8)$$

$r_w/t_{a1} = 0,2 \text{ und } d_w = d_{f1} - 1,6 \text{ mm}$



a) Torsionsformzahlverhältnis an der Zugseite



b) Torsionsformzahlverhältnis an der Druckseite

Bild 4.46: Darstellung der ermittelten Torsionsformzahlverhältnisse im Zahnfuß für die Zug- und Druckseiten für verschiedene Zahnwellengeometrien ($r_w/t_{a1} = 0,2$ und $d_w = d_{f1} - 1,6 \text{ mm}$) infolge der Flankenpressung (Nabenlage 0); in Abhängigkeit vom Verhältnis Breite zu Bezugsdurchmesser b/d_B

4.3.4 Gestaltungshinweise

Bei der analytischen Betrachtung der umfangreichen FE-Ergebnisse konnte ein Berechnungsvorschlag zur Abschätzung, ob Kerbspannungsüberlagerung auftritt oder nicht, für die Zahnwellen mit freiem Auslauf ermittelt werden.

Der Durchmesserbereich, der den größten zulässigen Wellendurchmesser im Kerbgrund ohne gegenseitige Wechselwirkung zwischen den Kerbbereichen im Zahnfuß und im freien Auslauf angibt, wird durch den Durchmesser d_{w_max} eingeschränkt. Er lässt sich mit der Näherungsfunktion (4.9) bestimmen.

$$\frac{d_{w_max}}{m} \approx 0,7 \cdot (z)^{1,07} \approx \frac{d_{f1}^2}{m \cdot d_{a1}} \quad (4.9)$$

Zur Beurteilung des zu erwartenden Kriteriums für die Kerbspannungsüberlagerung wurden die Einflussparameter Kerbschärfe, Durchmesser Verhältnis und Zähnezahl betrachtet. Es ergaben sich die folgenden Möglichkeiten:

- Im geometrischen Bereich $d_w \leq d_{w_max}$ ist keine Kerbüberlagerung vorhanden. Die Kerbe im Auslauf ist durch eine relative große Kerbtiefe gekennzeichnet. Die Einflüsse der Verzahnungsgeometrie werden bei der Formzahlberechnung vernachlässigt und die Einflüsse der Kerbschärfe und Absatzhöhe verstärkt. Die Formzahlen für Zahnwellen mit freiem Auslauf und äquivalente Wellenabsätze stimmen je nach Belastungsart in der Größe vollständig überein. Die Größe der Vergleichsspannungsmaxima sowie deren Verteilung und Position im freien Auslauf unterscheiden sich nicht von abgesetzten Vollwellen
- Überschreitet der Wert von d_w den Wert von d_{w_max} bzw. $(d_{f1}+d_{w_max})/2 > d_w > d_{w_max}$, so weichen die berechneten Beanspruchungen von denen eines Absatzes ab. Die Abweichung steigt mit zunehmendem Verhältnis d_w/d_{f1} allmählich an.
- Der kritische Durchmesser $d_{w_kritisch}$ ist derjenige, der zwischen dem Fußkreisdurchmesser d_{f1} und dem Wellendurchmesser $d_w = (d_{f1}+d_{w_max})/2$ verläuft. Dieser Durchmesser $(d_{f1}+d_{w_max})/2 \leq d_{w_kritisch} \leq d_{f1}$ ist als Absolutwert von der Zähnezahl stark abhängig. In diesem Durchmesserbereich fangen die Kerben im Auslauf und im Zahnfuß an, sich gegenseitig zu beeinflussen. Die Störung des Spannungsverlaufes wird im Wesentlichen durch die Zähnezahl und die geringere Kerbtiefe hervorgerufen. Dadurch verteilt sich die Vergleichsspannung auf den Sektorumfang ungleichmäßig. Die Formzahlen verringern bzw. erhöhen sich abhängig von der Zähnezahl im Vergleich mit denen für den Wellenabsatz. Die Maximalwerte der Vergleichsspannungen aus der GEH und der NSH konzentrieren sich bei Torsion an zwei unterschiedlichen Positionen. Der bekannte angenommene Zusammenhang zwischen den Formzahlen nach der GEH und der NSH verliert seine Gültigkeit.
- Das Durchmesser Verhältnis $d_w/d_{f1} = 1$ kann sehr kritisch für die Formzahlberechnung werden und zeichnet sich durch eine volle Kerbüberlagerung (Zahnfuß/Auslauf) aus. Die Vergleichbarkeit der Torsionsformzahlwerte mit denen für einen äquivalenten Absatz ist nicht mehr für diesen Geometriebereich sinnvoll, dies gilt vor allem für die Zahnwellen mit $z < 11$.

Im **Bild 4.47** sind die oben beschriebenen Durchmesserverhältnisse in geometrische Bereiche aufgeteilt und dargestellt. Ziel ist es, die einfache Auswahl des geeigneten Durchmesserverhältnisses für die Gestaltung von Zahnwellen mit freiem Auslauf zu ermöglichen.

Weiterhin ist als eine grobe Abschätzung die Durchmessergröße mit dem Wert $d_w \leq d_{f1} - 1,5 \text{ mm}$ für große Zähnezahlen und mit dem Wert $d_w \leq d_{f1} - 3 \text{ mm}$ für kleine Zähnezahlen festzulegen.

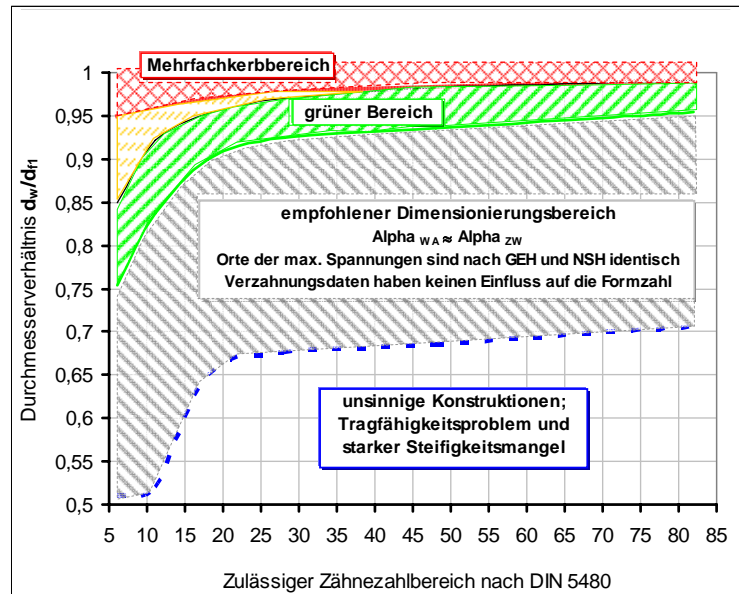


Bild 4.47: Entscheidungshilfe zur Auswahl des technisch interessierten Durchmesserverhältnisses d_w/d_{f1} für die Gestaltung von Zahnwellen nach DIN 5480 mit freiem Auslauf

Bei der Gestaltung der Zahnwellen mit scharfen Kerbradien im freien Auslauf wird ein Sicherheitsabstand $c_{f1} = t_{f1} - r_w = 0,15 \dots 0,20 \text{ mm}$ zur Vermeidung der Überschneidung der Kerbradien (Auslaufradiusende und Fußradiusbeginn) und der Überlagerung der Kerbspannungen empfohlen, wobei $t_{f1} = (d_{f1} - d_w)/2$ ist. Dies wird vor allem bei der Auswertung der Vergleichsspannung aus der NSH benötigt. Zum Beispiel sind für die Kerbgeometrie (W25x2x11 mit $r_w/t_{a1} = 0,2$ und $d_w/d_{a1} = 0,775$) keine Radienüberschneidungen oder Spannungsüberlagerung zu erkennen, da ein kleinster Abstand in Höhe von ca. $c_{f1} = 0,15 \text{ mm}$ vorhanden ist.

Im Gegensatz zu den abgesetzten Wellen weisen die Zahnwellen mit freiem Auslauf innerhalb dieser kritischen Durchmesserbereiche große Unterschiede auf. Diese Unterschiede betreffen das Verhalten der Spannungsausbildung und damit die geometrische Lage der Vergleichsspannung sowie die Überlagerungen von verschiedenen Kerben (Auslauf und Zahnfuß) und die Beziehungen der Maximalspannungen bzw. der Formzahlen untereinander.

Die grundsätzlichen Beziehungen zwischen der ersten und zweiten Hauptspannung an der "drucklosen" Kerbstelle der maximalen Spannungsüberhöhung (d.h. $\sigma_2 = v \cdot \sigma_1$ mit $v = 0,3$ bei Zug/Druck und Biegung bzw. $\sigma_2 = -\sigma_1$ bei Torsion), wie sie aber erst bei einem annähernd voll ausgebildeten ebenen Verzerrungszustand von den Wellen mit Absatz bekannt sind, gelten bei Zahnwellen mit freiem Auslauf nicht in jedem beliebigen Durchmesserbereich.

Dadurch kann der übliche Zusammenhang zwischen der Hauptspannung σ_{v-NSH} und der Vergleichsspannung σ_{v-GEH} nicht beliebig bzw. nur bedingt angewendet werden. Dieser Effekt kann auch bei Wellen mit Querbohrungen beobachtet werden, siehe /Me100/. Ebenso wurde er auch von Schöpf/Sch76/ bei den Zahnwellen mit gebundenem Auslauf bemerkt.

4.3.5 Entwicklung von Näherungsgleichungen zur Formzahlberechnung

Aufbauend auf den im Rahmen dieser Arbeit erworbenen FE-Ergebnissen an Zahnwellen wurden neue ingenieurmäßige Näherungsbeziehungen zur Berechnung der Formzahlen im freien Auslauf sowie im Zahnfuß bei Torsion, Zug/Druck und Biegung entwickelt. Dabei werden die Abhängigkeiten der Formzahl von der Zähnezahl, Kerbschärfe und Absatzhöhe beachtet. Es wird unterschieden in Zahnwellen mit geringer Zähnezahl $6 \leq z \leq 11$, mit mittlerer Zähnezahl $11 < z \leq 28$ und mit hoher Zähnezahl $28 < z \leq 84$. Weiterhin wird ein Unterschied hinsichtlich des geometrischen Orts der Drehmomenteinleitung gemacht.

Die Grundlage bei der Ermittlung der Näherungsgleichungen beruht auf der Verwendung bzw. Weiterentwicklung bereits vorhandener Gleichungen von *Melzer* /Mel00/ nach Gl. (2.85) (S. 54) für die Vollwellen mit Absatz je Spannungsart sowie von *Wesolowski* /Wes96/ gemäß *Tabelle 2.10* (S. 51) für die torsionsbelasteten Zahnwellen ohne Auslauf.

Die entwickelten Näherungsgleichungen gelten für die Formzahlberechnung nach der Anwendung der NS-Hypothese. Sollen die Formzahlen nach der GE-Hypothese zur Anwendung kommen, so sind die beschriebenen Zusammenhänge der Formzahlen aus der GEH und der NSH im **Abschnitt 4.3.3** zu berücksichtigen.

Im Durchmesserbereich $d_w \leq d_{w-max}$ und unabhängig von Verzahnungsparametern sind die Formzahlen im freien Auslauf nach der *Melzers* Gleichung (2.85) für eine äquivalente Vollwelle mit Absatz je nach Belastungsart gemäß (4.10) und (4.11) zu ermitteln. Es gelten:

Torsion	$\alpha_{\tau-NSH-freier\ Auslauf-d_w} = \alpha_{\tau-Absatz-Melzer/Gleichung}$	(4.10)
Zug/Druck & Biegung	$\alpha_{\sigma d,b-NSH-freier\ Auslauf-d_w} = \alpha_{\sigma d,b-Absatz-Melzer/Gleichung}$	(4.11)
Gültigkeitsbereich	für $d_w \leq d_{w-max}$ und z : beliebig. $d_{w-max} = m \cdot 0,7 \cdot (z)^{1,07}$	

Im Bereich $d_{w-max} < d_w < d_{fl}$ bzw. ($d_w \approx d_{fl} - 3$ mm) sind die Formzahlen im freien Auslauf bei Biegung und Zug/Druck durch die Näherungsformeln (4.12) bis (4.14) zu bestimmen.

Zug/Druck & Biegung	für $z \leq 18$ und $d_{w-max} < d_w < d_{fl}$:	(4.12)
	$\alpha_{\sigma d,b-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx 0,95 \cdot \alpha_{\sigma d,b-Absatz-Melzer/Gleichung}$	
	für $z > 18$ und $d_{w-max} < d_w < d_{fl}$:	(4.13)
	$\alpha_{\sigma d,b-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx 0,93 \cdot \alpha_{\sigma d,b-Absatz-Melzer/Gleichung}$	
	für $z < 15$ und $d_w = d_{fl}$:	(4.14)
	$\alpha_{\sigma d,b-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx (0,93..0,97) \cdot \alpha_{\sigma d,b-Absatz-Melzer/Gleichung}$	

Bei Torsionsbelastung gelten folgende Näherungsformeln und Angaben zur Formzahlberechnung im freien Auslaufbereich für $d_{w-max} < d_w < d_{fl}$ (bzw. $d_w \approx d_{fl} - 1,6$ mm) in Abhängigkeit von der geometrischen Belastungslage, siehe *Bild 3.17*, (S. 78):

	Lastmodell: Flankenpressung an der Nabenlage (1) (Bild 3.17-b)	
Torsion	für $z < 18$ und $d_{w-max} < d_w < d_{fl}$: $\alpha_{\pi-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx 1,1 \cdot \alpha_{\pi-Absatz-Melzer / Gleichung}$	(4.15)
	für $z \geq 18$ und $d_{w-max} < d_w < d_{fl}$: $\alpha_{\pi-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx 1,05 \cdot \alpha_{\pi-Absatz-Melzer / Gleichung}$	(4.16)
	für $z < 15$; $r_w/t_{a1} < 1,2$ und $d_w = d_{fl}$: $\alpha_{\pi-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx (1,9..2,3) \cdot \alpha_{\pi-Absatz-Melzer / Gleichung}$	(4.17)
	für $r_w/t_{a1} \geq 1,2$: $\alpha_{\pi-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx 2,2$	

	Lastmodell: Flankenpressung an der Nabenlage (0) (Bild 3.17-a)	
Torsion	für $6 \leq z < 11$ und $d_{w-max} < d_w < d_{fl}$: $\alpha_{\pi-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx 1,1 \cdot \alpha_{\pi-Absatz-Melzer / Gleichung}$	(4.18)
	für $11 \leq z \leq 28$ und $d_{w-max} < d_w < d_{fl}$: $\alpha_{\pi-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx 1,2 \cdot \alpha_{\pi-Absatz-Melzer / Gleichung}$	(4.19)
	für $28 < z \leq 84$ und $d_{w-max} < d_w < d_{fl}$: $\alpha_{\pi-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx 1,25 \cdot \alpha_{\pi-Absatz-Melzer / Gleichung}$	(4.20)
	für $z = \text{beliebig}$ und $d_w = d_{fl} - 1,6 \text{ mm}$: $\alpha_{\pi-NSH-freier\ Auslauf-d_w} \approx 0,96 \cdot z^{0,088} \cdot \alpha_{\pi-Absatz-Melzer / Gleichung}$	(4.21)

Näherungsweise kann das Formzahlverhältnis im freien Auslauf je nach Ort der Drehmomenteinleitung mit Gl. (4.22) nach der NSH bzw. mit Gl. (4.23) nach GEH bestimmt werden.

Torsion	$\alpha_{\pi-NSH-freier\ Auslauf-N.lage\ 0} \approx 0,87 \cdot z^{0,088} \cdot \alpha_{\pi-NSH-freier\ Auslauf-N.lage\ 1}$	(4.22)
	$\alpha_{\pi-GEH-freier\ Auslauf-N.lage\ 0} \approx 0,89 \cdot z^{0,071} \cdot \alpha_{\pi-GEH-freier\ Auslauf-N.lage\ 1}$	(4.23)

Im durch die Krafteinleitung oder Auslaufkerbgeometrie ungestörten Zahnfußbereich werden die Torsionsformzahlen nach der Näherungsgleichung von *Wesolowski /Wes96/* berechnet. Es gelten die Beziehungen (4.24) bis (4.26):

$\alpha_{\pi-FEM-ungestörter\ Zahnfuß} \approx 1,39 \cdot (\rho_{f1} / m)^{(-0,22)} + 0,08 - 0,03 \cdot e^{(1-z/8)}$			(4.24)
$\alpha_{\pi-GEH} \approx \alpha_{\pi-NSH}$	(4.25)	$\alpha_{\pi-Zugseite} \approx \alpha_{\pi-Druckseite}$	(4.26)

Im durch die Auslaufkerbgeometrie gestörten Zahnfußbereich gilt für den Durchmesserbereich $d_{w-max} < d_w < d_{fl}$:

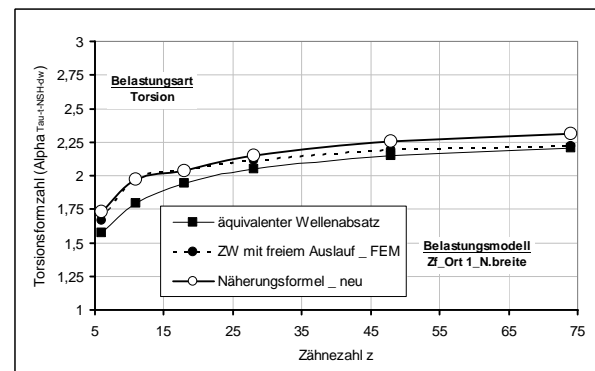
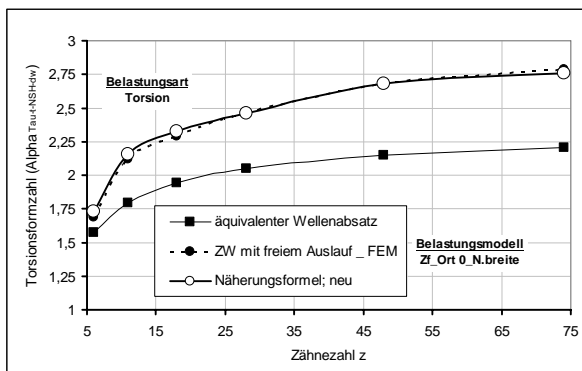
$\alpha_{\pi-NSH-Zahnfuß,auslaufnah} \approx 1,93 \cdot z^{-0,14} \cdot \alpha_{\pi-FEM-ungestörter\ Zahnfuß}$	(4.27)
--	--------

Im gestörten Zahnfußbereich (direkt unter der Stelle der Drehmomenteinleitung, entsprechend Verbindungsbeginn) ist die Torsionsformzahl in Abhängigkeit von der Zähnezahl und der Nabenlage (0) und (1) nach den Näherungsgleichungen (4.28) und (4.29) nach der NSH bzw. (4.30) und (4.31) nach der GEH zu berücksichtigen.

Torsion	$\alpha_{\tau-NSH-Zahnfuß-d_{h1}-N.Lage0} \approx 3,45 \cdot z^{0,0185}$	(4.28)
	$\alpha_{\tau-NSH-Zahnfuß-d_{h1}-N.Lage1} \approx 2,45 \cdot z^{0,103}$	(4.29)
	$\alpha_{\tau-GEH-Zahnfuß-d_{h1}-N.Lage0} \approx 1,95 \cdot z^{0,031}$	(4.30)
	$\alpha_{\tau-GEH-Zahnfuß-d_{h1}-N.Lage1} \approx 1,72 \cdot z^{0,1}$	(4.31)

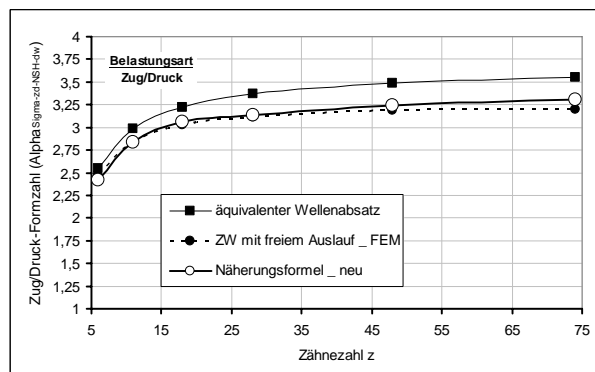
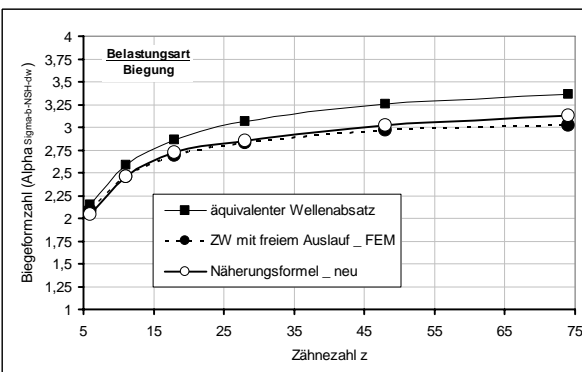
Mit den in dieser Arbeit ermittelten Formzahlen und den hierzu angegebenen Näherungsgleichungen können die maximalen Vergleichsspannungen im freien Auslauf und Zahnfuß für Torsion, Biegung und Zug/Druck berechnet werden.

Bild 4.48 zeigt Vergleiche der numerisch ermittelten Formzahlen im freien Auslauf mit den Formzahlen aus den Näherungsbeziehungen abhängig von der Zähnezahl. Die anhand der FEM ermittelten Formzahlen weisen eine Vergleichbarkeit mit den FE-Werten der Formzahlen für einen äquivalenten Absatz auf. Der Vergleich mit den Werten aus den Näherungsformeln ergab dabei eine Abweichung von weniger als 4 %, was im Rahmen der Gesamtgenauigkeit von Formzahlberechnungen ein sehr gutes Ergebnis darstellt.



a) Formzahlen bei Torsionsbelastung; Nabenlage (0)

b) Formzahlen bei Torsionsbelastung; Nabenlage (1)



c) Formzahlen bei Biegebelastung

d) Formzahlen bei Zug/Druckbelastung

Bild 4.48: Vergleich der mit FEM ermittelten Formzahlen nach der NSH im freien Auslaufbereich der Zahnwellen mit den FE-Werten der Formzahlen von äquivalenten Wellen mit Absatz sowie mit den berechneten Formzahlen nach den neuen Näherungsbeziehungen; $d/D = d_w/d_{a1}$ und $r/t = r_w/t_{a1} = 0,2$; $d_w = d_{f1} - 1,6 \text{ mm}$

4.3.6 Berechnung der bezogenen Spannungsgefälle im freien Auslaufbereich

Für die rechnerischen Abschätzung der Kerbwirkungszahlen $\beta_{\sigma,\tau}$ an Zahnwellen mit freiem Auslauf wird das Verfahren von *Siebel* und *Stieler* eingesetzt (**Abschnitt 2.4.6.2**). Dafür werden Aussagen zum bezogenen Spannungsgefälle zur Beurteilung der Stützwirkung benötigt. Ergänzende Ausführungen dazu enthalten die **Abschnitte 2.4.3** bis **2.4.5**. Im früheren Forschungsvorhaben **/Wes96/** sowie in *DIN 5466-2 /N5/* sind Näherungswerte zum bezogenen Spannungsgefälle vorhanden. Sie beschränken sich jedoch nur auf den Fußbereich verzahnter Wellen ohne Auslauf. Für den Auslauf liegen bisher keine Angaben vor.

In diesem Abschnitt wurden numerische Berechnungen zur Ermittlung der Kennwerte der bezogenen Spannungsgefälle G^* an der höchst beanspruchten Stelle als Funktion der Tiefe x senkrecht zur Kerboberfläche durchgeführt. Der größte Gradient der Spannungsverteilung liegt unmittelbar an der Kerboberfläche im freien Auslauf und wird daher herangezogen, siehe *Bild 2.24*. Die Bestrebungen liegen allerdings darin, die bezogenen Spannungsgefälle so genau wie möglich werden zu lassen, um genauere Kerbwirkungszahlen zu erhalten.

Die Bestimmung der Spannungsgradienten G an gekerbten Bauteilen erfolgt entweder graphisch oder durch die Verwendung von Polynomgleichungen n -ten Grades zur Bildung der Spannungskurven (**/Thu60/**, **/Hei84/**, **Ecc00/** und **/Mel00/**). Die graphische Methode basiert auf dem Anlegen einer Sekante durch die beiden ersten Spannungspunkte der Normalspannungskurve im Kerbgrund. Für die Auswertung der Spannungstiefenverläufe in dieser Arbeit wurden beide Methoden aufgegriffen und beurteilt. Es hat sich herausgestellt, dass eine polynomische Ausgleichsfunktion 4-ten Grades ausreichend ist. Sie wird über 5 Knoten normal zur Oberfläche an der Stelle der größten Spannung erstellt.

Zwischen den für diese Untersuchungen ausgewählten Zahnwellen W15x2x6, W25x2x11, W40x2x18 und W25x0,5x48 nach *DIN 5480* besteht keine geometrische Ähnlichkeit. Deshalb muss für jede Geometrie eine umfassende Bewertung hinsichtlich der Belastungsart, der graphischen Darstellung sowie der tabellarischen Angabe der einzelnen FE-Werte erfolgen. Die gesamten FE-Ergebnisse sind je nach Spannungsart auf den Blättern der **Anlage D** im Anhang tabellarisch (**Tabellen D-1** bis **D-11**) und graphisch (**Bilder D-1** bis **D-11**) dargestellt.

In jeder Tabelleform sind die G^* -Ergebnisse nach der NSH und der GEH sowie die Formzahlen unterschiedlicher Kerbparameter (r_w/t_{a1} und d_w/d_{a1}) zusammengefasst. Zusätzlich sind auch Näherungszusammenhänge zwischen dem bezogenen Spannungsgefälle und der Formzahl sowie zwischen den G^* -Werten jeweils nach der NSH und der GEH zusammengestellt.

Insbesondere ist bei den Lastfällen Biegung und Zug/Druck zu beachten, dass die G^* -Werte aus der GEH größer als die aus der NSH ermittelten sind. Zur Bewertung der Genauigkeit der FE-Ergebnisse pro Kerbgeometrie und Belastungsart werden den G^* -Werten der vorhandenen Näherungsgleichungen von *DIN 743 /N3/* für äquivalente Wellen mit Absatz (*Tabelle 2.1*) gegenübergestellt und ebenfalls in den Tabellen aufgeführt.

Weiterhin sind für jede Zahnwelle und je nach Spannungsart die ermittelten FE-Werte der Formzahl-tiefenverläufe nach der NSH normal zur Kerboberfläche in Abhängigkeit vom Kerbradius in den *Tabellen* der *Anlage D* zusammengefasst, wobei die erste Hauptspannung auf die Nennspannung 100 N/mm² im Kerbgrund normiert.

In den *Bildern* der *Anlage D* sind die bezogenen Spannungstiefenverläufe nach der NSH je nach Belastungsart und Kerbgeometrie für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung in Abhängigkeit vom Kerbradius und von der Tiefe x senkrecht zur Kerboberfläche dargestellt. Die Hauptnormalspannung ist punktwise auf die maximale Spannung normiert. Bei nahezu allen Fällen sind die Spannungsspitzen auf den unmittelbaren Oberflächenbereich sehr schnell abgeklungen und die Werte nähern sich nach wenigen Zehntelmillimetern der Nennspannung, ca. ab einem Abstand $x = 0,8$ mm normal zur Kerboberfläche, an.

Sämtliche Untersuchungen an mittleren oder großen Auslaufkerbradien ergaben, dass die erreichbaren Genauigkeiten ausreichend hoch sind. Es wurden sehr gute Übereinstimmungen bei unterschiedlichen Größen des Wellendurchmessers festgestellt.

Im Bereich sehr scharfer Kerbradien ($r < 0,5$ mm) hingegen wurden relativ große Abweichungen insbesondere bei Biegung und Zug/Druck festgestellt.

Die DIN- G^* -Werte für den äquivalenten Absatz mit scharfen Kerben sind je nach Belastungsart immer größer als die FEM- G^* -Werte für den freien Auslauf (*Bild 4.49*).

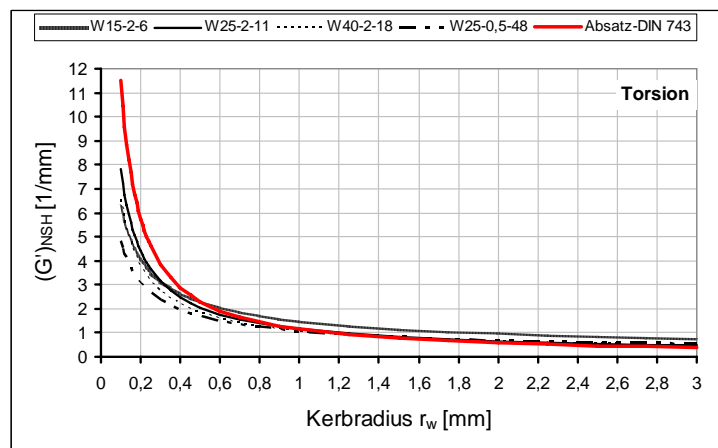


Bild 4.49: Vergleich der FE-Werte des bezogenen Spannungsgefälles für die Zahnwellen mit freiem Auslauf mit den DIN-Werten eines äquivalenten Absatzes bei Torsion, abhängig vom Kerbradius

Abweichungen können aber auch beim Vergleich der FE- berechneten Werte mit den vorhandenen DIN-Werten für den Wellenabsatz selbst beobachtet werden, siehe **Tabelle 4.9**.

Tabelle 4.9: Vergleich der berechneten bezogenen Spannungsgradienten (Anlehnung an Melzer /Mel100/) mit den DIN-Werten an abgesetzten Wellen mit scharfen Radien je nach Belastungsart

Belastungsart	r [mm]	t [mm]	r/t	d/D	$\alpha_{\sigma,\tau}$	α_{σ,τ_GEH}	$\frac{\alpha_{\sigma,\tau_GEH}}{\alpha_{\sigma,\tau}}$	bez. Sp.-gefälle G^*	
								FEM	DIN 743
Biegung	0,262	8,75	0,03	0,8	5,206	4,082	0,784	5,464	9,128
	0,438	8,75	0,05	0,8	4,490	3,635	0,810	4,283	5,515
Zug	0,262	8,75	0,03	0,8	5,791	4,541	0,784	5,465	9,128
	0,438	8,75	0,05	0,8	5,002	4,052	0,810	4,290	5,515
Torsion	0,262	8,75	0,03	0,8	3,094	3,186	1,030	2,938	4,389
	0,438	8,75	0,05	0,8	2,686	2,761	1,028	2,052	2,626

Der nach DIN 743 berechnete Wellenabsatz mit scharfen Kerbradien ist durch ein höheres Spannungsgefälle und damit eine höhere Stützwirkung als der Absatz mit simulierten Werten gekennzeichnet. Damit liegt der Anwender bei der Berechnung des Tragfähigkeitsnachweises für scharfe Kerben nicht auf der sicheren Seite, da die Kerbwirkungszahl unterschätzt wird.

Diese Feststellung bestätigt die Behauptung, dass der Ansatz nach *Siebel* nicht in der Lage ist, die bezogenen Spannungsgefälle für Kerben mit scharfen Radien genau zu bestimmen. Diesbezüglich empfiehlt sich, auf den Ansatz von *Neuber* zurückzugreifen.

In der **Tabelle 4.10** sind die neu entwickelten Näherungsbeziehungen zur Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles am freien Auslauf nach der NSH bzw. GEH je nach Beanspruchungsart enthalten. Die Abweichungen zwischen diesen Gleichungen und den numerischen Rechnungen sind gering.

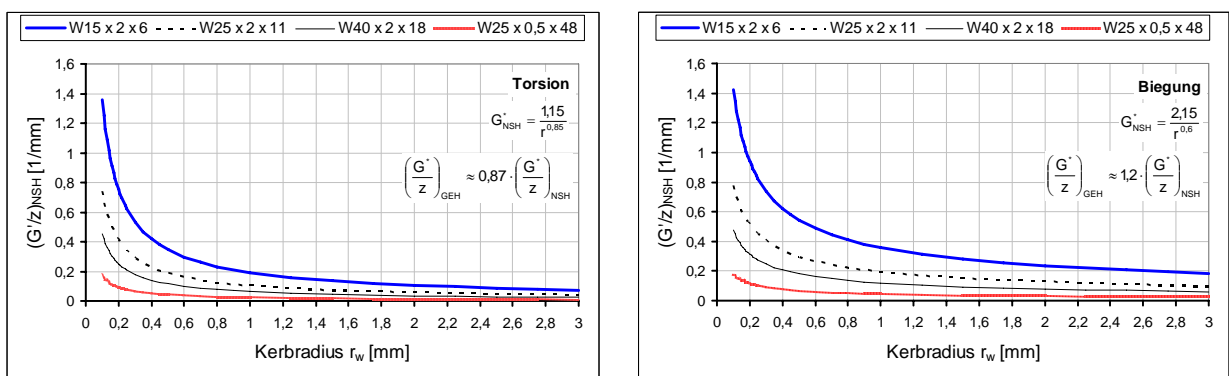
Tabelle 4.10: Neue Näherungsgleichungen zur Berechnung des bezogenen Spannungsgradienten nach der NSH und der GEH bei Torsion, Biegung und Zug/Druck für die Zahnwellen mit freiem Auslauf

Näherungsgleichungen der bezogenen Spannungsgefälle G^* [mm ⁻¹] am freien Auslauf der Zahnwellen nach DIN 5480 /N1/		
Belastungsart	Biegung & Zug/Druck	Torsion
Bez. Sp.-gefälle [mm ⁻¹]	$G_{NSH}^* = \frac{2,3}{r_w}$	$G_{NSH}^* = \frac{1,15}{r_w}$
Bedingungen:	für $0 < d_w \leq d_{w_max}$; z und d_B : beliebig; $G_{NSH}^* = G_{GEH}^*$	
Bez. Sp.-gefälle [mm ⁻¹]	$G_{NSH}^* = \frac{2,15 \cdot (1 + \varphi_f)}{r_w^{0,6}}$	$G_{NSH}^* = \frac{1,15}{r_w^{0,85}}$
	$G_{GEH}^* = \frac{2,6 \cdot (1 + \varphi_f)}{r_w^{0,6}}$	$G_{GEH}^* = \frac{1}{r_w^{0,85}}$
Bedingungen:	für $d_{f1} \geq d_w > d_{w_max}$; $d_{w_max} \approx d_{f1} - 3 \text{ mm}$; $z = \text{beliebig}$, $r_w > 0$ Nabenlage (1) entfernt vom Auslaufbeginn	
	$\varphi_f = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{\frac{t_{f1}}{r_w}} + 2}$ und $t_{f1} = \frac{d_{f1} - d_w}{2}$; $\varphi_f = 0$ bei Torsion	
Bez. Sp.-gefälle [mm ⁻¹]	$G_{NSH_N.lage1}^* \approx G_{NSH_N.lage0}^*$	$G_{NSH}^* = \frac{1,4}{r_w^{0,85}}$
	$G_{GEH_N.lage1}^* \approx G_{GEH_N.lage0}^*$	$G_{GEH}^* = \frac{1,2}{r_w^{0,85}}$
Bedingungen:	für $d_{f1} \geq d_w > d_{w_max}$; $d_{w_max} \approx d_{f1} - 3 \text{ mm}$; $z \geq 11$, $r_w > 0$ Nabenlage (0) unmittelbar am Auslaufbeginn	

Die Grundlage bei der Ermittlung der Näherungsformeln beruht auf der Weiterentwicklung bereits vorhandener Gleichungen von DIN 743 /N3/ zur Beschreibung der bezogenen Spannungsgefälle am Wellenabsatz. Die DIN-Gleichungen können auch für die Zahnwellen mit freiem Auslauf weiterhin unverändert übernommen werden, solange der Wellendurchmesser d_w kleiner als d_{w_max} Gl. (4.9) und die Kerbradien größer als 1 mm sind.

Für den Durchmesserbereich $d_{fl} > d_w > d_{w-max}$ gelten neue Näherungsgleichungen. Die Anpassung der DIN-Gleichungen erfolgt durch eine einfache Variation der in der Gleichung enthaltenen Faktoren. Bei Zug/Druck und Biegung ist die Verwendung des Faktors ϕ_f für den gesamten Bereich notwendig.

Die Abhängigkeit des bez. Spannungsgefälles von der Zähnezahl bzw. vom Bezugsdurchmesser kann berücksichtigt werden, indem in der Näherungsgleichung das bez. Spannungsgefälle auf die Zähnezahl bzw. auf den Bezugsdurchmesser normiert wird, siehe **Bild 4.50**. Die Multiplikation vom bez. Spannungsgefälle mit dem Modul bietet eine weitere Möglichkeit, sie führt zu einer Größe, die unabhängig vom Bezugsdurchmesser, der Zähnezahl und dem Profilverschiebungsfaktor das Spannungsgefälle beschreibt.



a) bez. Spannungsgefälle bei **Torsion** nach der NSH

b) bez. Spannungsgefälle bei **Biegung** nach der NSH

Bild 4.50: Schematische Darstellung des Verlaufs der bezogenen Spannungsgefälle (normiert auf die Zähnezahlen) im freien Auslauf der Zahnwellen in Abhängigkeit vom Kerbradius

Anmerkung

- Die Ermittlung der bezogenen Spannungsgradienten G^* würde durch die Erfassung sämtlicher wesentlicher Kerbbereiche (ungestörte Zahnfußausrundung, Verbindungsbeginn jeweils auf der Zug- und Druckseite sowie innerhalb der Verbindung) weitere zahlreiche FE-Untersuchungen erfordern.
- Die neu entwickelten Näherungsgleichungen (Tabelle 4.10) zur Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles G^* gelten je nach Beanspruchungsart und Spannungshypothese für den freien Auslaufbereich der Zahnwellen nach DIN 5480 /N1/.
- Zur näherungsweisen Berücksichtigung des bezogenen Spannungsgradienten G^* im Zahnfußbereich soll die Zurückführung auf frühere Untersuchungen /Wes96/ bzw. DIN 5466-2 /N5/ vorgeschlagen werden, siehe Gleichungen (4.32) und (4.33).

$$m \cdot G_{Zugseite}^* = \frac{2,1}{\rho/m} + 5,9 \quad (4.32)$$

$$m \cdot G_{Druckseite}^* = \frac{2,7}{\rho/m} + 0,15 \quad (4.33)$$

- Für den Welle-Nabe-Kontaktbereich innerhalb der Verbindung sowie für den Verbindungsbeginn sind noch keine G^* -Ergebnisse vorhanden.

5 Formzahlberechnung an Zahnwellen mit gebundenem Auslauf

5.1 Allgemein

Bei Zahnwellen mit gebundenem Auslauf (*Bild 3.2*) überlagert sich die Kerbwirkung infolge der Zahnfußausrundung mit der des daran anschließenden Zahnlückenauslaufs. Für diesen Kerbfall sind in Bezug auf die Formzahlberechnungen kaum entsprechende Erkenntnisse verfügbar, mit den ein Dauerfestigkeitsnachweis geführt werden könnte.

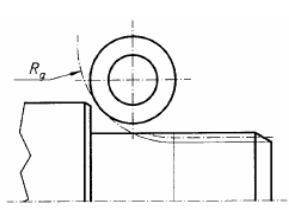
In diesem Kapitel werden die wichtigsten FE-Ergebnisse der Parameteruntersuchungen zur Beeinflussung der Formzahlen an Zahnwellen mit gebundenem Auslauf ohne und mit SR-Nuten vorgestellt. Weiterhin sind Ergebnisauswertungen zum Zähnezahleinfluss, zur Auswirkung von unterschiedlichen Auslaufradien sowie zur Variation der Lage und Tiefe der SRN auf die Größe der Formzahlen vorhanden. Der Vergleich der ermittelten Formzahlen an Zahnwellen und SR-Nuten mit denen aus *Wesolowski* und *Heinrich* soll aufgezeigt werden.

Das wichtigste Auswertekriterium ist die Abbildung der maximalen Vergleichsspannungen in der gebundenen Auslaufzone sowie im Zahnfußbereich. Um das Werkstoffverhalten (spröde bzw. duktil) zu berücksichtigen, erfolgt die Ergebnisauswertung getrennt nach der GEH und der NSH. Die Nennspannungen je Spannungsart $\tau_{t-nenn-NSH-dh1} = \sigma_{\sigma zd,b-nenn-dh1} = 100 \text{ N/mm}^2$ beziehen sich auf den SR-Nutgrunddurchmesser d_{SRN} für die Formzahlberechnung an den SR-Nuten bzw. auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} für die Formzahlen im Zahnfuß oder im gebundenen Auslauf der Zahnwellen.

Die Auswahl der Kerbradien des gebundenen Auslaufs richtet sich nach den in der Praxis gebräuchlichen Außendurchmessern der Wälzfräser für Stirnräder aus. Die Abmessungen der Stirnrad-Wälzfräser sind in *DIN 8002 /N14/* für Modul 1 mm bis 20 mm und in *DIN 58411 /N15/* für Modul 0,1 mm bis 1 mm genormt. Für die spanende Herstellung (Fräsen) der Auslaufradien gelten folgende Richtwerte:

Modul m	0,5	0,6	0,8	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10
Radius r _w	20	25				28	31,5	35	40		45	50	57,5	62,5

Für die umformende Herstellung der Zahnwellen mit dem Walzverfahren sind nach *DIN 5480* Teil 16 /N1/ folgende Werte als Richtwerte für den Werkzeugauslaufradius r_w aufgenommen.

	Modul m [mm]	bis 1,25	bis 2,5	bis 4
	r_w Standard [mm]	40	55	55
	r_w minimal [mm]	31,5	40	55

Die zu diesem Themenkomplex neu gefundenen Ergebnisse und Beziehungen zwischen der Formzahl und dem jeweiligen Geometrieparameter werden in Form von Diagrammen, von Näherungsgleichungen und in Konstruktionshinweisen zusammengestellt, mit denen der Konstrukteur zusätzlich einfache Regeln und Hinweise für die Gestaltung und Tragfähigkeitsberechnung von Zahnwellen mit gebundenem Auslauf mit und ohne SRN in die Hand bekommt.

5.2 Geometrische Einflussparameter auf die Formzahlberechnung

5.2.1 Einfluss des Bezugsdurchmessers und der Profilverschiebung

Um eine Aussage über den generellen Spannungsformzahlverlauf und die Maximalwerte der Vergleichsspannung im gebundenen Auslauf sowie im Zahnfuß zu erhalten, erfolgten numerische Berechnungen an unterschiedlichen Zahnwellengeometrien der Modulreihe 2 mit verschiedenen Bezugsdurchmessern und zwei Profilverschiebungsfaktoren $x_1 = 0,2$ und $x_1 = 0,45$ entsprechend *DIN 5480* [N1]. Damit werden die Einflüsse der Absolutgröße der Zahnwelle (Bezugsdurchmesser) und der Profilverschiebung untersucht und beurteilt.

Der Radius des Auslaufes $r_w = 31,5$ mm orientiert sich am Werkzeugkopfradius eines Wälzfräasers für den Modul 2 nach *DIN 8002* [N14]. Der Modul $m = 2$, der Auslaufradius $r_w = 31,5$ mm und der minimale Fußradius $\rho_{f-\min} = 0,32$ mm werden für die Berechnungen konstant belassen. Die Ergebnisse der ermittelten Formzahlen sind in **Bild 5.1** dargestellt.

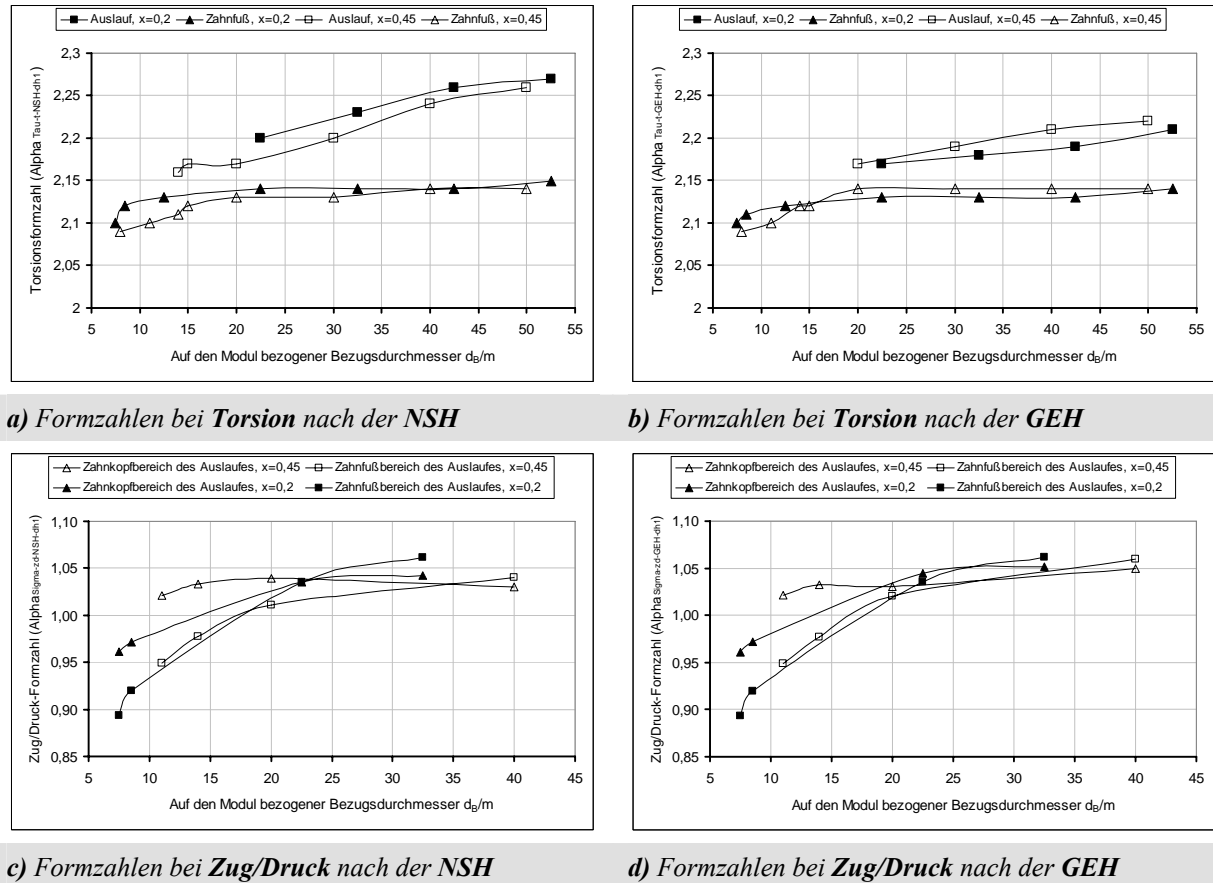


Bild 5.1: Formzahlverlauf im gebundenen Auslauf und Zahnfußbereich für unterschiedliche Zahnwellen nach *DIN 5480*; $m = 2$; abhängig vom Bezugsdurchmesser Verhältnis d_B/m und der Profilverschiebung

Für Torsionsbelastung wurden nach beiden Hypothesen (NSH und GEH) im Zahnfußbereich mit dem Verhältnis d_B/m ansteigende Formzahlen im Bereich von: $2,09 \leq \alpha_{\tau} \leq 2,15$ ermittelt. Die Maximalwerte der entstehenden Spannungsüberhöhung sind nach der GEH und der NSH in Zug- und Druckseiten der Zahnwelle etwa gleich groß. Im Auslauf liegen die Formzahlen im Bereich von: $2,16 \leq \alpha_{\tau} \leq 2,27$, siehe **Bild 5.1**. Die mittels FEM erhaltenen Formzahlen im Zahnfuß liegen etwa 2 % unter den sich nach *Wesolowski* [Wes96] ergebenden Grenzwerten.

Dies ist im Rahmen der Gesamtgenauigkeit von FE-Rechnungen eine sehr hohe Übereinstimmung. Auffällig ist der nur sehr geringe Anstieg der Formzahlen für größer werdende Verhältnisse d_B/m bzw. mit steigender Zähnezahl.

Im Allgemeinen weisen Zahnwellen mit vielen Zähnen deutlich höhere Formzahlen auf als Wellen mit niedriger Zähnezahl. Im Bereich des gebundenen Auslaufs kommt es, in Abhängigkeit von der Auswertungsmethode, erst für größere Bezugsdurchmesser verhältnisse ($d_B/m \geq 20$ und $z \geq 18$ nach der GEH bzw. $d_B/m \geq 14$ und $z \geq 12$ nach der NSH) zu einer Spannungsüberhöhung. Diese steigt mit zunehmendem Verhältnis d_B/m weiter an. Unterhalb dieser Verhältnisse tritt die maximale Vergleichsspannung im Bereich des geraden Zahnprofils auf (*Bild 5.1*) und klingt im Auslaufbereich schnell ab.

Für die Auswertung nach der NSH ergeben sich Formzahlen, die am Ende des untersuchten Größenbereiches um 5,3 % über denen im Zahnfuß des geraden Zahnprofils liegen. Die nach der GEH erzielten Formzahlen für den Auslauf liegen im Bereich von ca. 1..3 % unter denen der NSH. Die Formzahlen nach der NSH steigen mit zunehmendem Verhältnis d_B/m , verglichen mit denen nach der GEH, stärker an. Somit liegt man bei der Formzahlbestimmung nach der NSH auf der sicheren Seite.

Eventuell können die Formzahlen im gebundenen Auslauf auch bezogen auf den Fußkreisdurchmesser d_{f1} , mit Hilfe der Umrechnungsformeln in der *Tabelle 3.10* angegeben werden. Die Formzahldarstellung nach verschiedenen Nennspannungsdefinitionen kann in *Bild 5.2* an einem ausgewählten Beispiel veranschaulicht werden.

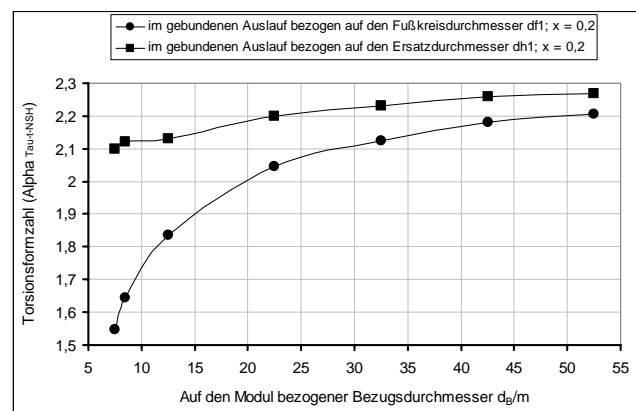


Bild 5.2: Vergleich der Torsionsformzahlverläufe nach der NSH im gebundenen Auslauf abhängig von der Nennspannungsdefinition (bezogen auf d_{f1} bzw. d_{h1})

In der *Tabelle 5.1* sind die Näherungsbeziehungen aus den ermittelten Verläufen zur Beschreibung der Torsionsformzahlen zusammengestellt.

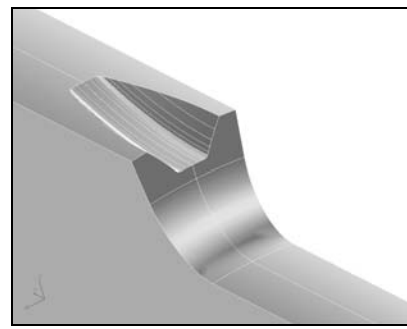
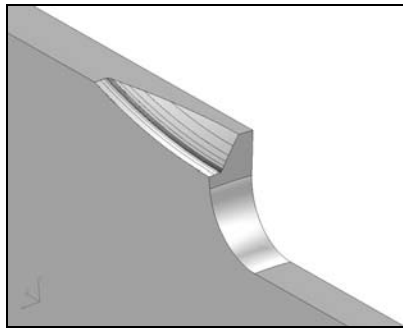
Tabelle 5.1: Näherungsformeln zur Berechnung der Torsionsformzahlen an Zahnwellen mit gebundenem Auslauf in Abhängigkeit vom Profilverschiebungsfaktor

Geb. Auslauf	$x_1 = 0,2$	$\alpha_{\pi-NSH-d_{h1}} \approx 1,952 \cdot \left[\frac{d_B}{m} \right]^{0,0384}$	$\alpha_{\pi-GEH-d_{h1}} \approx 2,034 \cdot \left[\frac{d_B}{m} \right]^{0,0204}$
	$x_1 = 0,45$	$\alpha_{\pi-NSH-d_{h1}} \approx 1,97 \cdot \left[\frac{d_B}{m} \right]^{0,0346}$	$\alpha_{\pi-GEH-d_{h1}} \approx 2,01 \cdot \left[\frac{d_B}{m} \right]^{0,0255}$
Zahnfuß	$x_1 = 0,2$	$\alpha_{\pi-(NSH \text{ bzw. } GEH)-d_{h1}} \approx 2,074 \cdot \left[\frac{d_B}{m} \right]^{0,009}$	
	$x_1 = 0,45$	$\alpha_{\pi-(NSH \text{ bzw. } GEH)-d_{h1}} \approx 2,04 \cdot \left[\frac{d_B}{m} \right]^{0,013}$	

Bei allen untersuchten FE-Modellen kommt es bei Zug/Druck oder Biegung zu einer geringfügigen Spannungsüberhöhung im gebundenen Auslaufbereich. Die ermittelten Formzahlen nach der GEH und der NSH liegen im Bereich von $0,9 < \alpha_{\sigma_{zd}} < 1,06$. Die größten Formzahlen treten bei den großen Verhältnissen $d_B/m > 15$ auf (*Bild 5.1*).

Eine Abhängigkeit der Formzahl von der Profilverschiebung ist sowohl bei Torsion als auch bei Zug/Druck sehr gering und kann vernachlässigt werden. Der Unterschied des Formzahlverlaufs bezüglich der Profilverschiebung liegt unterhalb von 3 %. Es sei hier aber darauf hingewiesen, dass die Profilverschiebung bereits in die Berechnung des Ersatzdurchmessers eingeht und damit die Höhe der Belastung festlegt. Dieser Effekt wurde auch schon von *Wesolowski /Wes96/* an den Zahnwellenprofilen beobachtet.

Zur Einschätzung der Ausbildung der Vergleichsspannung im gebundenen Auslauf ohne Beeinflussung durch den Zahnfußbereich wurden Testreihen an zwei speziellen Geometrievarianten W25x2x11 und W60x2x28 durchgeführt. Die Zahnfußgeometrie wurde durch einen Absatz mit einer mittleren Kerbschärfe ersetzt, siehe *Bild 5.3*.



a) W60x2x28: ($d_w/d_{a1} = 0,77$; $d_{a1} = 59,6 \text{ mm}$; $d_w = 46 \text{ mm}$; $d_{h1} = 55,6 \text{ mm}$; $r_w = 31,5 \text{ mm}$; $r_{\text{Absatz}} = 4 \text{ mm}$; $t = 6,8 \text{ mm}$; $r_{\text{Absatz}}/t = 0,59$)

b) W25x2x11: ($d_w/d_{a1} = 0,69$; $d_{a1} = 24,6 \text{ mm}$; $d_w = 17 \text{ mm}$; $d_{h1} = 21,65 \text{ mm}$; $r_w = 31,5 \text{ mm}$; $r_{\text{Absatz}} = 1,5 \text{ mm}$; $t = 3,8 \text{ mm}$; $r_{\text{Absatz}}/t = 0,39$)

Bild 5.3: Geometrische Parameter der untersuchten speziellen Geometrievarianten

Die erhaltenen FE-Werte für den reinen gebundenen Auslauf wurden mit den FE-Werten für die Zahnwelle mit gebundenem Auslauf verglichen. In der *Tabelle 5.2* sind die Ergebnisse der exemplarischen Untersuchungen dargestellt. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass das Zusammentreffen des Zahnfußbereiches mit dem gebundenen Auslauf zur Formzahlverminderung bei torsionsbelasteten Zahnwellen mit kleiner Zähnezahl führt.

Tabelle 5.2: Die Formzahlen im Absatz und im reinen gebundenen Auslauf bei Torsion und Zug/Druck

Kerbform		Absatz		Geb. Auslauf (spezielle Geometrie)		Zahnwelle mit geb. Auslauf
		FEM	DIN743	d_w	d_{h1}	d_{h1}
Geometrie		Torsionsformzahlen: $\alpha_{\tau t}$				
W25x2x11	NSH	1,41	1,41	1,19	2,46	2,134
	GEH	1,41	-	0,85	1,76	-
W60x2x28	NSH	1,39	1,383	1,03	1,82	2,253
	GEH	1,39	-	0,86	1,52	2,210
Geometrie		Zug/Druck-Formzahlen: $\alpha_{\sigma_{zd}}$				
W25x2x11	NSH	2,15	1,95	0,48	0,78	0,972
	GEH	1,95	-	0,60	0,97	0,957
W60x2x28	NSH	2,05	1,912	0,34	0,49	1,064
	GEH	1,88	-	0,56	0,82	1,055

5.2.2 Einfluss der Zähnezahzahl und der Auslaufradien

Zur Erklärung des Einflusses der Variation der Zähnezahzahl sowie der Auslaufradien auf die Größe der Formzahlen wurden zahlreiche Untersuchungen an den Zahnwellen W15x2x6; W25x2x11; W40x2x18; W60x2x28 und W100x2x48 mit gebundenem Auslauf realisiert.

Die untersuchten Zähnezahlen ($z = 6; 11; 18; 28$ und 48) umfassen einen großen standardisierten Zahnwellenbereich nach *DIN 5480 /N1/*. Mit der Wahl der Auslaufradien ($r_w = 17,5; 25; 35; 45; 55$ und 100 mm) konnte nahezu der gesamte Bereich möglicher und technisch interessierender Formzahlen abgedeckt werden. **Bild 5.4** zeigt die ermittelten Formzahlkurven als Funktion der Zähnezahzahl im Zusammenhang mit der Variation der Auslaufradien.

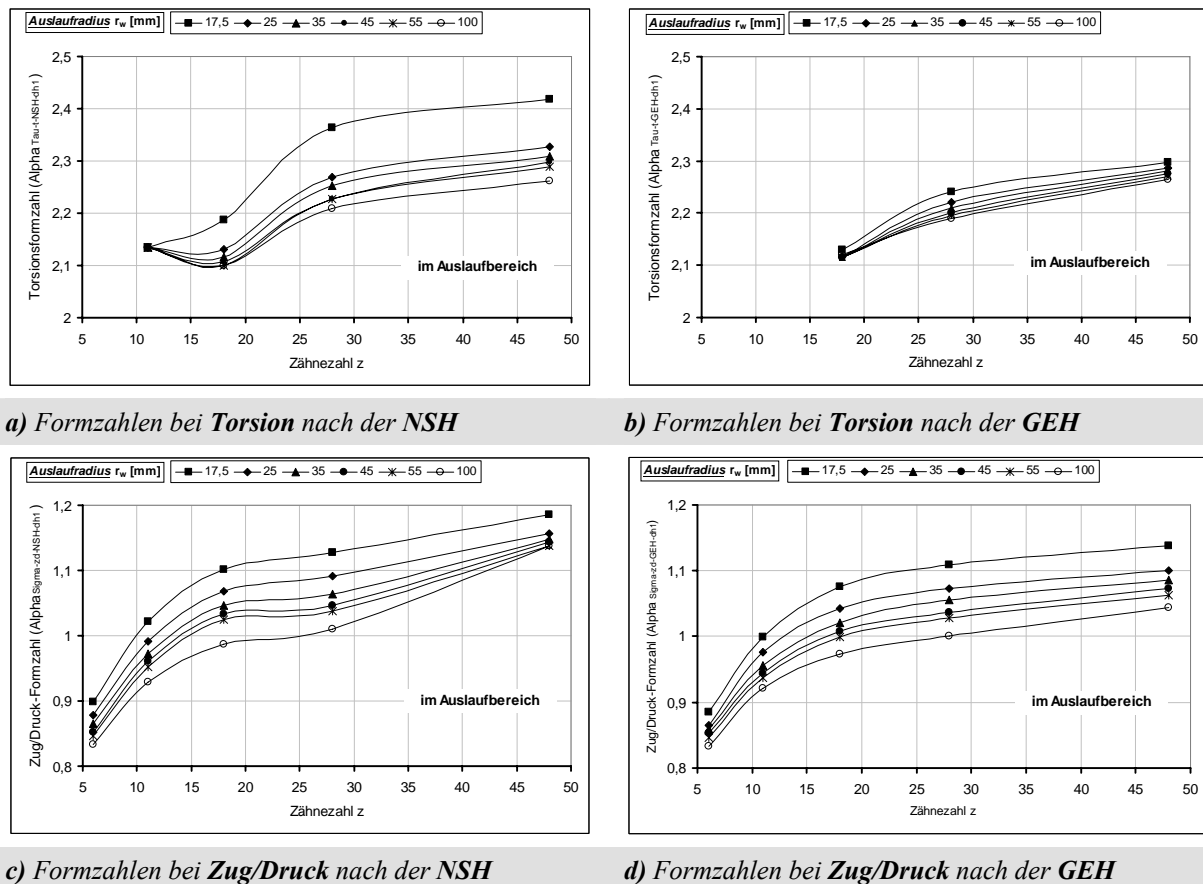


Bild 5.4: Charakteristischer Verlauf der Formzahlen im gebundenen Auslaufbereich von Zahnwellen nach DIN 5480 abhängig von Zähnezahzahl und Auslaufradius

Die Formzahlen im gebundenen Auslauf sind von der Anzahl der Zähne (bzw. vom Verhältnis d_b/m) und geringfügig von der Größe der Auslaufradien abhängig.

Die höchsten Werte der Spannungen bzw. der Formzahlen sind bei der Verwendung von maximaler Zähnezahzahl und minimalem Auslaufradius auf Grund der größten Kerbwirkung aufgetreten. Mit steigendem Auslaufradius verringern sich die Formzahlen bei konstanter Zähnezahzahl geringfügig.

Die Torsionsformzahlen liegen im Bereich von $2,1 \leq \alpha_{tt-NSH} \leq 2,4$ bzw. $2,1 \leq \alpha_{tt-GEH} \leq 2,3$. Darüber hinaus gilt: $\alpha_{tt-GEH} \approx (0,95..1) \cdot \alpha_{tt-NSH}$. Die Zugformzahlen liegen im Bereich von $0,85 < \alpha_{\sigma zd-NSH} < 1,18$. Somit gilt: $\alpha_{\sigma zd-GEH} \approx (0,98..1) \cdot \alpha_{\sigma zd-NSH}$.

Die ausgewerteten maximalen Torsions-Vergleichsspannungen nach NSH und GEH sind im Zahnfußbereich etwa gleich groß und unabhängig von Variation der Auslaufradien. Die Torsionsformzahlen befinden sich im Bereich von $2,0 \leq \alpha_{tt} \leq 2,2$.

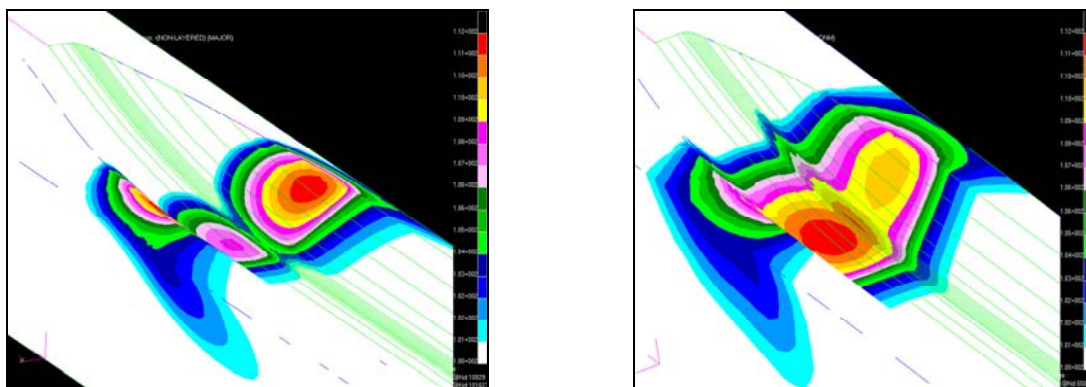
Da für den Bereich kleinerer Zähnezahlen $z < 15$ keine Kerbspannungskonzentration im Auslaufbereich vorhanden ist, lassen sich die Torsionsformzahlen durch die Variationen des Auslaufradius r_w im technischen Bereich von 25 mm bis 100 mm oder des Fußausrundungsverhältnisses ρ_F/m , bei sonst unveränderten Zahngeometrieparametern nicht beeinflussen.

Mit den in der **Tabelle 5.3** aufgelisteten Näherungsformeln kann der Einfluss des Auslaufradius auf die Formzahl in Abhängigkeit von der Zähnezahl abgeschätzt werden.

Tabelle 5.3: Näherungsformeln zur Beschreibung des Einflusses des Auslaufradius auf die Formzahl

Belastungsart	$z < 28$	$z \geq 28$
Torsion	$\alpha_{\tau-NSH-d_{h1}} \approx 2,27 \cdot \left(\frac{r_w}{m}\right)^{-0,02}$	$\alpha_{\tau-NSH-d_{h1}} \approx 2,56 \cdot \left(\frac{r_w}{m}\right)^{-0,034}$
Zug/Druck	$\alpha_{\sigma d-NSH-d_{h1}} \approx 1,25 \cdot \left(\frac{r_w}{m}\right)^{-0,06}$	$\alpha_{\sigma d-NSH-d_{h1}} \approx 1,23 \cdot \left(\frac{r_w}{m}\right)^{-0,022}$

Der Ort der maximalen Vergleichsspannung bei Zugbelastung befindet sich in allen untersuchten Fällen im Auslaufbereich auf der Kopf flanken (**Bild 5.5-a**) sowie in der Zahn lückenmitte (**Bild 5.5-b**) unmittelbar nach dem Auslaufbeginn (ca. 1 mm bis 1,5 mm).



a) an der Kopf flanken (z.B. W17x2xx7)

b) in der Zahn lückenmitte (z.B. W65x2x31)

Bild 5.5: Ort der Spannungskonzentration bei Zugbelastung nach der GEH

Mit steigender Zähnezahl nehmen die Spannungen auf der Kopf flanken ab, während dominiert zunehmend die Spannungsüberhöhung in der Zahn lückenmitte. Ab einer Zähnezahl $z > 28$ wurde nach der NSH keine Spannungskonzentration mehr auf der Kopf flanken festgestellt. Da sich die Spannungsspitzen nicht im Bereich der Fußausrundung befinden, dürfte eine Variation des Fußrundungsradius die Ergebnisse nicht verändern. Zum Vergleich der Ergebnisse für den Lastfall Zug/Druck sind derzeit keine Möglichkeiten vorhanden.

5.2.3 Entwicklung von Näherungsgleichungen zur Formzahlberechnung

Die konstruktive Kerbe des gebundenen Auslaufs stellt eine räumliche Mehrfachkerbe bzw. eine Durchdringungskerbe dar. Sie setzt sich aus einer größeren Kerbe (Zahnlückenauslauf) und einer in der Größeren liegenden kleinen Kerbe (Fußausrundung) zusammen.

Die große Kerbe ist mit einem sanften verrundeten Absatz mit einem großen Kerbradius zu vergleichen. Die kleine ist dementsprechend identisch mit der scharfen Kerbe des Zahnfußgebiets mit kleinem Fußradius (**Bild 5.6**). Dadurch kann eine lokale Überlastung entstehen. Dabei soll die Kerbgeometrie des Absatzes der Geometrie des geb. Auslaufs entsprechen, d.h. $d_{\text{Absatz}} = d_{f1} = d_B - 2 \cdot m$, $D_{\text{Absatz}} = d_w = d_{a1} = d_B$, $r_{\text{Absatz}} = r_{w\text{-Auslauf}}$ und $t_{\text{Absatz}} = t_{a1} = m$.

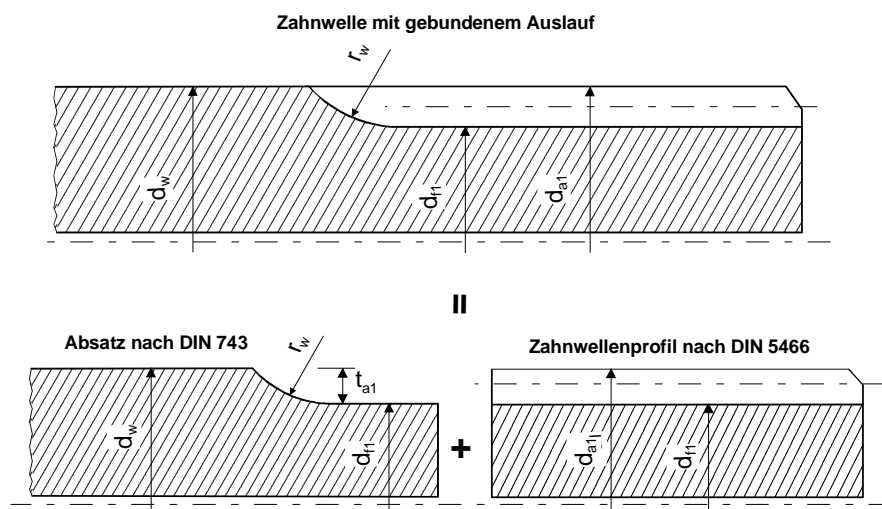


Bild 5.6: Vereinfachung der Zahnwellen mit dem gebundenen Auslauf durch Aufteilung in einen verrundeten Wellenabsatz und ein gerades Zahnwellenprofil

Die Gesamtformzahl sich durchdringender Kerben lässt sich nach dem *Thum-Svenson*-Näherungsverfahren /**Thu60**/ durch Multiplikation der Einzelformzahlen zu $\alpha_k = \alpha_{k1} \cdot \alpha_{k2}$ berechnen.

Darin ist α_{k1} die Formzahl der durchdringenden Kerbe und α_{k2} die Formzahl der durchdrungenen Ersatzplatte, maßgeblich ist hierbei das bezogene Spannungsgefälle in unmittelbarer Nähe der Spannungskonzentration (**Bild 5.7**).

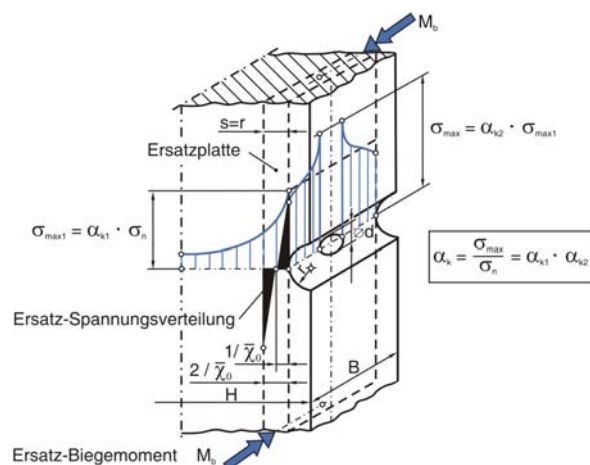


Bild 5.7: Das Modell der Ersatzplatte zur Kerbüberlagerung und Spannungsverteilung bei Durchdringungskerbten (Stab mit Halbkreis Kerbe und zusätzlicher Querbohrung) nach /**Thu60**/

Die durch die primäre Kerbe entstehende Spannungsüberhöhung wird dabei gleich dem Spannungszustand des Randbereichs einer imaginären Platte, der Ersatzplatte, gesetzt. Diese wird durch die zweite Kerbe durchdrungen. Die resultierende Maximalspannung folgt aus der linearen Überlagerung beider Spannungsspitzen.

Wird dieser Überlagerungsansatz bei Zahnwellen mit gebundenem Auslauf angewendet, so werden der Zahnfuß als Primärkerbe und der Auslauf als durchdringende Kerbe betrachtet. Damit kann eine Gesamtformzahl für diese Kerbform durch Interpolation zwischen Absatz und Zahnwellenprofil berechnet werden.

Dadurch folgt der Vorschlag einer Nahrungsbeziehung **(5.1)** zur Ermittlung der Torsionsformzahl für den gebundenen Auslauf.

$$\alpha_{\tau-FEM-gebundener\ Auslauf} \approx \alpha_{\tau-ZW-DIN\ 5466} \cdot \alpha_{\tau-Absatz-DIN\ 743} \cdot A_d \quad (5.1)$$

Nach *Wesolowski* /**Wes96**/ (bzw. nach *DIN 5466-2*) beschreibt die Gleichung **(5.2)** die Formzahl im ungestörten Zahnfußbereich ausreichend genau.

$$\alpha_{\tau-FEM-Zahnfuß} \approx \alpha_{\tau-ZW-DIN\ 5466} = 1,39 \cdot (\rho_1 / m)^{(-0,22)} + 0,08 - 0,03 \cdot e^{(1-z/8)} \quad (5.2)$$

Im Formelvorschlag **(5.1)** wird die Formzahl für den Zahnfuß nach *Wesolowski* mit jener der *DIN 743* für einen äquivalenten Wellenabsatz und einem Korrekturfaktor A_d multipliziert. Die Einflüsse (Wellendurchmesser, Fußausrundungsverhältnis, Zähnezahl und Auslaufradius) sind in dieser Beziehung enthalten. Einfluss der Profilverschiebung ist vernachlässigbar. Der durch Abgleich des Verlaufs der Formelwerte mit den FE-Rechnungen ermittelte Korrekturfaktor beträgt für die Modulreihe 2 der *DIN 5480*: $A_d \approx 0,98$ nach der GEH und $A_d \approx 1,005$ nach der NSH.

Es muss hier jedoch auf die unterschiedliche Definition der Nennspannungen im Absatz und im Auslauf hingewiesen werden. Während sich die Formzahlen nach der *DIN 743* auf den kleinsten Bauteilquerschnitt (hier: d_{f1}) beziehen, sind sie nach *DIN 5466-2* auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen. Weitere Überlegungen zur Bildung einer Gleichung zur Formzahlermittlung führten zu ungenügenden Ergebnissen oder sind theoretisch nicht begründbar.

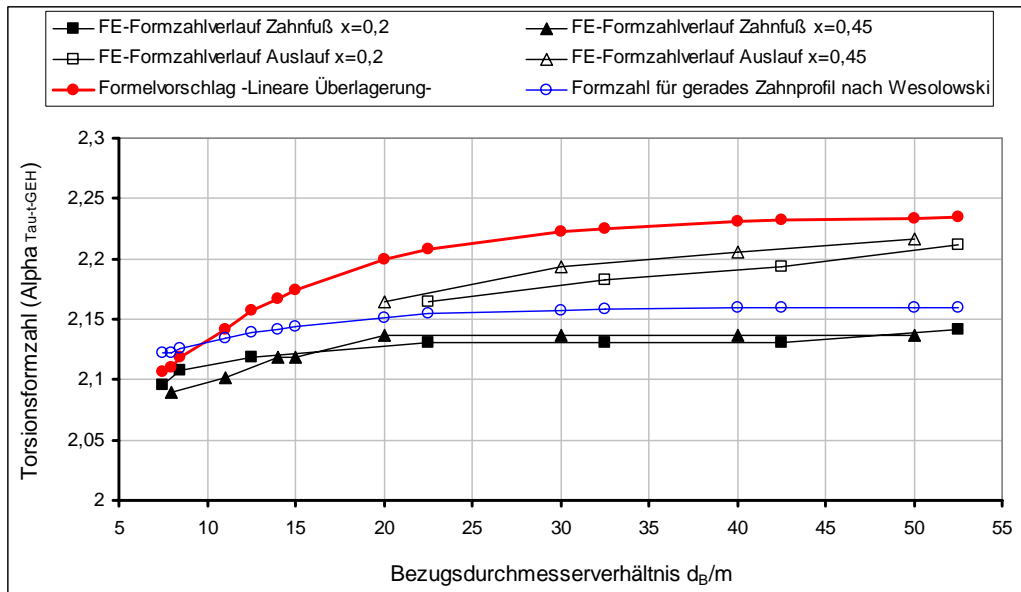
Unter Vernachlässigung der Einflüsse der Zähnezahl und der Absolutgröße wird für die praktische Anwendungen und Überschlagrechnungen die Formel **(5.3)** vorgeschlagen.

$$\alpha_{\tau-ZW-gebundener\ Auslauf} \approx 1 + 0,55 \cdot \sqrt{m/\rho} \quad (5.3)$$

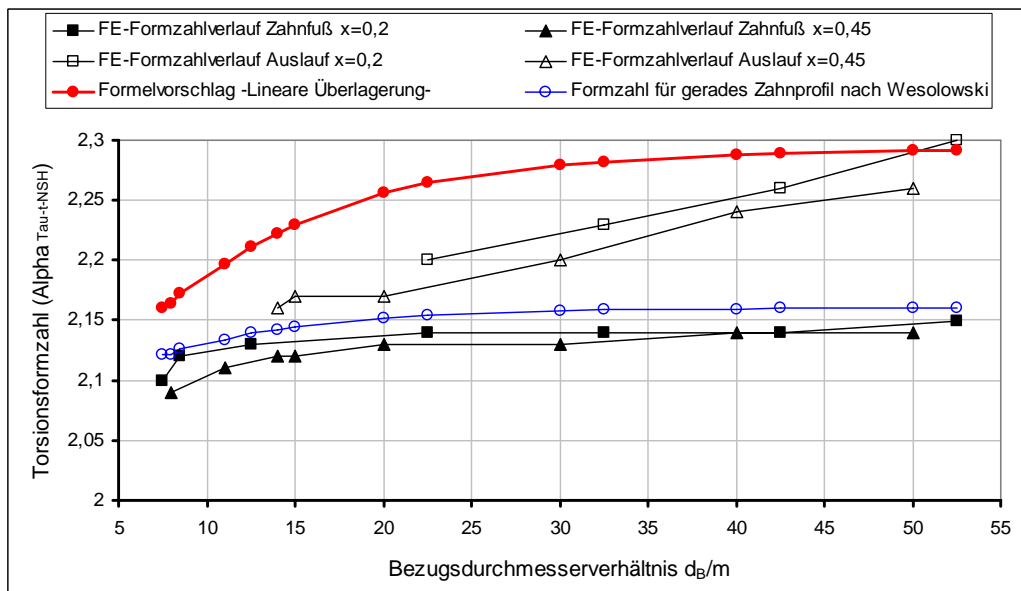
In **Bild 5.8** sind die FEM-Formzahlverläufe für die untersuchten Zahnwellen mit den Verläufen der Formzahlen nach der Gl. **(5.1)** und der Gl. **(5.2)** gemeinsam zusammengestellt. Dabei zeigt die Formel **(5.1)** eine qualitativ gute Übereinstimmung mit den erhaltenen Werten.

Die maximale Abweichung für den relevanten Bereich großer Bezugsdurchmesser verhältnisse beträgt 2 %. Die simulierten Formzahlverläufe für den ungestörten Zahnfußbereich und der Verlauf der nach Gl. **(5.2)** berechneten Formzahlen liegen sehr eng beieinander. Die maximalen Abweichungen liegen im Allgemeinen im Bereich von 2 % und darunter.

Im **Bild 5.9-a** sind die Formzahlverläufe einer Welle mit Absatz nach *DIN 743* je Belastungsart über dem Kerbradius dargestellt. Im **Bild 5.9-b** sind die Torsionsformzahlen für einen konstanten Kerbradius $r = 31,5$ mm über dem Verhältnis d_B/m gezeigt.

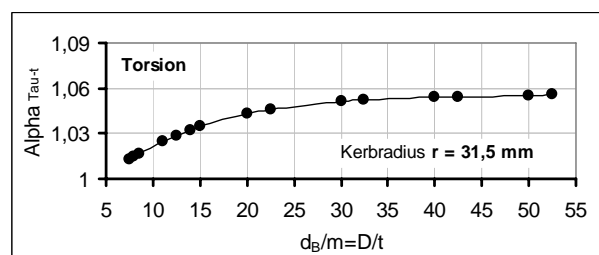
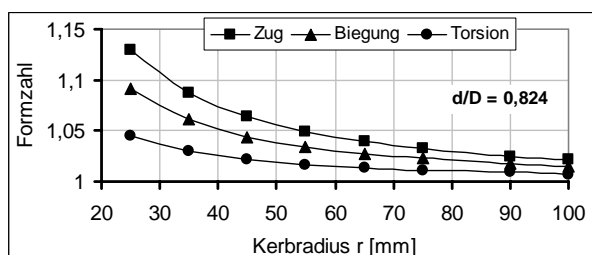


a) Torsionsformzahlen nach der GEH



b) Torsionsformzahlen nach der NSH

Bild 5.8: Gegenüberstellung der Torsionsformzahlen für die Zahnwellen nach DIN 5480; $m = 2 \text{ mm}$



a) Formzahlen je nach Belastungsart ($d/D = d_{f1}/d_{a1} = 0,824$; $d = 20,6 \text{ mm}$ und $t = 2,2 \text{ mm}$)

b) Formzahlen bei Torsion ($r = r_w = 31,5 \text{ mm}$; $d = d_{f1} = d_B - 4,4 \text{ mm}$; $t = 2,2 \text{ mm}$ und $D = d_{a1} = 24,6 \text{ mm}$)

Bild 5.9: Formzahlverlauf für Wellenabsatz

Bei Zug- und Biegebeanspruchung sind die Formzahlen im gebundenen Auslauf sehr klein. Die Ergebnisse weiterer Variationsrechnungen konnten die Unabhängigkeit der Formzahl von den Kenngrößen (Fußausrundung, Profilverschiebung und Auslaufradius) bestätigen.

Allerdings geht von den Zähnen eine unterstützende Wirkung aus, die im Vergleich zum reinen äquivalenten Wellenabsatz für eine Verringerung der Formzahl sorgt. Auf Grund der geringen Variation der Formzahlen bei Biegung und Zug/Druck scheint die Einführung eines konstanten Formzahlwertes denkbar und geeigneter als die Entwicklung einer Gleichung. Für kleine Zähnezahlen kann die Formzahl gleich eins gesetzt werden.

Die Hüllkurve der jeweils maximalen Formzahlwerte aller vorgegebenen Varianten je nach Belastungsart kann durch die in **Tabelle 5.4** angegebenen Werte gebildet werden. Sie gelten über den gesamten nach *DIN 5480* festgelegten Zähnezahlenbereich sowohl für die Spannungsauswertung nach der NSH als auch nach der GEH.

Tabelle 5.4: Formzahlwerte an Zahnwellen mit gebundenem Auslauf in Abhängigkeit von Belastungsart, Zähnezahl und Kerbform

Belastungsart	Formzahl	Kerbform	Gültigkeitsbereich
Torsion	$\alpha_{\tau-d_{h1}} = 2,15$	Im Auslauf	für $z < 18$
	$2,15 \leq \alpha_{\tau-d_{h1}} < 2,3$		für $z \geq 18$
	$2,1 \leq \alpha_{\tau-d_{h1}} < 2,15$	Im Zahnfuß	für z : beliebig
Zug/Druck	$\alpha_{\sigma d-d_{h1}} = 1$	Im Auslauf; $r_w = \text{beliebig}$	für $z < 18$
	$\alpha_{\sigma d-d_{h1}} = 1,15$		für $z \geq 18$
Biegung	$\alpha_{\sigma b-d_{h1}} = 1$		für $z < 18$
	$\alpha_{\sigma b-d_{h1}} = 1,2$		für $z \geq 18$

Für die Zahnwellen mit gebundenem Auslauf ohne SR-Nuten gilt im Allgemeinen:

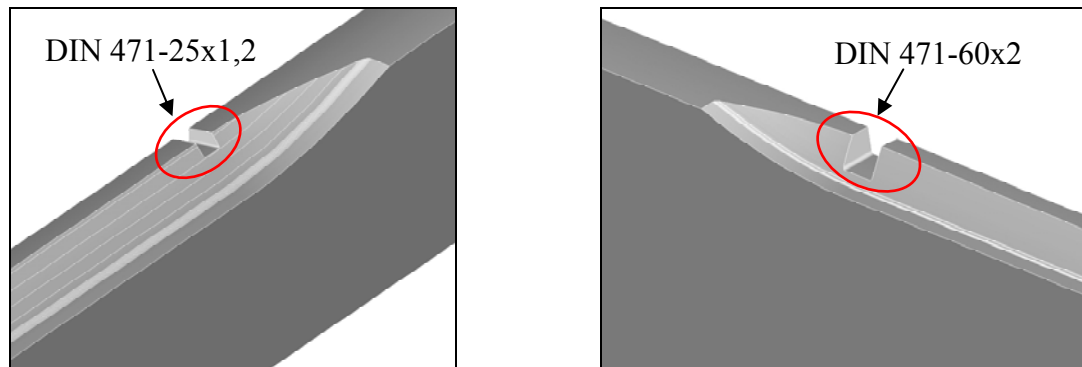
$$\alpha_{\sigma d-\text{geb. Auslauf}} \approx \alpha_{\sigma b-\text{geb. Auslauf}} < \alpha_{\tau-\text{geb. Auslauf}} \quad (5.4)$$

Anmerkung

Die Spannungskonzentrationen auf den unmittelbaren Oberflächenbereich sind im gebundenen Auslaufbereich nach wenigen Zehntelmillimetern vom Auslaufbeginn nahezu vollständig abgebaut, bevor sie den Übergang in den ungestörten Wellenbereich erreichten. Deshalb sind Untersuchungen zur Ermittlung des axialen Abklingverhaltens bei Zahnwellen mit gebundenem Auslauf von geringer Bedeutung.

5.3 Einfluss der Sicherungsringnut (Nuttiefe und Nutlage)

Um den Einfluss der Einbringung einer Sicherungsringnut sowie deren Tiefe und Lage auf die Größe der auftretenden Formzahlen im gebundenen Auslauf, im Zahnfuß sowie in der SR-Nutausrundung zu beurteilen, wurden numerische Berechnungen durchgeführt. Grundsätzlich wurden die Zahnwellen W25x2x11 mit $x_1 = 0,2$ mm und W60x2x28 mit $x_1 = 0,45$ mm nach /N1/ und die dazu passenden SR-Nuten DIN 471-25x1,2 und DIN 471-60x2 nach /N2/ (Regelausführung und eine rechteckige Nutform) verwendet. Die geometrischen Größen für die SR-Nuten an den Zahnwellen sind in **Bild 5.10** dargestellt.



a) DIN 5480 W25x2x11 mit DIN 471-25x1,2

b) DIN 5480 W60x2x28 mit DIN 471-60x2

(Nuttiefe $t_{SRN} = 0,55$ mm; Nutbreite $m_{SRN} = 1,3$ mm und Nutrundung $r_{SRN} = 0,12$ mm)

(Nuttiefe $t_{SRN} = 1,5$ mm; Nutbreite $m_{SRN} = 2,15$ mm und Nutrundung $r_{SRN} = 0,2$ mm)

Bild 5.10: Die charakteristischen Größen für die genormten Zahnwellen nach DIN 5480 mit gebundenem Auslauf und mit standardisierten SR-Nuten nach DIN 471/N2/

Die verwendeten Vollzahnwellen umfassen interessante Bereiche kleinerer sowie größerer Zähnezahlen ($z = 11$ und $z = 28$). Der Auslaufradius beträgt für beide Geometrien $r_w = 25$ mm und wurde für diese Variantenrechnung nicht variiert. Die Eckradien im SR-Nutgrund sind kleiner als die minimalen Fußradien $\rho_{f-min} = 0,32$ mm.

Variation der SR-Nuttiefen

Die in Abhängigkeit vom Bezugsdurchmesser ausgewählten SR-Nuten reichen mit ihren Nuttiefen unter den Kopfkreis $d < d_{SRN} < d_{a1}$ für die Geometrie W25x2x11 bzw. unter den Teilkreis $d_{f1} < d_{SRN} < d$ für die Geometrie W60x2x28. Dadurch ergeben sich kritische Untersuchungsbereiche. Hierbei überlagern sich die Kerbwirkungen aus der Zahnfußausrundung, dem Auslaufbereich und der Nutausrundung. Diese Kerbkombination tritt in der Praxis häufig auf.

Bild 3.9 (S. 72) zeigt räumliche FE-Vernetzungen für das Zusammentreffen von SR-Nut und Zahnfußgebiet. Es handelt sich dabei um die Zahnwellen: W60x2x28 mit einem direkt über dem Fußkreis liegenden SR-Nutgrund und W150x2x74 mit einem unterhalb des Fußkreises liegenden Nutgrundkreis sowie W15x2x6 mit einer flachen Nut.

Variation der SR-Nutlagen

Darüber hinaus wurden bei dieser Untersuchung je Zahnwelle (W25x2x11 bzw. W60x2x28) die Formzahlen für drei unterschiedliche geometrische SR-Nutlagen ermittelt (**Bild 5.11**) und mit denen für eine Zahnwelle ohne Nut verglichen. Bei den Nutlagen 1 und 3 beträgt der Abstand zwischen der Nutwand und dem Auslaufbeginn ca. 1,7 mm für W25x2x11 bzw. ca. 5 mm für W60x2x28, was in etwa der genormten Nut-Bundbreite n nach /N2/ entspricht.

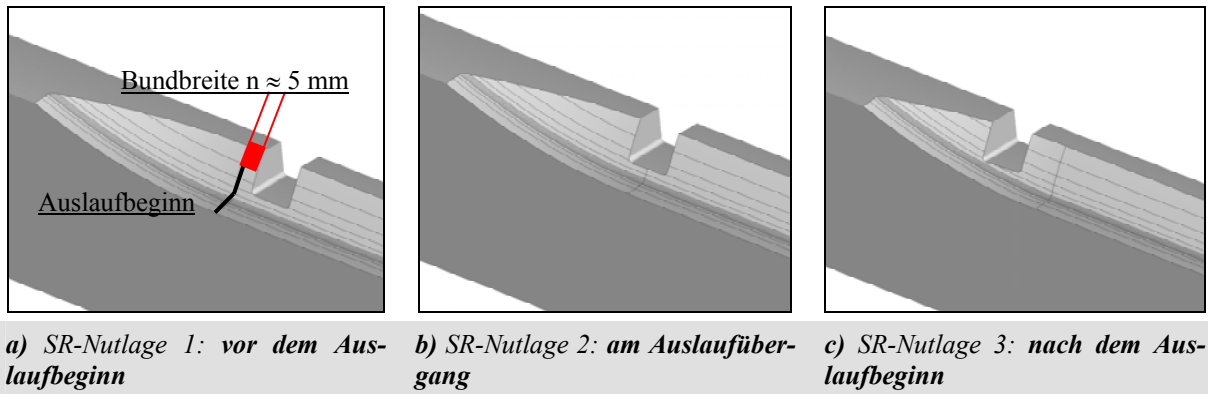


Bild 5.11: Die Einbringung einer unter den Teilkreis reichenden SR-Nut und Variation der SR-Nutlagen an der Außenkontur der Zahnwelle DIN 5480 W60x2x28

Ergebnisauswertung

Bei der Auswertung der Maximalwerte der Vergleichsspannungen für die untersuchten Modelle wurden bei Torsionsbelastung zwei Stellen stärkster Spannungsüberhöhung in der Zahnwelle ermittelt. Zum einen ergibt sich eine solche Spannungsüberhöhung direkt im Nutgrundradius (jeweils auf der Einspannungs- und Lasteinleitungsseite), zum anderen im Fußradius unterhalb der SR-Nut (für die Zug- und Druckseite). Die Auswertungspositionen sind in **Bild 5.12** dargestellt. Bei Zug/Druck und Biegung befindet sich die Maximalspannung immer in der SR-Nutrundung.

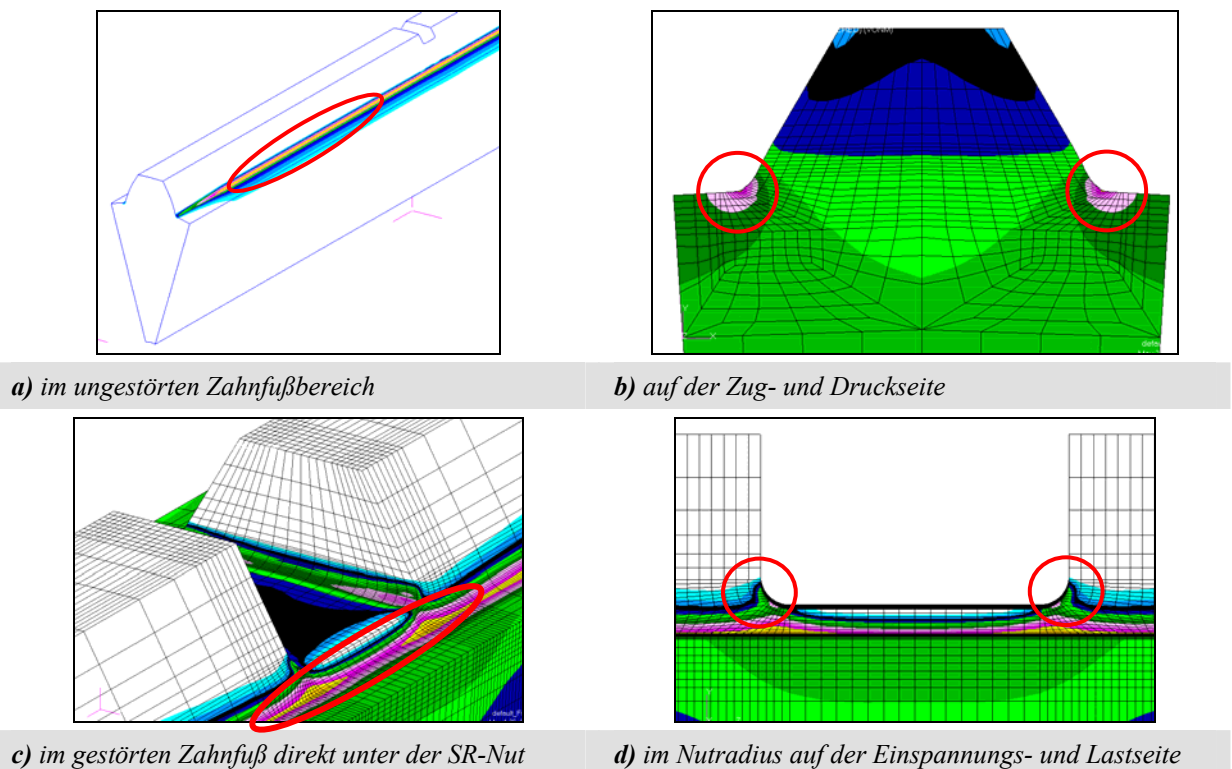


Bild 5.12: Interessante Positionen zur Auswertung der Vergleichsspannungen bei Torsion

Bild 5.13 zeigt schematisch die Torsionsspannungsverläufe sowie die Lage der Vergleichsspannungsmaxima nach der GEH und NSH.

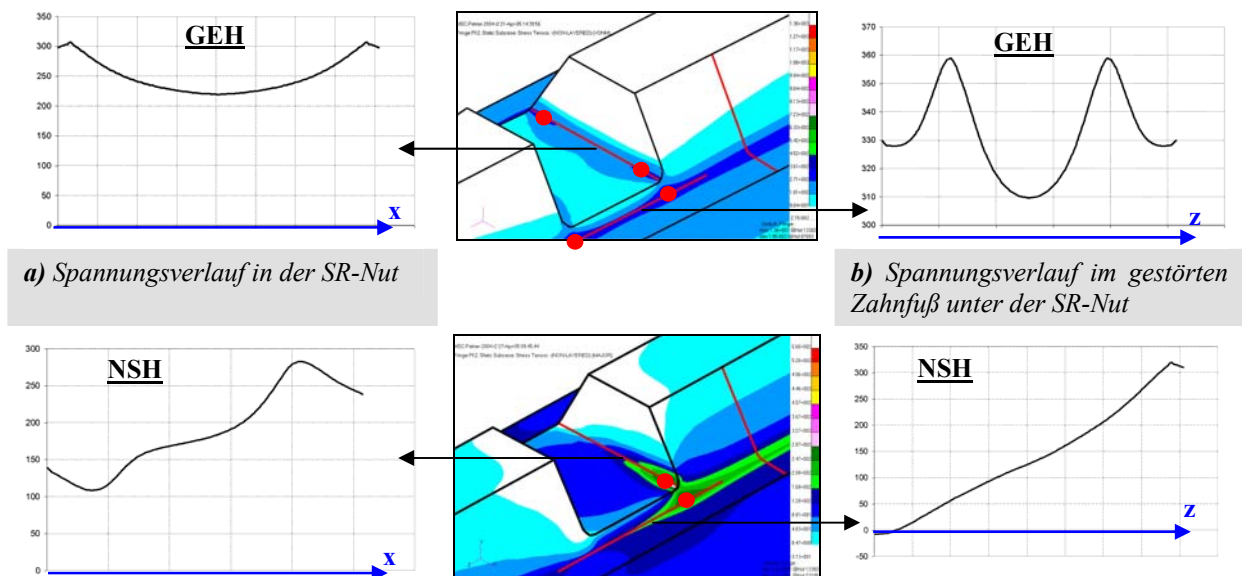
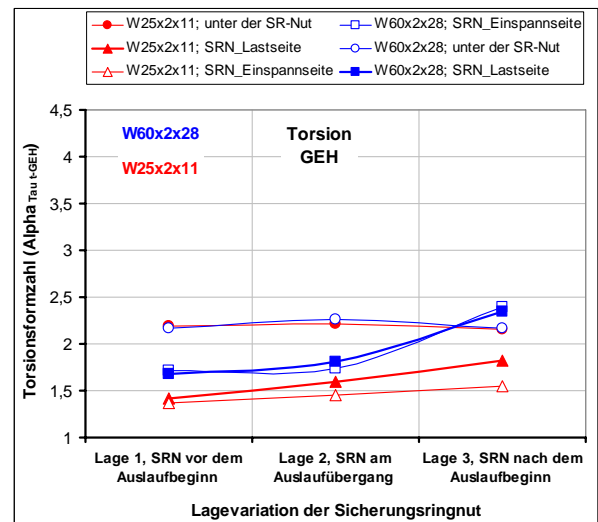
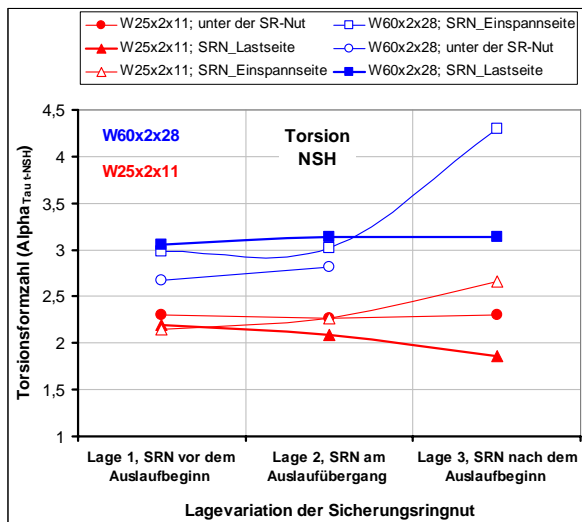


Bild 5.13: Ausgewählte Spannungsverläufe in der SR-Nutrundung und in der Fußausrundung sowie die Örtlichkeit der Vergleichsspannungsmaxima für die torsionsbelasteten Zahnwellen mit SR-Nut nach der **GEH** (oben) und der **NSH** (unten)

In **Bild 5.14** sind die sich ergebenden Formzahlen abhängig von der Nutlage und -tiefe aufgetragen. Die Formzahlen sind auf den Nutgrunddurchmesser d_{SRN} für die Nut bzw. auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} für den Zahnfuß bezogen.

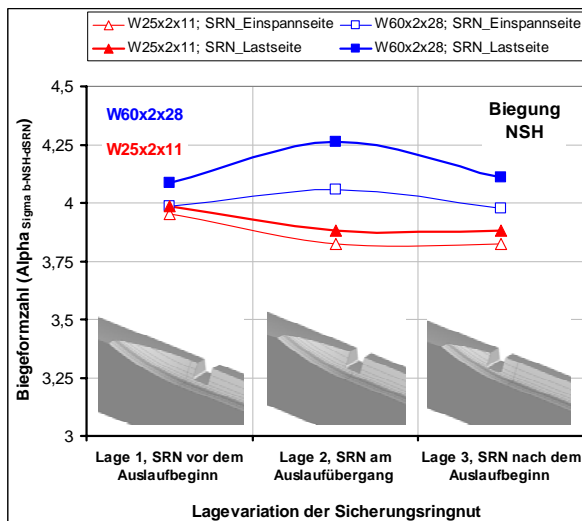
Die Ergebnisauswertungen in diagrammartiger Aufarbeitung konnten im Wesentlichen Entwicklungstendenzen von Formzahlen bei der Variation einzelner Geometrieparameter aufzeigen. Bei Vorhandensein einer SRN an einer Zahnwelle ist die Spannungsüberhöhung sowohl in der Nutrundung als auch im Zahnfuß zu berücksichtigen. Der Vergleich zwischen den Formzahlen nach der GEH und der NSH ist bei jeder Dimensionierung auszuführen.

Im ungestörten Zahnfußbereich konnten keine Veränderungen der Formzahlen durch die Variation der Nuttiefe festgestellt werden. Die Formzahlwerte entsprechen denen der Zahnwellen ohne SRN. Im „gestörten“ Nutbereich weisen die ermittelten Torsionsformzahlen unterschiedliche Werte hinsichtlich des Materialverhaltens (duktil bzw. spröde) auf.



a) Formzahlen bei Torsion nach der NSH

b) Formzahlen bei Torsion nach der GEH



c) Formzahlen bei Biegung nach der NSH

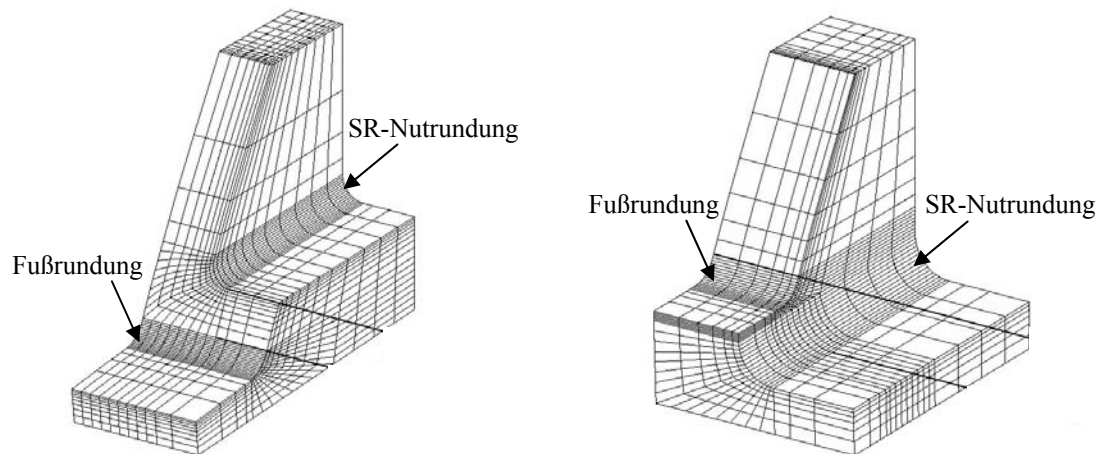
Bild 5.14: Einfluss der Variation der SR-Nutlage und -tiefe auf die Formzahlen in der Nutausrundung (Last- und Einspannseite) sowie im Zahnfuß unter der Nut, für die Zahnwellen W25x2x11 und W60x2x28 nach DIN 5480 mit gebundenem Auslauf und SR-Nuten DIN 471 -25x1,2 und DIN 471 -60x2

Die Spannungsanalyse bei der FE-Berechnung ergibt, dass die Konstruktionsvariante mit der SR-Nutlage 1 vor dem Auslaufbeginn den günstigen Formzahlwert im Vergleich zu den anderen Nutlagenvarianten besitzt. Unter Beachtung der Tragfähigkeit ist grundsätzlich eine mit der nach DIN 471 normierten Bundbreite vergleichbare geringe Entfernung vom Auslaufübergang anzustreben. Neben einer eventuellen möglichen Reduzierung der Spannungsmehrachsigkeit an der Auslaufkerbe ist eine Verringerung der Spannungsüberhöhung möglich.

Da der gebundene Auslaufbereich als Spannungsabklingbereich insbesondere für Zahnwellen mit kleinen Zähnezahlen agiert, muss er fürs Abklingen der Spannungen von Zusatzkerben frei sein. Das Einbringen einer Nut in den Auslaufbereich schwächt den Querschnitt an der Auslaufzone einer Zahnwelle, verkompliziert den Spannungszustand und führt zur Formzahlvergrößerung. Dementsprechend werden unterschiedliche Formzahlen an der last- und einspannseitigen SR-Nutrundung ermittelt, siehe Bild 5.14-a. Die Nutlagen 2 und 3 sollen daher möglichst vermieden werden.

Bei der Auswertung der Torsionsformzahlen aus der NSH ist festzustellen, dass bei kleiner Nuttiefe (d.h. über dem Teilkreis liegende Nuttiefe) (**Bild 5.15-a**) die Formzahl in der Zahnfußausrundung unmittelbar unterhalb der SR-Nutgeometrie immer größer ist als die in der Nut liegende. Für die Nutlage 1 ist die ermittelte Formzahl an der Last- und Einspannseite identisch. Für die Nutlagen 2 und 3 sind die Formzahlen an der Einspannseite maßgebend.

Bei großer Nuttiefe (d.h. direkt über bzw. unter dem Fußkreis liegende Nuttiefe) (**Bild 5.15-b**) ist die Formzahl in der Nutrundung größer als die im Zahnfußradius. Die Formzahl an der Lastseite ist für die Lagen 1 und 2 entscheidend, bei der Nutlage 3 dominiert sie an der Einspannseite.



a) die Einbringung einer **über den Zahnfußkreis** reichenden SR-Nut **b)** die Einbringung einer **unter den Zahnfußkreis** reichenden SR-Nut

Bild 5.15: Geometrische Positionen der SR-Nuten mit großer Nuttiefe an der Außenkontur der Zahnwellen nach DIN 5480

Bei der Auswertung nach der GEH sind die sich durch Nutlagen 1 und 2 ergebenden Formzahlen in der Fußausrundung deutlich größer als die im SR-Nutradius (**Bild 5.14-b**). Dies gilt für kleine und große Nuttiefen. Die Formzahlen der Lastseite sind etwas größer als die Formzahlen der einspannseitigen Nutrundung, unabhängig von der Nutlage oder -tiefe. Für die Nutlage 3 und nur bei großer Nuttiefe ist die Formzahl an der SR-Nut ausschlaggebend.

Solange der Nutgrunddurchmesser sich zwischen dem Teilkreis und dem Fußkreis befindet, müssen die Maximalwerte der örtlichen Kerbspannung (nach der NSH und der GEH) sowohl in der Nut- als auch in der Fußausrundung erfasst und miteinander verglichen werden. Da die Spannungsüberhöhung in diesem Fall fast gleich ist. Es könnte dabei der Grenzfall eintreten, dass die Formzahlen von der Nutkerbe und Zahnfußkerbe beinah den gleichen Wert besitzen.

Während die Einbringung einer direkt über den Fußkreis reichenden SRN in eine Zahnwelle negative Auswirkungen auf die Tragfähigkeit durch die sich erhöhende Spannungskonzentration hat, führt das Einbringen einer unter den Fußkreis reichenden SRN ($d_{SRN} < d_{f1}$) nur zu geringen Auswirkungen auf die Tragfähigkeit und kann im Sinne einer Entlastungskerbe die Spannungsüberhöhung am Zahnfuß reduzieren. Im Falle der unter dem Fußkreis liegenden Nut sind die Spannungsverteilung und die aufgetretene Formzahl vergleichbar mit denen für die Zahnwellen mit freiem Auslauf (**Bild 5.16**). Somit kann man bei der Ermittlung der Formzahl in der Nutrundung von einer Zahnwelle mit freiem Auslauf ausgehen.

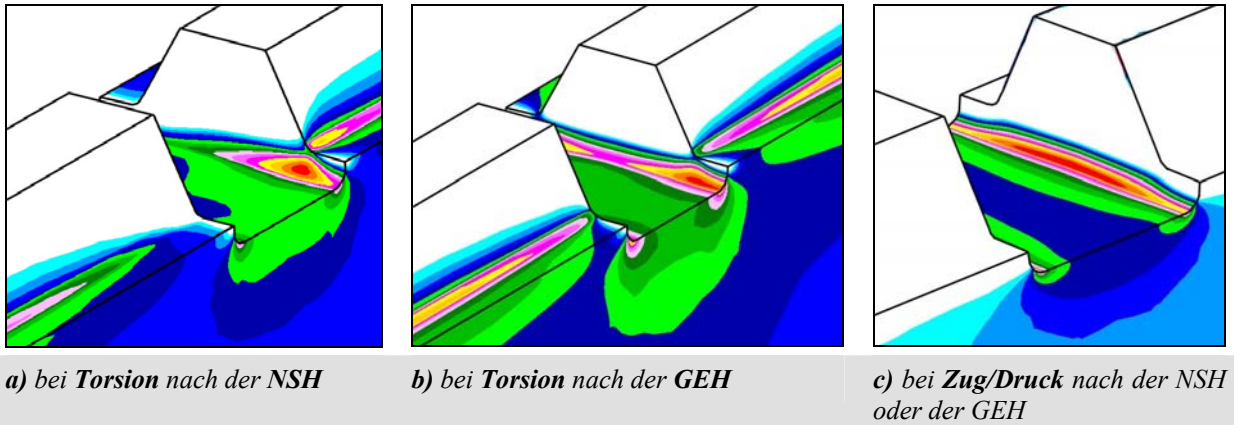


Bild 5.16: Position und Verteilung der Vergleichsspannungen bei Zahnwellen mit einer unter den Fußkreis reichenden SR-Nuttiefe

Bei Zug/Druck oder Biegung hat die Einbringung der SRN einen deutlichen Einfluss auf die Formzahl. Dies entspricht ca. einer Vervielfachung der Formzahl bei der Zahnwelle ohne Nut (Bild 5.14-c). Hierbei wurden nur die Maximalwerte hauptsächlich in den SR-Nutradien ausgewertet, da diese den relevanten und kritischsten Bereich der Zahnwelle darstellen. Die Formzahlen (nach der NSH oder der GEH) sind immer an der Lasteinleitungsseite der Nutrundung größer als die an der Einspannungsseite ermittelten Formzahlen unabhängig von der Nutlage oder -tiefe aufgetreten.

Bei allen untersuchten Varianten waren im Allgemeinen kleine prozentuale Abweichungen der Formzahl an der Lastseite von der Formzahl an der Einspannseite zu verzeichnen. Sie berechnen sich gemäß (5.5) je Belastungsart und sind stark von der Nutlage und -tiefe abhängig:

$$\Delta_{\alpha_{\sigma,\tau-SRN}} = \frac{\alpha_{\sigma,\tau\text{-Lastseite}} - \alpha_{\sigma,\tau\text{-Einspannseite}}}{\alpha_{\sigma,\tau\text{-Einspannseite}}} \cdot 100\% \quad (5.5)$$

Sie liegen bei Biege- und Zugbelastung nach der NSH oder der GEH unabhängig von der Nutlage unter 2 % für kleine Nuttiefen und unter 5% für große Nuttiefen. Bei Torsion sind sie unter 3,5 % für die Nutlage 1, unter 10,5 % für Nutlage 2 und ca. 20 % für Nutlage 3. Der große Abweichungswert bei Lage 3 ist auf die unterschiedlichen Steifigkeiten der Wellenquerschnitte zurückzuführen.

Die dabei ermittelten Maximalwerte und Verläufe der Formzahlen auf der Zug- und Druckseite differierten in der SR-Nut oder im ungestörten Zahnfuß bei allen Modellen unter einem Prozent. Für die SR-Nuten an Zahnwellen ergaben zwischen den Formzahlen in der Nutausrundung (aus der NSH und der GEH) im Allgemeinen die Zusammenhänge (5.6) bis (5.10):

$$\alpha_{\sigma d-SRN} > \alpha_{\sigma b-SRN} > \alpha_{\tau-SRN} \quad (5.6)$$

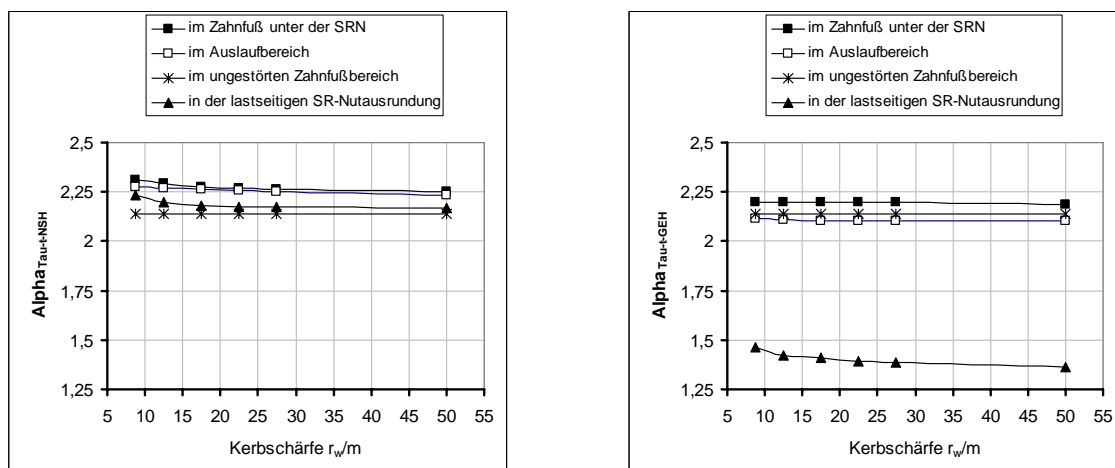
Bei Torsion	für große Nuttiefen:	$\alpha_{\tau-SRN-GEH} \approx 0,58 \cdot \alpha_{\tau-SRN-NSH}$	(5.7)
	für kleine Nuttiefen	$\alpha_{\tau-SRN-GEH} \approx 0,65 \cdot \alpha_{\tau-SRN-NSH}$	(5.8)
Bei Biegung oder Zug/Druck	für große oder kleine Nuttiefen:	$\alpha_{\sigma b,zd-SRN-GEH} \approx 0,88..0,90 \cdot \alpha_{\sigma b,zd-SRN-NSH}$	(5.9)
		$\alpha_{\sigma d-SRN} \approx 1,07 \cdot \alpha_{\sigma b-SRN}$	(5.10)

Variation des gebundenen Auslaufradius

Um den Einfluss des Auslaufradius auf die Formzahl in der SR-Nut auszuschließen, wurden exemplarische FE-Berechnungen am Beispiel der Zahnwelle W25x2x11 mit einer vor dem Auslaufbeginn liegenden SRN DIN 471-25 x 1,2 durchgeführt, siehe *Bild 5.10-a*. Die gewonnenen Formzahlen sind in *Bild 5.17* und *Bild 5.18* zusammengestellt.

Bei der Ergebnissauswertung konnte im Wesentlichen festgestellt werden, dass die Variation der Größe des Auslaufradius im technisch relevanten Durchmesserbereich ($r_w = 20..100$ mm) nur einen geringfügigen vernachlässigbaren Einfluss auf die Formzahlen in der Nutrundung oder im Zahnfuß hat (*Bild 5.17*). Die Position der maximalen Torsionsspannung liegt nach beiden Auswertungsmethoden (NSH bzw. GEH) im Zahnfuß unter der SRN.

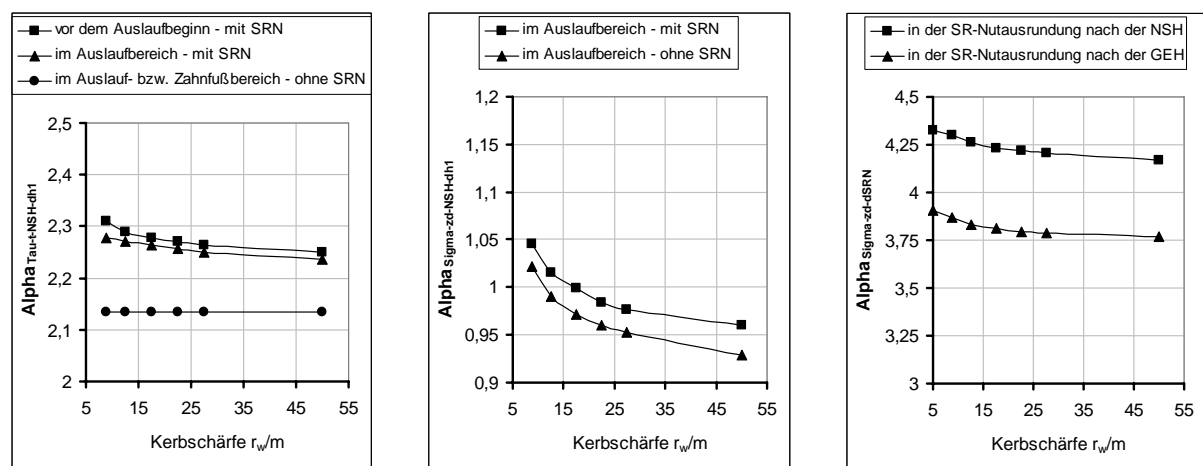
Ein Vergleich der Ergebnisse der Formzahlen im Auslauf- und Zahnfußbereich für die Zahnwelle mit und ohne Nut bestätigt, dass das Vorhandensein einer SRN zur eindeutigen Erhöhung der Formzahl führt, siehe *Bild 5.18*.



a) Torsionsformzahl nach der NSH

b) Torsionsformzahl nach der GEH

Bild 5.17: Darstellung der Formzahlverläufe bei Torsion in Abhängigkeit von der Kerbschärfe an der Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11 mit SR-Nut DIN 471-25x1,2



a) bei Torsion im gebundenen Auslauf und Zahnfußbereich

b) bei Zug/Druck im Auslauf

c) bei Zug/Druck in der SR-Nut

Bild 5.18: Vergleich des Einflusses der Variation des Auslaufradius r_w auf die Größe der Formzahlen an der Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11 mit und ohne SR-Nut

SR-Nut mit und ohne Entlastungskerbe – Vergleich

Zur Beurteilung des Einflusses einer SR-Nut mit Entlastungskerbe (Umlaufkerbe) auf den Wert der Formzahl wurde die Zahnwelle W60x2x28 mit gebundenem Auslauf ($r_w = 25$ mm; $x_1 = 0,45$; $d_{h1} = 56,58$ mm und $d_i = 0$) betrachtet. Die SR-Nut DIN 471-60x2 ($d_{SRN} = 56,60$ mm) liegt unmittelbar vor dem Auslaufbeginn. Die Nuttiefe beträgt $t_{SRN} = 1,5$ mm, siehe **Bild 5.19**.

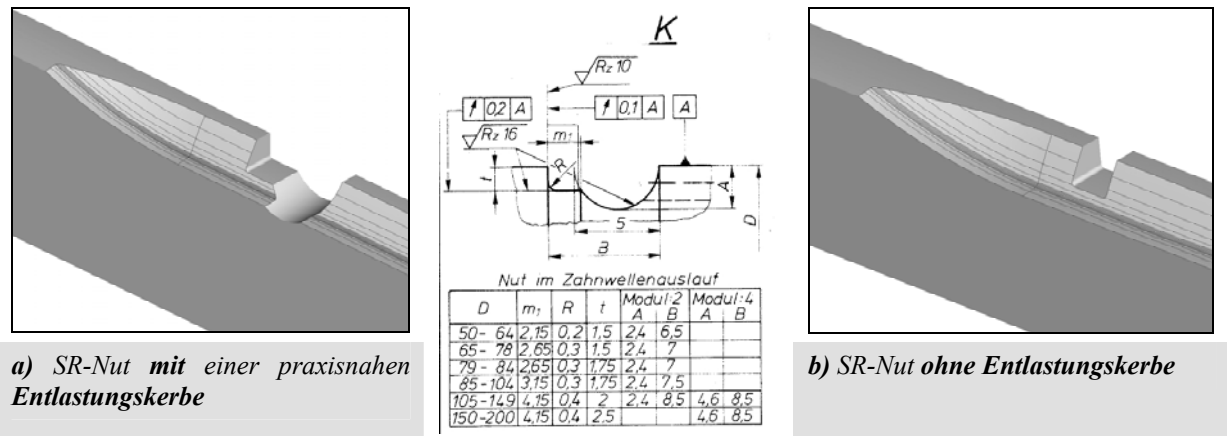


Bild 5.19: Zahnwelle mit gebundenem Auslauf W60x2x28 /N1/ und einer SR-Nut DIN 471-60x2 /N2/

Diese exemplarische Untersuchung zeigt, dass der Einsatz von Sondernuten keine Verbesserung bezüglich der Formzahlverringerung bei Torsionsbelastung bringt. Die Nut mit der Umlaufkerbe führt zur Schwächung des Kerbquerschnittes und zur Erhöhung der Kerbwirkung bei Torsion (Vergleich mit Scheibenfeder).

Die ermittelten Torsionsformzahlen für beide Kerbformen sind in der **Tabelle 5.5** zusammengestellt. Bei Zugbelastung ist die Formzahl in der Nutrundung $\alpha_{\sigma zd-NSH} = 4,37$ größer als die ermittelte Formzahl $\alpha_{\sigma zd-NSH} = 3,55$ in der SR-Nut mit Umlaufkerbe.

Tabelle 5.5: Werte der Torsionsformzahl an der Zahnwelle W60x2x28 /N1/ mit gebundenem Auslauf und Sicherungsringnut /N2/ (mit und ohne Umlaufkerbe)

Kerbe	Torsionsformzahl	ZW mit SRN	ZW mit SRN und Umlaufkerbe
Im gebundenen Auslauf	$\alpha_{\tau-NSH-d_{h1}}$	2,67	2,26
	$\alpha_{\tau-GEH-d_{h1}}$	2,16	
Im ungestörten Zahnfuß	$\alpha_{\tau-NSH \text{ bzw. } GEH-d_{h1}}$	2,18	
Im gestörten Zahnfuß, unter der SR-Nut	$\alpha_{\tau-NSH-d_{h1}}$	2,67	2,76
	$\alpha_{\tau-GEH-d_{h1}}$	2,16	1,99
In der SR-Nutrundung	$\alpha_{\tau-NSH-d_{SRN}}$	3,05	
	$\alpha_{\tau-GEH-d_{SRN}}$	1,69	
Am Übergang Umlaufkerbe/Fußkreis	$\alpha_{\tau-NSH-d_{h1}}$	-	3,08
	$\alpha_{\tau-GEH-d_{h1}}$	-	1,69

5.3.1 Spannungsformzahlverläufe an Zahnwellen mit Sicherungsringnut

Der Bestimmung des Vergleichsspannungsverlaufs bzw. des Formzahlverlaufes besonders in Bereichen starker Spannungsüberhöhung kommt eine große Bedeutung zu.

An den hier vorhandenen Kerbformen, wo sich die Kerben der SR-Nut und Fußrundung überlagern, wurden grundlegende Abschätzungen zum Formzahlverhalten an Zahnwellen mit SR-Nuten betrieben. Das Hauptanliegen der Einschätzungen sind Aussagen, ob und wie sich diese Kerben gegenseitig beeinflussen.

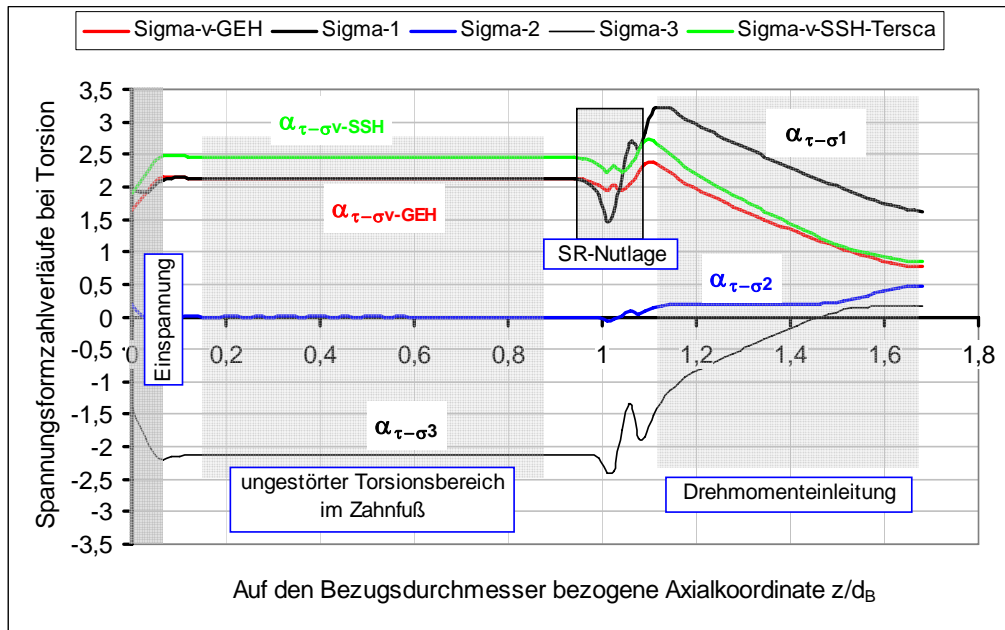
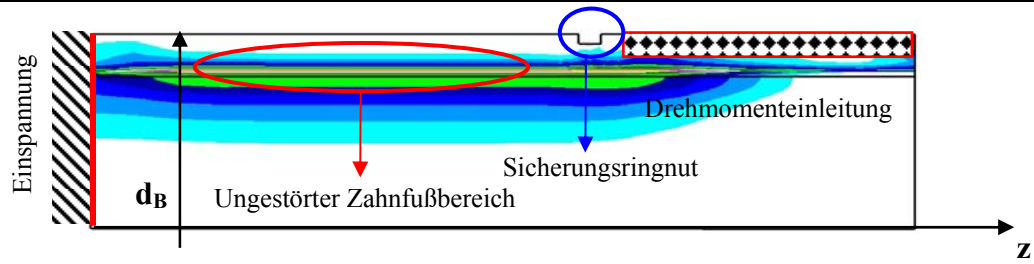
Die geometrischen Parameter der untersuchten Zahnwellen und SR-Nuten sind in **Tabelle 5.6** zusammengestellt. Die Zahnwelle mit $d_B = 150$ mm ist das einzige Modell, bei dem der Nutgrund unterhalb des Zahnfußes liegt.

Tabelle 5.6: Zusammenstellung der geometrischen Abmessungen der Zahnwellengeometrien nach DIN 5480 und der Sicherungsringnuten nach DIN 471

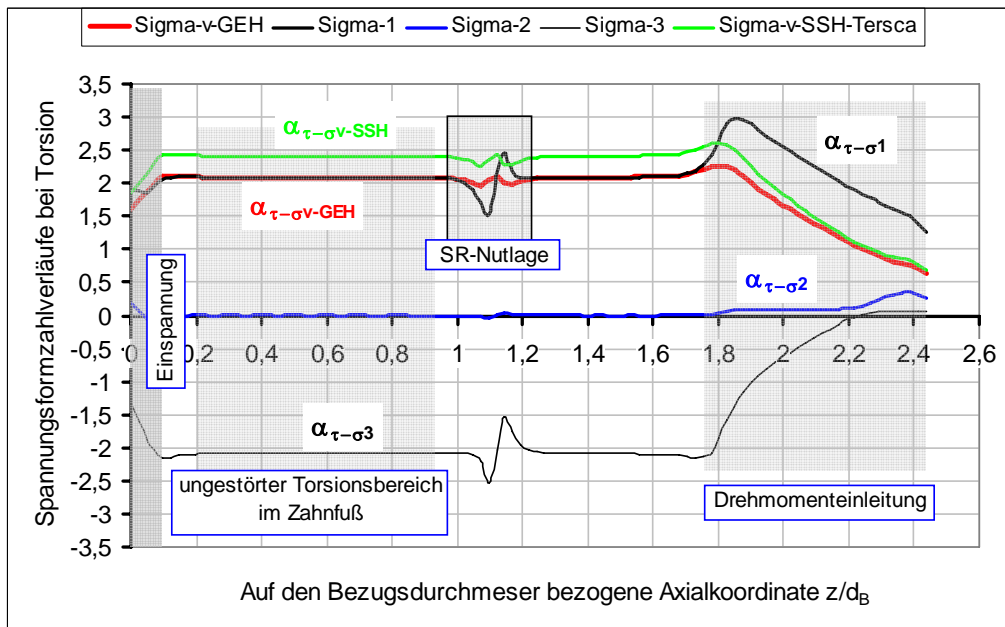
Modellbezeichnung		Nuttiefe	Nutbreite	Rundung im Nutgrund
Zahnwellen /N1/	SR-Nuten /N2/	t_{SRN}	m	r_{SRN}
DIN 5480 W15 x 2 x 6	DIN 471 – 15 x 1	0,35	1,1	0,1
DIN 5480 W25 x 2 x 11	DIN 471 – 25 x 1,2	0,55	1,3	0,12
DIN 5480 W40 x 2 x 18	DIN 471 – 40 x 1,75	1,25	1,85	0,175
DIN 5480 W60 x 2 x 28	DIN 471 – 60 x 2	1,5	2,15	0,2
DIN 5480 W100 x 2 x 48	DIN 471 – 100 x 3	1,75	3,15	0,3
DIN 5480 W150 x 2 x 74	DIN 471 – 150 x 4	2,5	4,15	0,4

Am Beispiel der Zahnwellen W100x2x48 ($d_i = 20$ mm), W60x2x28 ($d_i = 6$ mm) und W150x2x74 ($d_i = 15$ mm) mit SR-Nuten wurden die prinzipiellen Verläufe der Torsionsformzahlen aus den Hauptspannungen (σ_{v-1} , σ_{v-2} und σ_{v-3}) nach der NSH und aus den Vergleichsspannungen nach der GEH und SSH ermittelt und in den **Bildern 5.20 bis 5.23** dargestellt.

Die Auswertung erfolgt im Zahnfußbereich der Zugseite beginnend von dem eingespannten Ende in Richtung der Drehmomenteinleitungsstelle sowie in der lastseitigen SR-Nutrundung in Abhängigkeit von der auf den Bezugsdurchmesser bezogenen Axialkoordinate. Weiterhin basiert die Darstellung auf der Lage des Belastungsmodells. Die Formzahlverläufe sind an der Zug- und Druckseite identisch.

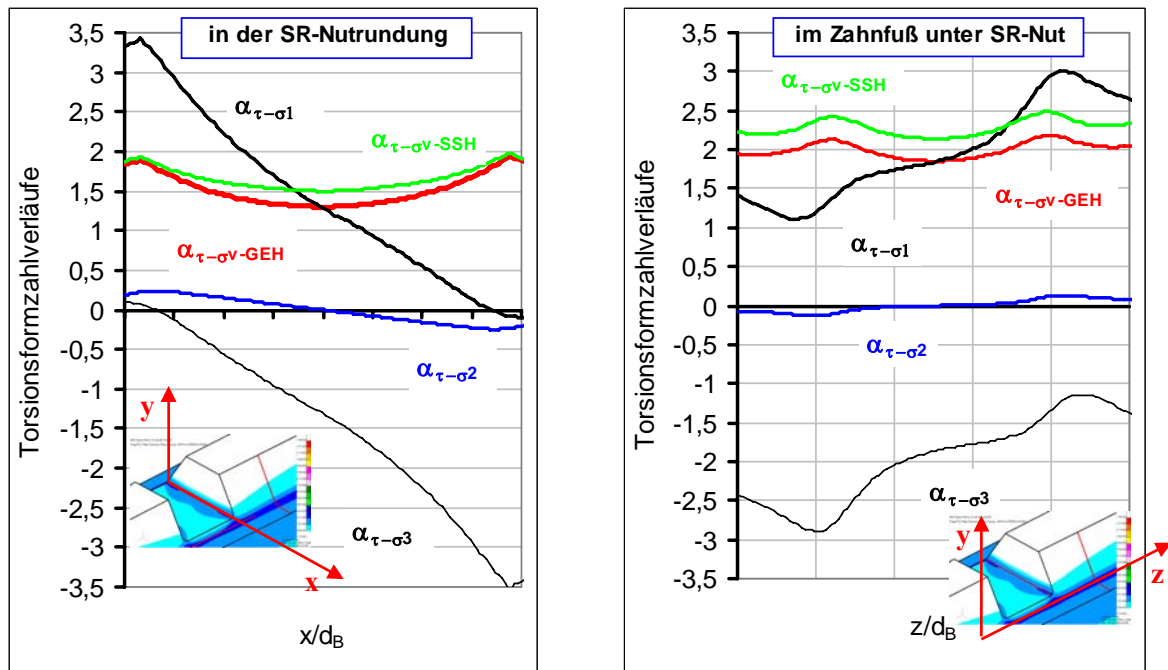


a) DIN 5480 W100x2x48 mit SR-Nut DIN 471-100x3 (Nuttiefe $t_{SRN} = 1,75 \text{ mm}$; Nutbreite $m_{SRN} = 3,15 \text{ mm}$ und Nutrundung $r_{SRN} = 0,3 \text{ mm}$); Belastungsmodell: **Flankenpressung unmittelbar neben der SR-Nut**



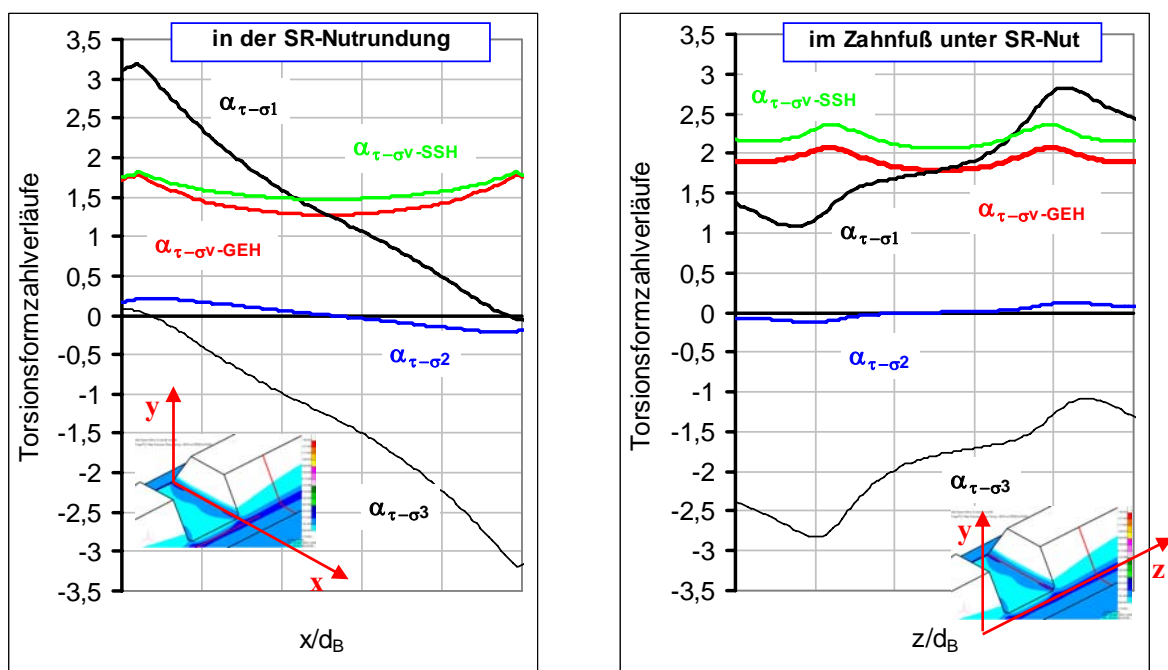
b) DIN 5480 W60x2x28 mit SR-Nut DIN 471-60x2 (Nuttiefe $t_{SRN} = 1,5 \text{ mm}$; Nutbreite $m_{SRN} = 2,15 \text{ mm}$ und Nutrundung $r_{SRN} = 0,2 \text{ mm}$); Lastmodell: **Flankenpressung in einer Entfernung von $0,6 \cdot d_B$ von der Nut**

Bild 5.20: Ermittlung der Torsionsformzahlverläufe nach der SSH, GEH und NSH in Abhängigkeit von der auf den Bezugsdurchmesser bezogenen Axialkoordinate z/d_B im Zahnfußbereich an Zahnwellen nach DIN 5480 mit Sicherungsringnuten nach DIN 471



a) Formzahlverläufe in der SR-Nuttrundung; Flankenpressung unmittelbar neben der Nut

b) Formzahlverläufe im Zahnfußbereich unter der Nut; Flankenpressung unmittelbar neben der Nut



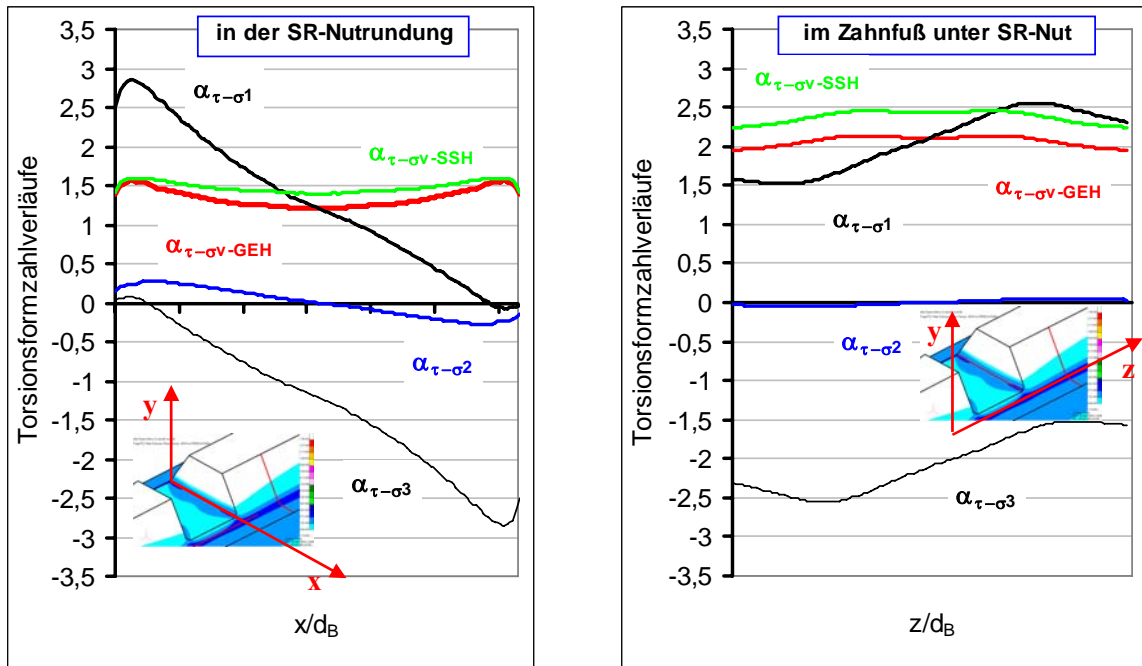
c) Formzahlverläufe in der SR-Nuttrundung; Flankenpressung entfernt von der Nut

d) Formzahlverläufe im Zahnfußbereich unter der Nut; Flankenpressung entfernt von der Nut

Bild 5.21: Torsionsformzahlverläufe nach der SSH, GEH und NSH an der Zahnwelle **W100x2x48** mit SR-Nut **DIN 471-100x3** (Nuttiefe $t_{SRN} = 1,75$ mm; Nutbreite $m_{SRN} = 3,15$ mm und Nutrundung $r_{SRN} = 0,3$ mm)

Anmerkung

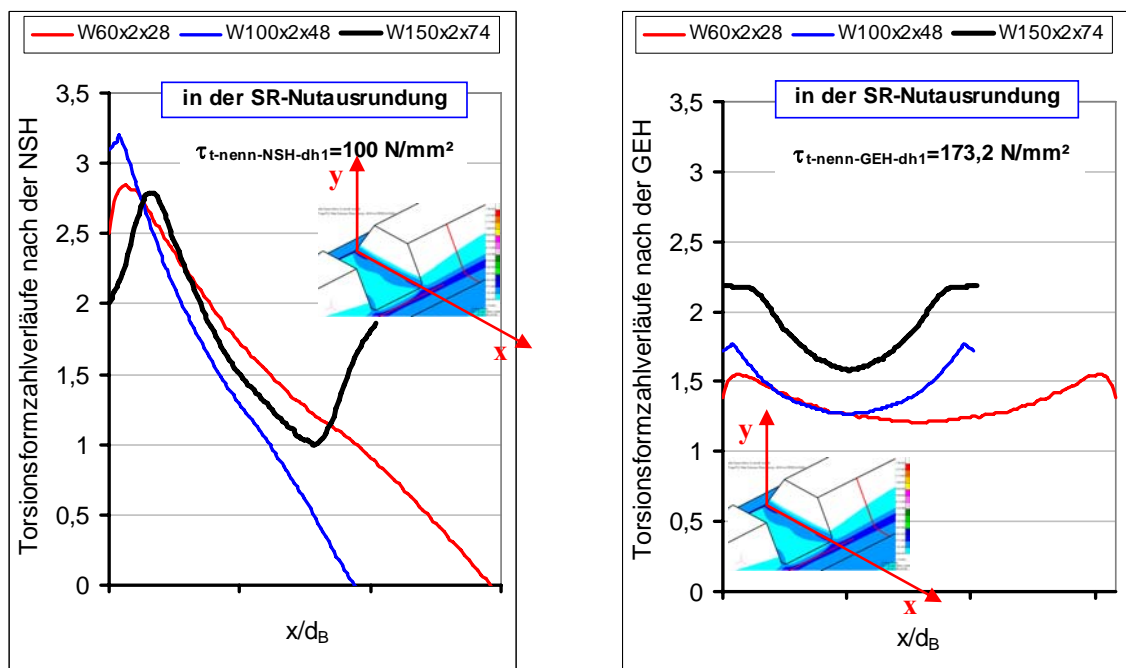
Die schematische Darstellung im *Bild 5.13* kann zur Erklärung der in *Bild 5.21* verwendeten Verhältnisse x/d_B und z/d_B (d.h. auf den Bezugsdurchmesser d_B bezogene Koordinate x bzw. z) dienen.



a) Formzahlverläufe in der SR-Nuttrundung

b) Formzahlverläufe im Zahnfuß unter der Nut

Bild 5.22: Torsionsformzahlverläufe nach der SSH, GEH und NSH an der Zahnwelle **W60x2x28** mit SR-Nut **DIN 471-60x2** (Nuttiefe $t_{SRN} = 1,5$ mm; Nutbreite $m_{SRN} = 2,15$ mm und Nutrundung $r_{SRN} = 0,2$ mm); Belastungsmodell: **Flankenpressung in einer Entfernung gleich $0,6 \cdot d_B$ von der SR-Nut**



a) Formzahlverläufe in der SR-Nut nach der NSH

b) Formzahlverläufe in der SR-Nut nach der GEH

Bild 5.23: Vergleich der prinzipiellen Torsionsformzahlverläufe in den Nutausrundungen an Zahnwellen nach **DIN 5480**; Belastungsmodell: **Flankenpressung in einer Entfernung gleich $0,6 \cdot d_B$ von der SR-Nut**

Anmerkung

Die schematische Darstellung im **Bild 5.13** kann zur Erklärung der in den **Bildern 5.22** und **5.23** verwendeten Verhältnisse x/d_B und z/d_B (d.h. auf den Bezugsdurchmesser d_B bezogene Koordinate x bzw. z) dienen.

5.3.2 Entwicklung von Näherungsgleichungen zur Formzahlberechnung

Um einen Ansatzpunkt für die Bewertung der Formzahlergebnisse insbesondere in der SR-Nut zu haben, wurden die Formzahlen aus den Näherungsgleichungen von Wellen mit vorhandener Rechtecknut nach *Heinrich /Hei84/ (Tabelle 2.11)* sowie die Formzahlen eines dazu passenden Wellenabsatzes ($r/t = r_{\text{SRN}}/t_{\text{SRN}}$ und $d/D = d_{\text{SRN}}/d_{\text{a1}}$) (**Bild 5.24**) nach den vorhandenen Gleichungen aus *DIN 743 /N3/* herangezogen und mit den mittels FEM ermittelten Formzahlen an den SR-Nuten bei Zahnwellen mit gebundenem Auslauf verglichen. Die Nut liegt vor dem Auslaufbeginn.

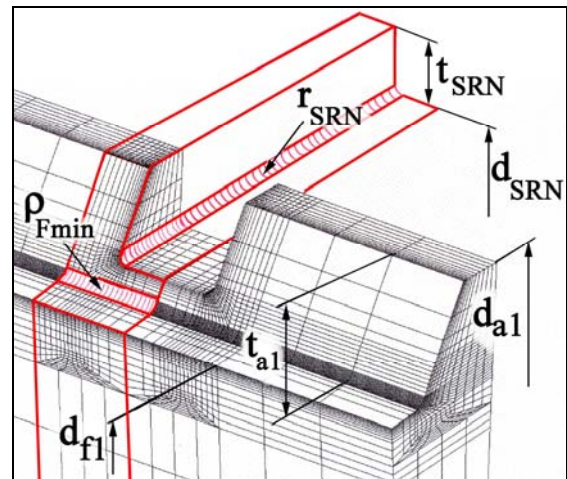


Bild 5.24: Gegenüberstellung der Geometrieparameter von Zahnwelle mit SR-Nut und Absatz

In **Tabelle 5.7** sind diese Vergleichsergebnisse je nach Belastungsart zusammengebracht. In **Bild 5.25** und **Bild 5.26** sind die Formzahlen über dem Verhältnis d_B/m gesondert dargestellt. Die Formzahlkurven für Biegung und Zug/Druck verlaufen nahezu parallel.

Tabelle 5.7: Formzahlen an Sicherungsringnuten bei Zahnwellen mit gebundenem Auslauf und ihre Vergleichsergebnisse je nach Belastungsart

Zahnwellen $d_B \times m \times x \times z$	150x2x74	100x2x48	60x2x28	40x2x18	25x2x11	15x2x6
Torsionsformzahlen	$\alpha_{\tau t\text{-NSH-dSRN}}$					
SRN_bei Zahnwellen_FEM	2,918	3,306	3,051	2,624	2,197	1,997
SRN_bei Vollwellen_Heinrich	2,605	2,567	2,712	2,683	2,443	2,322
Absatz_DIN 743	2,361	2,306	2,429	2,352	2,127	1,980
Zug/Druckformzahlen	$\alpha_{\sigma zd\text{-NSH-dSRN}}$					
SRN_bei Zahnwellen_FEM	3,680	3,812	4,372	4,360	4,262	3,973
SRN_bei Vollwellen_Heinrich	4,195	4,096	4,474	4,397	3,775	3,459
Absatz_DIN 743	3,868	3,759	4,075	3,952	3,410	3,104
Biegeformzahlen	$\alpha_{\sigma b\text{-NSH-dSRN}}$					
SRN_bei Zahnwellen_FEM	3,485	3,606	4,080	4,033	3,950	3,739
SRN_bei Vollwellen_Heinrich	3,840	3,748	4,098	4,026	3,452	3,160
Absatz_DIN 743	3,663	3,556	3,803	3,656	3,209	2,921

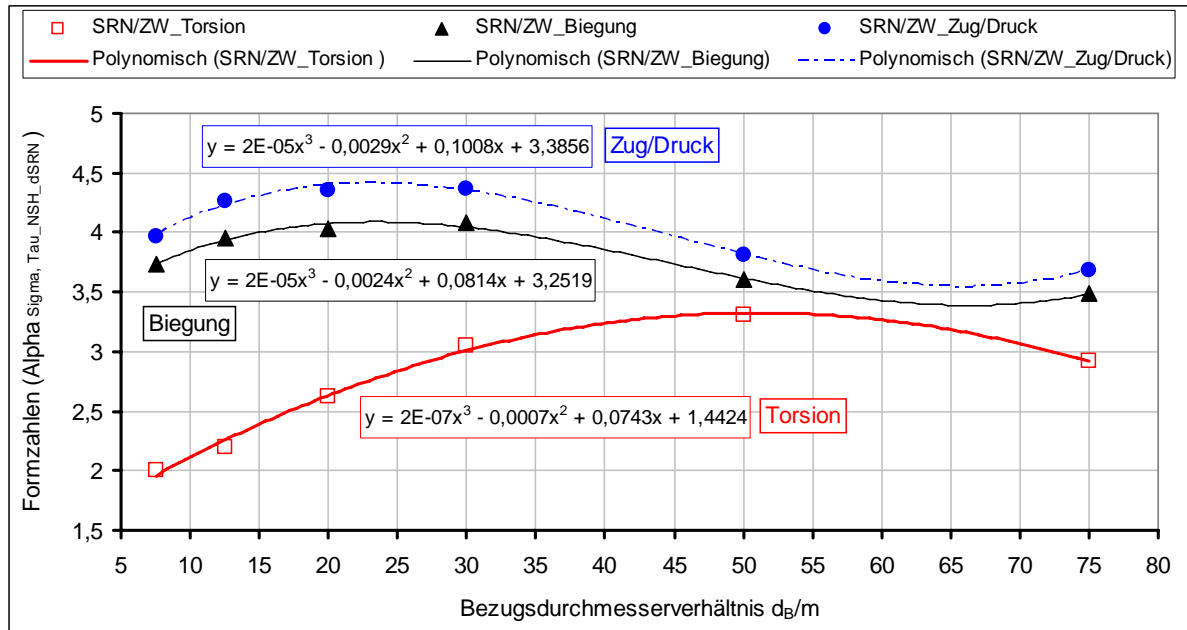
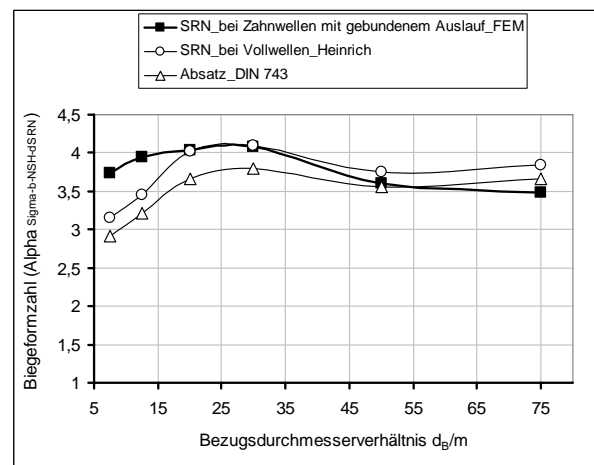
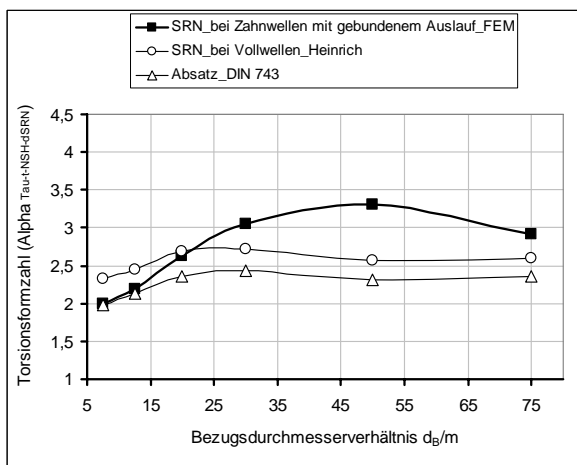


Bild 5.25: Darstellung und Verlauf der Formzahlen nach der NSH bei Torsion, Zug/Druck und Biegung an den Sicherungsringnuten für die Kerbkombination (ZW/SRN) in Abhängigkeit vom Verhältnis Bezugsdurchmesser zu Modul d_B/m



a) Torsionsformzahlen in der SR-Nut

b) Biegeformzahlen in der SR-Nut

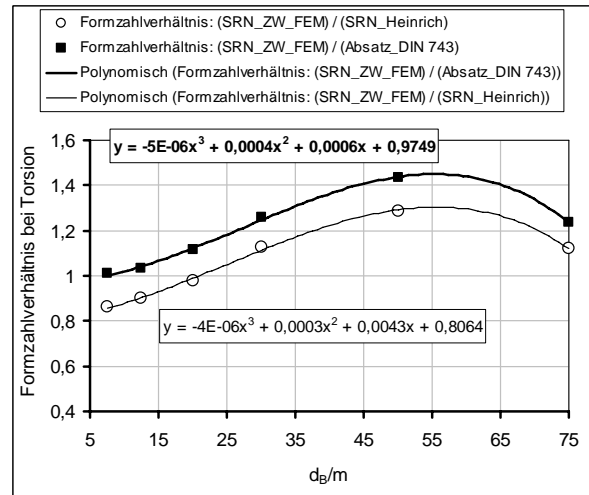
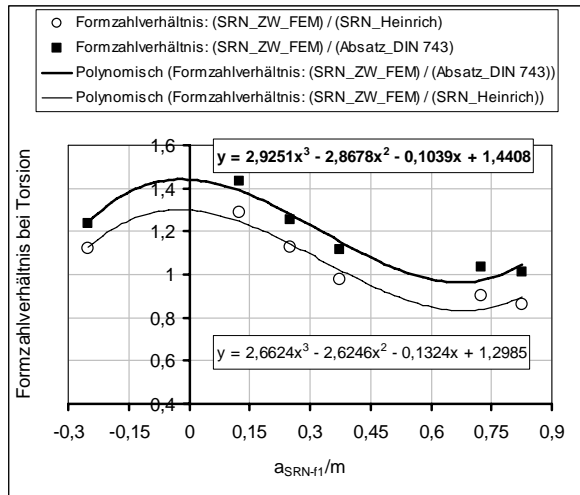
Bild 5.26: Vergleich der ermittelten Formzahlen in der SR-Nut bei Zahnwellen mit den Formzahlen für die SR-Nuten bei Vollwellen nach Heinrich /Hei84/ und für den äquivalenten Absatz nach DIN 743 /N3/

Es ist an den hier vorliegenden FE-Ergebnissen zu erkennen, dass bei fast allen untersuchten Kerbparameterkombinationen die Torsionsformzahlen von dem Kerbabstand a_{SRN-f1} zwischen dem Zahnfußkreis d_{f1} und dem SR-Nutgrundkreis d_{SRN} sowie von der Zähnezahl z abhängig sind, d.h. es besteht für die Formzahl eine Abhängigkeit, siehe Beziehungen (5.11) und (5.12).

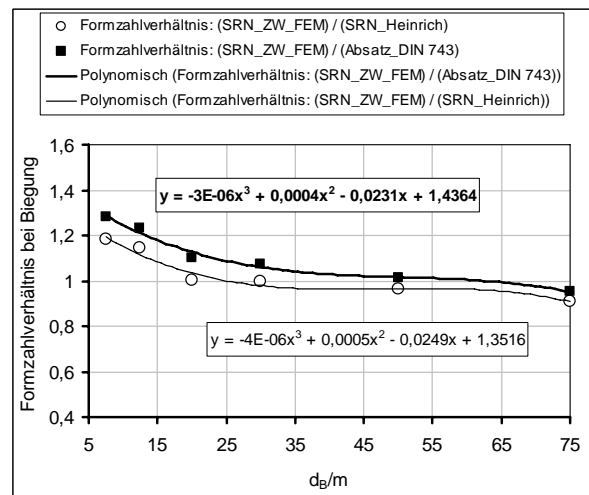
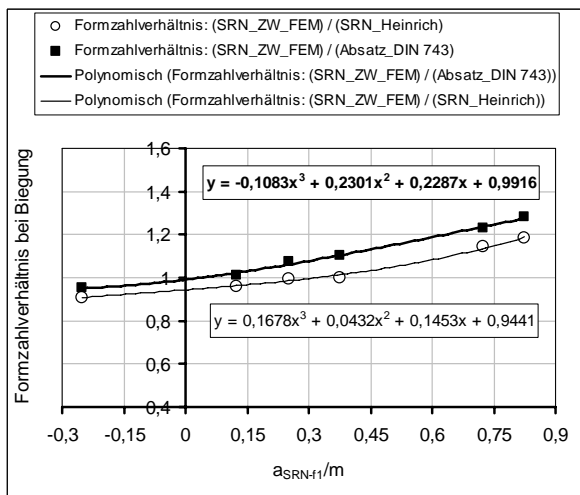
$$\alpha_{\pi-SRN} = f(z, a_{SRN-f1}) \quad (5.11)$$

$$\alpha_{SRN-f1} = \frac{|d_{SRN} - d_{f1}|}{2} \quad (5.12)$$

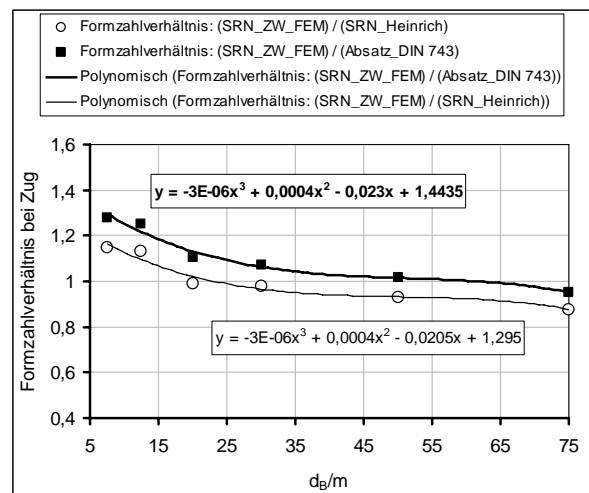
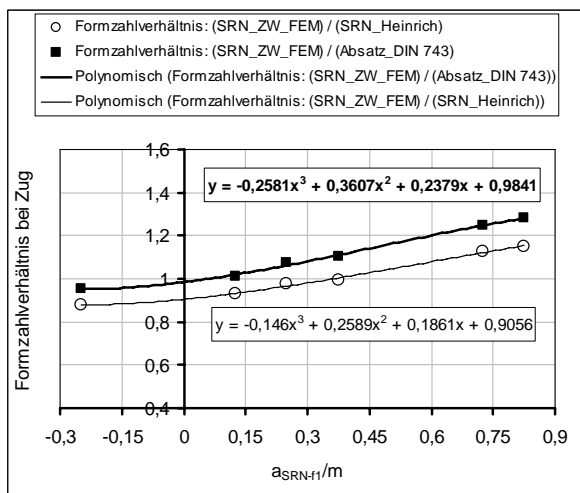
Bild 5.27 gibt zusätzlich einen Überblick über den Verlauf der Formzahlverhältnisse je nach Belastungsart $\alpha_{tt, \sigma b, zd-SRN/ZW-FEM} / \alpha_{tt, \sigma b, zd-SRN-Heinrich}$ bzw. $\alpha_{tt, \sigma b, zd-SRN/ZW-FEM} / \alpha_{tt, \sigma b, zd-Absatz-DIN 743}$ in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis a_{SRN-f1}/m bzw. d_B/m .



a) Formzahlverhältnisdarstellung bei **Torsion** über dem Verhältnis a_{SRN-fl}/m (links) bzw. d_B/m (rechts)



b) Formzahlverhältnisdarstellung bei **Biegung** über dem Verhältnis a_{SRN-fl}/m (links) bzw. d_B/m (rechts)



c) Formzahlverhältnisdarstellung bei **Zug/Druck** über dem Verhältnis a_{SRN-fl}/m (links) bzw. d_B/m (rechts)

Bild 5.27: Darstellung und Verlauf der Formzahlverhältnisse ($\alpha_{\tau,ob,zd-SRN/ZW-FEM} / \alpha_{\tau,ob,zd-SRN-Heinrich}$) und ($\alpha_{\tau,ob,zd-SRN/ZW-FEM} / \alpha_{\tau,ob,zd-Absatz-DIN 743}$) nach der NS-Hypothese an den Sicherungsringnuten in Zahnwellen mit gebundenem Auslauf über den geometrischen Verhältnissen a_{SRN-fl}/m bzw. d_B/m ; Nennspannung auf den Nutdurchmesser d_{SRN} bezogen

Die Torsionsformzahlen in der SR-Nutrundung steigen mit kleiner werdendem Kerbabstandsverhältnis $a_{\text{SRN-fl}}/m$ bzw. mit steigendem Bezugsdurchmesser Verhältnis d_B/m an. Bei Unterschreitung des SR-Nutgrundes unter den Fußkreisdurchmesser der Zahnwelle (d.h. die Nuttiefe ist größer als der Modul) neigen die Formzahlen allmählich abzunehmen.

Für die kleinen Kerbabstände $a_{\text{SRN-fl}} < m/2$ und große Verhältnisse $d_B/m > 20$ liegen die Torsionsformzahlen erwartungsgemäß etwas höher über den ermittelten Werten nach *Heinrich* sowie des dazugehörigen Absatzes. Für große Kerbabstände $a_{\text{SRN-fl}} \geq m/2$ und kleine Verhältnisse $d_B/m \leq 20$ sind sie etwas kleiner als die nach *Heinrich* berechneten (*Bild 5.26-a*). In diesem Bereich können sie mit den Formeln von *Heinrich* (*Tabelle 2.11*) berechnet werden.

Um die Störbereiche bzw. die gegenseitige Beeinflussung der Kerben (Fußradius/Nutradius) zu vermeiden und die Beanspruchung zu verringern, soll der Abstand $a_{\text{SRN-fl}}$ möglichst groß sein. Damit werden erhebliche Durchmessersprünge verhindert. Als ein Mindestwert wird der Abstand $a_{\text{SRN-fl}} \geq \pm 0,25 \cdot m$ vorgeschlagen. Er soll grundsätzlich als Überfußabstand (der Nutgrund liegt über dem Fußkreis) bzw. Unterfußabstand (der Nutgrund liegt unter dem Fußkreis) gelten.

Bei Biege- und Zug/Druckbelastung erhöhen sich die Formzahlen mit zunehmendem Verhältnis $a_{\text{SRN-fl}}/m$ bzw. mit abnehmendem Verhältnis d_B/m (*Bild 5.27*). Im Bereich $d_B/m > 20$ sind sie von der Zähnezahl sowie vom Kerbabstand $a_{\text{SRN-fl}}$ unabhängig. Hier sind die Näherungsformeln nach *Heinrich* verwendbar (*Bild 5.26-b*). Für das Verhältnis $d_B/m \leq 20$ liegen sie über den Werten nach *Heinrich*.

Auf Grund der in der Kerbspannungslehre bekannten und je nach Variante deutlich beobachteten Wirkungsmechanismen: des Steifigkeitssprunges in Kerbnähe, des dreiachsigen Spannungszustandes, der Querschnittsänderungen und der Kerbwirkungsüberlagerung durch benachbarte Kerben war die Entwicklung von neuen Näherungsgleichungen zur Bestimmung der Formzahlen für die Kerbkombination (SRN/ZW) sehr schwer zu realisieren (*Tabelle 5.8*).

Es gelten die Gleichungen **(5.13)** bzw. **(5.16)** für Torsion, **(5.14)** bzw. **(5.17)** für Biegung und **(5.15)** bzw. **(5.18)** für Axialkraft. Es konnte nachgewiesen werden, dass diese Beziehungen eine sehr hohe Ergebnisgenauigkeit der Formzahlen aufweisen, die als Basiswerte für die Ermittlung der Spannungsüberhöhung dienen.

Zur leichteren Einschätzung der Formzahlen wurde eine Vereinfachung der neu entwickelten Näherungsformeln mit Hilfe eines Faktors durchgeführt. Dieser Faktor beschreibt den Quotienten aus den Formzahlen von der SR-Nut für die Zahnwelle und Vollwelle, abhängig vom Verhältnis Nuttiefe zu Zahnhöhe (*Tabelle 5.9*).

Diese Erkenntnisse müssten auch auf weitere Zahnwellen mit SR-Nuten an der Außenkontur unter Beachtung vergleichbarer Geometrien (Kerbform, Lage der Kerbe, Kerbart, Abmessungsverhältnisse) übertragbar sein.

Tabelle 5.8: Näherungsformeln zur Formzahlbeschreibung nach der NSH je nach Belastungsart (Torsion, Biegung und Zug) in den SR-Nuten nach DIN 471 an Vollzahnwellen nach DIN 5480 in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis d_B/m bzw. a_{SRN-f1}/m

$\frac{\alpha_{\pi-SRN,ZW-d_{SRN}}}{\alpha_{\pi-SRN-Heinrich}} \approx \left[-4 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{d_B}{m} \right)^3 + 3 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{d_B}{m} \right)^2 + 4,3 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{d_B}{m} \right) + 0,81 \right]$	(5.13)
$\frac{\alpha_{\sigma b-SRN,ZW-d_{SRN}}}{\alpha_{\sigma b-SRN-Heinrich}} \approx \left[-4 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{d_B}{m} \right)^3 + 5 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{d_B}{m} \right)^2 - 0,025 \cdot \left(\frac{d_B}{m} \right) + 1,35 \right]$	(5.14)
$\frac{\alpha_{\sigma d-SRN,ZW-d_{SRN}}}{\alpha_{\sigma d-SRN-Heinrich}} \approx \left[-3 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{d_B}{m} \right)^3 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{d_B}{m} \right)^2 - 0,021 \cdot \left(\frac{d_B}{m} \right) + 1,3 \right]$	(5.15)
$\frac{\alpha_{\pi-SRN,ZW-d_{SRN}}}{\alpha_{\pi-SRN-Heinrich}} \approx \left[2,7 \cdot \left(\frac{a_{SRN-f1}}{m} \right)^3 - 2,63 \cdot \left(\frac{a_{SRN-f1}}{m} \right)^2 - 0,133 \cdot \left(\frac{a_{SRN-f1}}{m} \right) + 1,3 \right]$	(5.16)
$\frac{\alpha_{\sigma b-SRN,ZW-d_{SRN}}}{\alpha_{\sigma b-SRN-Heinrich}} \approx \left[0,17 \cdot \left(\frac{a_{SRN-f1}}{m} \right)^3 + 0,043 \cdot \left(\frac{a_{SRN-f1}}{m} \right)^2 + 0,15 \cdot \left(\frac{a_{SRN-f1}}{m} \right) + 0,95 \right]$	(5.17)
$\frac{\alpha_{\sigma d-SRN,ZW-d_{SRN}}}{\alpha_{\sigma d-SRN-Heinrich}} \approx \left[-0,15 \cdot \left(\frac{a_{SRN-f1}}{m} \right)^3 + 0,26 \cdot \left(\frac{a_{SRN-f1}}{m} \right)^2 - 0,19 \cdot \left(\frac{a_{SRN-f1}}{m} \right) + 0,91 \right]$	(5.18)

Tabelle 5.9: Ermittelte Faktoren zur leichteren Handhabung der neu entwickelten Näherungsformeln

Belastungsart	Torsion	Zug/Druck	Biegung
Formzahlverhältnis	$\frac{\alpha_{\pi-SRN,ZW-FEM}}{\alpha_{\pi-SRN-Heinrich}} \approx$	$\frac{\alpha_{\sigma d-SRN,ZW-FEM}}{\alpha_{\sigma d-SRN-Heinrich}} \approx$	$\frac{\alpha_{\sigma b-SRN,ZW-FEM}}{\alpha_{\sigma b-SRN-Heinrich}} \approx$
$t_{SRN} < m/2$	0,90	1,15	1,20
$t_{SRN} = m/2$	0,95	1,05	1,10
$3 \cdot m/4 \geq t_{SRN} > m/2$	1,15	1	1,05
$3 \cdot m/4 < t_{SRN} \leq m$	1,30	0,95	1
$5 \cdot m/4 \geq t_{SRN} > m$	1,15	0,90	0,95
$5 \cdot m/4 < t_{SRN}$	1	0,85	0,9

6 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen /FVA08/

Nachdem die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen mit dem jeweiligen Arbeitsumfang bereits dargestellt wurden, werden in diesem Kapitel die vergleichende Darstellung und die Diskussion der experimentell ermittelten Kennzahlen zur Gestaltfestigkeit von Zahnwellenverbindungen vorgenommen. Dies soll für die Verifizierung der numerischen Berechnungsergebnisse genutzt werden.

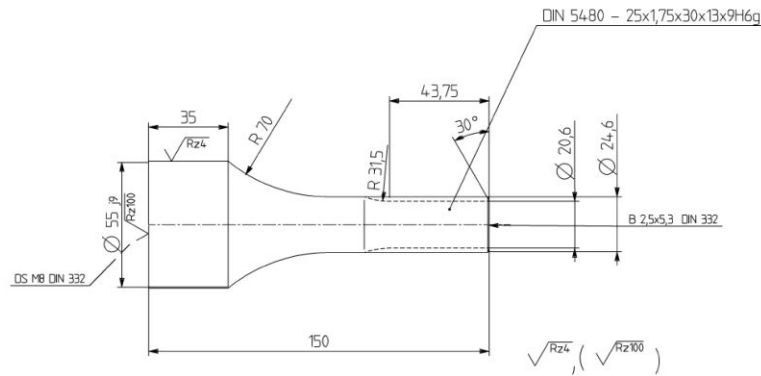
Die Experimente (dynamische Dauerfestigkeitsversuche sowie statische Untersuchungen) wurden vom Institut für Maschinenwesen (IMW) der TU Clausthal durchgeführt. Zusätzlich fanden weitere metallografische Untersuchungen statt, die zur Verbesserung des Kenntnisstands über die vorliegenden Prüfteile hinsichtlich ihrer werkstoffkundlichen und fertigungs-immanenten Eigenschaften dienen, wie z. B.: Werkstoffanalysen, Gefügebau, Zugversuche, Rauheitsmessungen, Ermittlung der Eigenspannungen sowie des Härte-Tiefe-Verlaufs im Bereich der Verzahnung. Sämtliche experimentellen Untersuchungsergebnisse sind im Abschlussbericht /FVA08/ ausführlich zusammengestellt.

6.1 Experimentelles Untersuchungsprogramm

Die Experimente an der Zahnwellen-Verbindung nach DIN 5480 -25x1,75x13x9H 6g /N1/ sind durch die zeitlich aufwändige Durchführung auf einen repräsentativen Ausschnitt der Geometrievarianten beschränkt. Sie erweitern aber auch gleichzeitig das Parameterspektrum um den Fertigungseinfluss zwischen den spanend hergestellten Wellenverzahnungen und den umformend erzeugten. Darüber hinaus werden die Versuchsreihen jeweils mit den zwei gängigen Wellenwerkstoffen 42CrMo4 und 18CrNiMo7 gefahren, siehe **Tabelle 6.1**. Das nachfolgende **Bild 6.1** zeigt die Geometrien der Prüflinge.

Tabelle 6.1: Übersicht zu den im Mittelpunkt stehenden Merkmalsvariationen für die Experimente

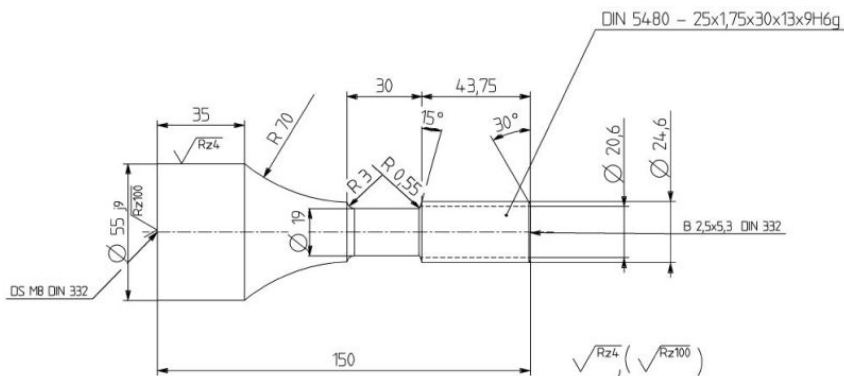
Geometrie	Zahnwellenverbindung nach DIN 5480 -25x1,75x13x9H 6g			
Auslaufform	Frei		Gebunden	
Auslaufkerbradius	$r_w = 0,55$ [mm]	$r_w = 5$ [mm]	$r_w = 31,5$ [mm]	$r_w = 31,5$ [mm]
Schwächung	ungeschwächt			mit SR-Nut
Nabenlage	<ul style="list-style-type: none"> NL0 (direkt am Auslaufbeginn) NL1 (mit Abstand vom Auslaufbeginn), nur für statische Versuche 			
Werkstoff und Wärmebehandlung	<ul style="list-style-type: none"> Vergütungsstahl 42 CrMo 4 (1.7225), vergütet Einsatzstahl 18 CrNiMo 7 (ZF1A) (1.6587), blindgehärtet 			
Fertigungsverfahren	<ul style="list-style-type: none"> Spanend (durch Schleifen) Umformend (durch Walzen nach dem GROB-Verfahren) 			
Belastungsart und zeitlicher Verlauf	<ul style="list-style-type: none"> Statische und dynamische Torsionsbelastung Statische und dynamische Biegebelastung 			
Belastungsfall	<ul style="list-style-type: none"> Schwellende Torsion, Spannungsverhältnis: $R = \sigma_u / \sigma_o = 0,2$ Wechselnde Biegung, Spannungsverhältnis: $R = \sigma_u / \sigma_o = -1$ 			



a) Geometrie der Prüflinge mit gebundenem Auslauf



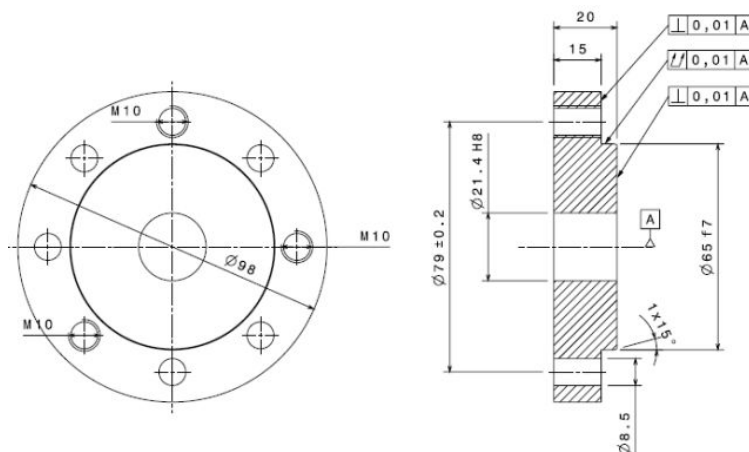
b) am Beispiel von Prüflingen mit geschliffener Verzahnung



c) Geometrie der Prüflinge mit freiem Auslauf



d) am Beispiel von Prüflingen mit geschliffener Verzahnung

e) Nabengeometrie: Nabenbreite $b = 0,8 \cdot d_B$ und Nabenaußendurchmesser Verhältnis $d_{e2}/d_B = 4$ mm (vor dem Räumen, also ohne Verzahnung)

f) Prüfling und Nabe im gefügten Zustand, oben: NL1 und unten: NL0

Bild 6.1: Probengrundgeometrien /FVA08/ der Zahnwellenverbindung nach DIN 5480 -25x1,75,13x9H 6g /N1/

Sowohl bei statischer als auch dynamischer Belastung wurden die Einflüsse der unterschiedlichen Verzahnungsherstellungsverfahren (gewalzte bzw. geschliffene Verzahnung) auf die Festigkeit der Zahnwellen betrachtet.

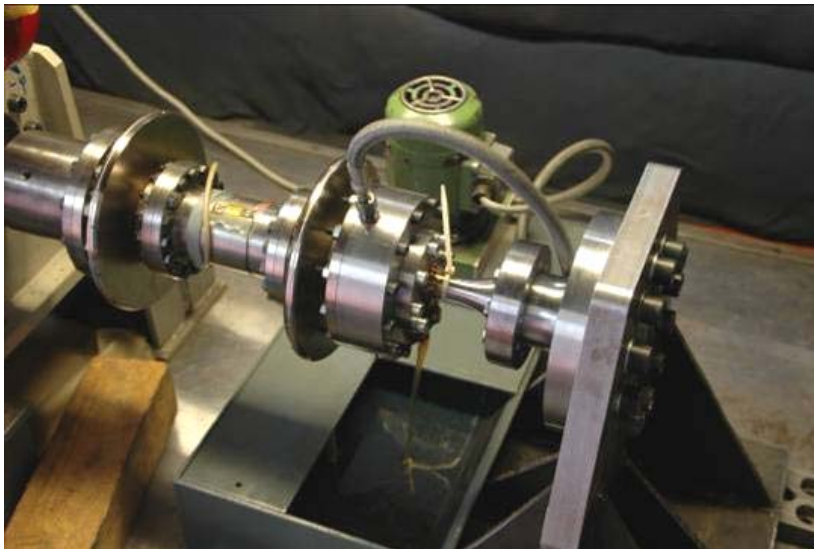
Zur Veranschaulichung des Unterschieds zwischen den verschiedenen gefertigten Verzahnungen sei auf **Bild 6.2** und **Bild 6.3** verwiesen. **Bild 6.4** zeigt die eingesetzten Prüfstände für die dynamische Versuchsdurchführung.



Bild 6.2: Prüflinge mit gebundenem Auslauf und gewalzter (links) bzw. geschliffener Verzahnung (rechts), nach /FVA08/



Bild 6.3: Prüflinge mit freiem Auslauf und gewalzter (links) bzw. geschliffener Verzahnung (rechts), nach /FVA08/



a) Servo-hydraulischer Prüfstand für dynamische Torsionsuntersuchungen unter Verwendung eines Hydroschwingers nach dem Schwenkflügelprinzip, /FVA08/



b) Prüfstand für dynamische Umlaufbiegung; rechts: Antriebsseite und links: Vorrichtung zur Querkraftaufbringung, /FVA08/

Bild 6.4: Verwendete Versuchseinrichtungen für die dynamische Untersuchungsdurchführung nach /FVA08/

6.2 Übersicht zu den Versuchsergebnissen

Dieser Abschnitt befasst sich mit den Materialkennwerten sowie mit den aus den statischen und dynamischen Untersuchungen erhaltenen Ergebnissen. Die Ergebnisse der einzelnen Untersuchungen liegen in Form von Drehmoment-Verdrehwinkel-Verläufen (aus den Untersuchungen bei statischer Torsion), Querkraft/Biegemoment-Weg-Verläufen (aus den Untersuchungen bei statischer Biegung) und Bauteil-Wöhlerlinien (aus den Untersuchungen bei dynamischer Torsion und Biegung) vor.

Im Folgenden werden die Einzeldaten der Zugversuche, der Härtemessungen sowie der statischen und dynamischen Versuche zusammengefasst. Für jeden Datensatz erfolgen eine grafische Darstellung sowie eine tabellarische Angabe.

6.2.1 Werkstoffdaten

Für die Experimente in dieser Arbeit wurden für die Zahnwellen zwei typische Werkstoffe und Wärmebehandlungen ausgewählt:

- Der Werkstoff 42CrMo4 ist ein niedrig legierter Vergütungsstahl und ist in *EN 10083-1 /N16/* mit der Werkstoffnummer 1.7225 gelistet. Alle Wellen aus diesem Werkstoff wurden vergütet. Dabei wurde die eine Hälfte der 42CrMo4-Prüflinge spanend, die andere Hälfte umformend verzahnt.
- Der Werkstoff 18CrNiMo7 ist ein Einsatzstahl und ist in *EN 10084 /N17/* mit der Werkstoffnummer 1.6587 aufgeführt. Allgemein üblich wird er in der Praxis in der Qualität ZF1A verwendet. Alle Wellen aus diesem Werkstoff wurden blindgehärtet. An den Prüflingen aus ZF1A wurden alle Verzahnungen spanend gefertigt.

Die Naben wurden sämtlich aus 42CrMo4 hergestellt. Die Fertigung der Nabenverzahnung erfolgte durch das Räumen.

Die Ermittlung der Festigkeitskennwerte (Streckgrenze σ_S und Zugfestigkeit σ_B) für diese Werkstoffe erfolgte an Zugproben B 6 x 30 nach *DIN 50125 /N18/* (Probendurchmesser von $d_0 = 6$ mm; Messlänge $L_0 = 30$ mm und Gesamtlänge $L_t = 60$ mm).

Die Zugproben wurden immer dem Kernbereich der untersuchten Prüflinge entnommen. Dort konnte eine Schädigung bzw. Änderung des Gefüges infolge der Belastung ausgeschlossen werden. Die Ergebnisse aus den Zugversuchen (**Tabelle 6.2**) sind gerundete Werte von Mittelwerten (kursiv dargestellt) aus mindestens zehn Zugproben:

Tabelle 6.2: Ergebnisse aus den statischen Zugversuchen (Mittelwerte), ermittelt mit jeweils zehn Zugproben B 6 x 30 nach *DIN 50125 /N18/*, Probendurchmesser $d_0 = 6$ mm, /FVA08/

Werkstoff, Wärmebehandlung	Streckgrenze σ_S [N/mm ²]	Zugfestigkeit σ_B [N/mm ²]	Streckgrenzen- verhältnis σ_S / σ_B	E-Modul [N/mm ²]
42CrMo4, vergütet	795 (794,7)	969 (968,8)	0,820	204700
18CrNiMo7, blindgehärtet	709 (708,8)	1024 (1024,2)	0,692	189100

Weiterhin wurden Härteprüfungen vorgenommen, um Rückschlüsse auf die Zugfestigkeiten der wärmebehandelten Wellen zu ermöglichen. Die Ergebnisse aus den Härtemessungen (Mittelwerte) nach Vickers mit anschließender Umrechnung anhand von Härteumwertungstabellen nach *E DIN 50150 /N19/* sind in **Tabelle 6.3** angegeben.

Tabelle 6.3: Ergebnisse aus den Härtemessungen nach Vickers und umgerechnete Zugfestigkeiten, /FVA08/

Werkstoff, Fertigungsverfahren, Wärmebehandlung	Vickers-Härtewert Kleinkraftbereich HV 0,5	Umgerechnete Zugfestigkeit (nach DIN 50150) [N/mm ²]
42CrMo4, geschliffen, vergütet		
vom Zahnkopf aus in rad. Richtung	304,1	980
42CrMo4, gewalzt, vergütet	gemittelt	1100
vom Zahnkopf aus in rad. Richtung	335,5	1080
vom Zahnkopf aus in rad. Richtung (II)	332,8	1075
entlang Zahnflanke	367,8	1180
in Zahnücke in axialer Richtung	343,1	1110
18CrNiMo7, geschliffen, blindgehärtet	gemittelt	1200
vom Zahnkopf aus in rad. Richtung	366,4	1180
entlang Zahnflanke	403,5	1310
in Zahnücke in axialer Richtung	342,5	1110
in Zahnücke in radialer Richtung	342,9	1110
von Zahnücke (mittig) aus in Umfangsrichtung	375,5	1205
Kern	338,0	1090

6.2.2 Auswertung statischer Versuche

Im Hinblick auf die Untersuchungsergebnisse bei statischer Belastung ist zu berücksichtigen, dass der lineare Steigungsbereich und dessen obere Grenze die wesentliche Information im Rahmen dieser Arbeit darstellen. Deswegen stehen z. B. Bruchlasten und erreichte Verdrehwinkel hier nicht im Vordergrund. In den anschließenden Abbildungen werden die Drehmoment-Verdrehwinkel-Verläufe (**Bild 6.5**) bzw. Biegemoment-Weg-Verläufe (**Bild 6.6**) einzelner bzw. mehrerer Untersuchungen aus der Gesamtheit der Ergebnisse herangezogen, um unterschiedliche Parametervariationen (Werkstoff, Fertigungsverfahren, Nablage und Auslauform) gezielt miteinander zu vergleichen.

Statische Torsion

Vergleicht man die in **Bild 6.5** dargestellten Verläufe, ergibt sich folgende Bewertung:

- Ergebnisstreuung: Die Streuung der Ergebnisse ist recht gering; bei gleichen Prüflingen ergeben sich meist sehr ähnliche Verläufe.
- Die ausgeführten Zahnwellen sowohl aus 42CrMo4 als auch aus 18CrNiMo7 zeigen einen kontinuierlichen Übergang vom elastischen zum elastisch-plastischen Werkstoffverhalten. Es werden teilweise große Verformungsgrade erreicht. So können bis zum letztendlichen (Torsions-)Bruch Verdrehwinkel von bis zu 110° erreicht werden.
- Auslauform: Die gebundene Ausführung weist gegenüber den ZWen mit freiem Auslauf eine deutlich größere Torsionssteifigkeit auf (**Bild 6.5-a**). Der Übergang in den Bereich der plastischen Verformung findet bei deutlich höheren Lasten statt. Es werden wesentlich höhere Drehmomentwerte bei gleichen Verdrehwinkeln erreicht.

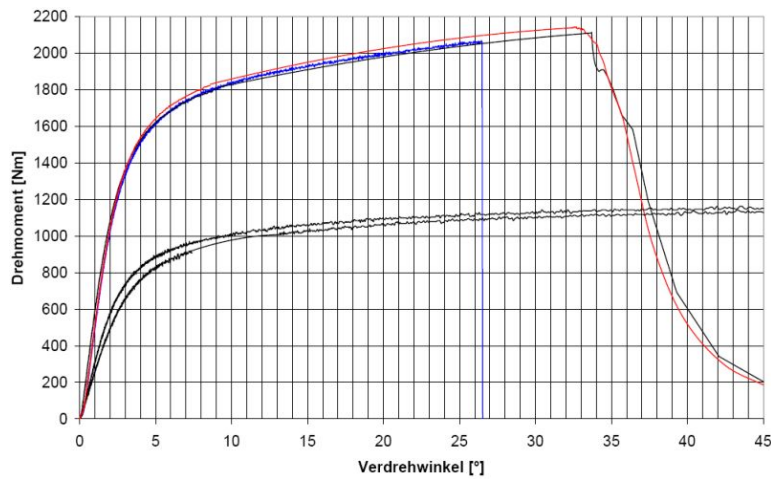
- Nabenlage: Die Nabenlage (1) führt zu einer noch weiter herabgesetzten Torsionssteifigkeit (*Bild 6.5-a*).
- Werkstoff: Die Zahnwellen aus 18CrNiMo7 erreichen, verglichen mit denen aus 42CrMo4 durchweg die höheren Drehmomente bei gleichen Verdrehwinkeln und stellen sich als die steifere Variante heraus (*Bild 6.5-b*).
- Fertigungsverfahren: Zahnwellen mit geschliffener Verzahnung erreichen höhere Drehmomentwerte bei gleichen Verdrehwinkeln auf (*Bild 6.5-b*).
- Sicherungsringnut: Im elastischen Bereich ergibt sich kaum ein nennenswerter Unterschied; erst mit einsetzender plastischer Verformung wird der Unterschied richtig sichtbar (*Bild 6.5-c*).

Statische Biegung

Aus den erhaltenen Biegemoment-Weg-Verläufen (*Bild 6.6*) ergeben sich Analogien zu den Untersuchungen bei statischer Torsionsbelastung:

- Ergebnisstreuung: Die Steigungen der Verläufe liegen zu Beginn des elastischen Bereichs recht eng beieinander. Erst mit weiter anwachsendem Weg und zunehmender plastischer Verformung trennen sie sich auf und lassen deutlicher werdende Unterschiede erkennen.
- Auslauform: Die Auslauform hat auch hier einen großen Einfluss darauf, bei welchen Lasten der Bereich der elastischen Verformung verlassen wird. Bei gleichem Material bewirkt ein freier Auslauf ein erkennbar früheres Abknicken des Verlaufs am Ende des elastischen Bereichs (*Bild 6.6-a*).
- Werkstoff: Zahnwellen aus 18CrNiMo7 erreichen gegenüber denen aus 42CrMo4 durchgehend die höheren Lastniveaus bei identischer Geometrie, siehe *Bild 6.6-a*.
- Fertigungsverfahren: Die Verläufe der ZWVen (mit freiem oder gebundenem Auslauf) mit gewalzter Wellenverzahnung sind gegenüber denen mit geschliffener jeweils etwas in Richtung geringerer Biegemomente verschoben (*Bild 6.6-b*).
- Sicherungsringnut: Das Vorhandensein der optionalen SRN sorgt für eine Schwächung der ZWV und für den etwas früheren Bruch im Vergleich zu den ZWen ohne Verschwächung (*Bild 6.6-b*).
- Nabenlage: Am Beispiel der ZWen mit gewalzter Verzahnung ist zu erkennen, dass die Verläufe der ZWVen mit NL 1 deutlich flacher liegen, verglichen mit den entsprechenden Verläufen der ZWVen mit NL 0 (*Bild 6.6-c*).

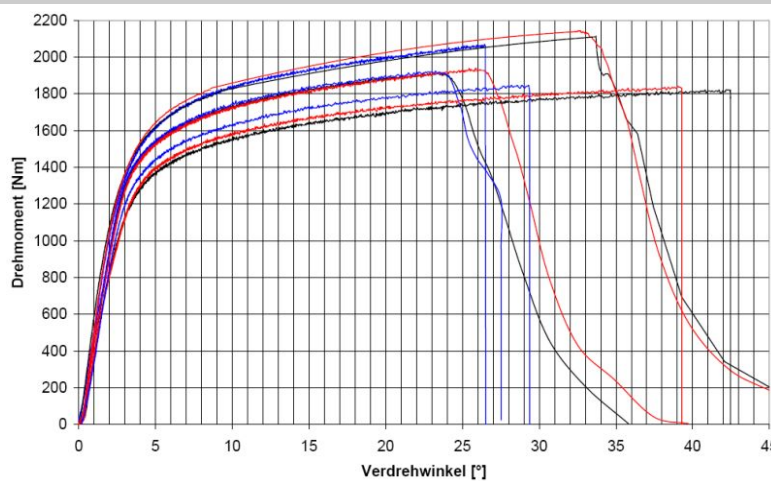
Anhand der Untersuchungsergebnisse zeigt sich, dass bei statischer Torsions- und Biegebelastung die Auslauform an den ausgeführten Prüflingen den größten Einfluss auf die Festigkeit hat, gefolgt von den kleineren Einflüssen des Werkstoffs, der Fertigungsart, der Nabenlage und der Sicherungsringnut.



a) obere drei Verläufe: ZWen mit **gebundenem** Auslauf, NL 0; untere Verläufe: ZWen mit **freiem** Auslauf ($r_w = 5 \text{ mm}$), einmal in NL 0 (oben) – einmal in NL 1 (unten).

Gemeinsame Parameter:

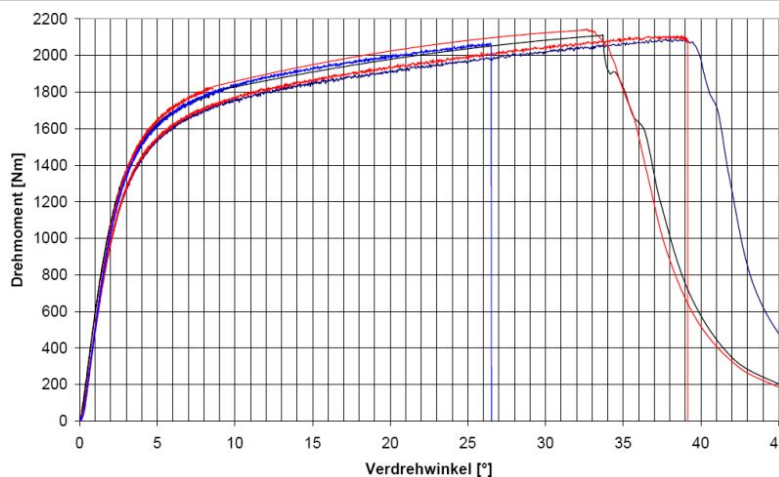
18 CrNiMo 7, geschliffene Verzahnung



b) obere drei Verläufe: ZWen aus 18 CrNiMo 7 mit **geschliffener** Verzahnung; mittlere drei Verläufe: ZWen aus 42 CrMo 4 mit **geschliffener** Verzahnung; untere drei Verläufe: ZWen aus 42 CrMo 4 mit **gewalzter** Verzahnung.

Gemeinsame Parameter:

gebundener Auslauf, NL 0



c) obere drei Verläufe: ZWen **ohne SRN**; untere drei Verläufe **mit SRN**.

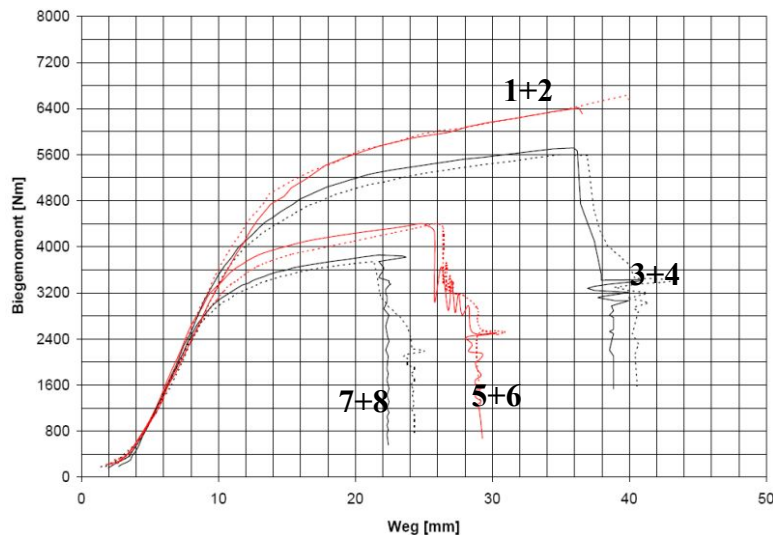
Gemeinsame Parameter:

18 CrNiMo 7, geschliffene Verzahnung, gebundener Auslauf, NL 0

Bild 6.5: Drehmoment-Verdrehwinkel-Verläufe bei statischer Torsionsbelastung nach /FVA08/ von Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480 25x1,75,25 mit freiem und gebundenem Auslauf

Anmerkung

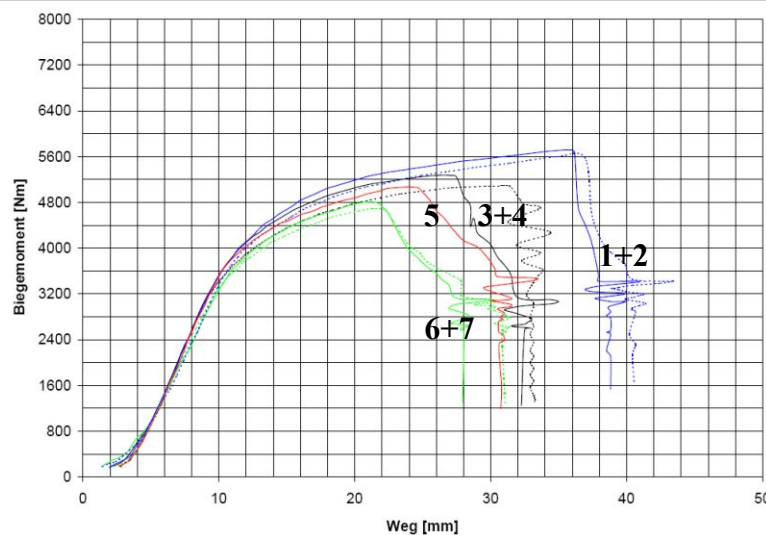
Die senkrechten Kurvenverläufe sind durch das Eingreifen der Grenzwinkelabschaltung entstanden und nicht durch etwaiges Bauteilversagen.



a) Verlauf 1+2: ZWen aus 18 CrNiMo 7 mit **gebundenem** Auslauf; 3+4: ZWen aus 42 CrMo 4 mit **gebundenem** Auslauf; 5+6: ZWen aus 18 CrNiMo 7 mit **freiem** Auslauf ($r_w = 5$ mm); 7+8: ZWen aus 42 CrMo 4 mit **freiem** Auslauf ($r_w = 5$ mm).

Gemeinsame Parameter:

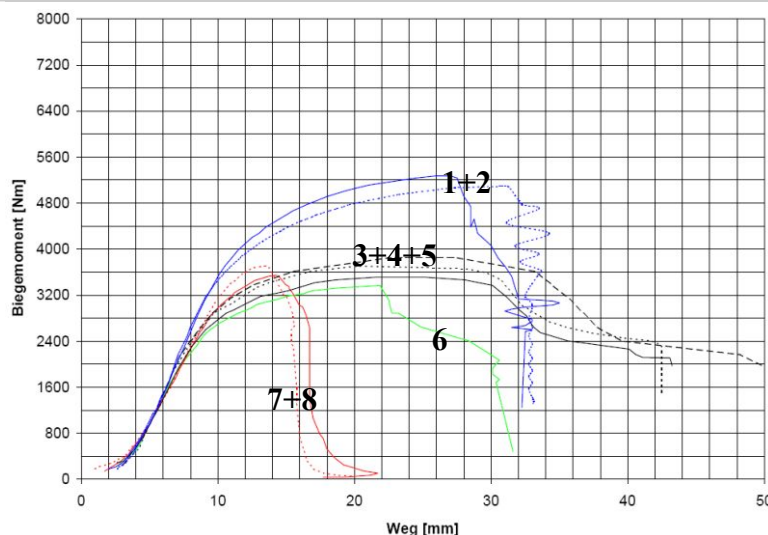
geschliffene Verzahnung, NL 0



b) Verlauf 1+2: ZWen mit **geschliffener** Verzahnung **ohne** SRN; 3+4: ZWen mit **gewalzter** Verzahnung **ohne** SRN; 5: ZW mit **geschliffener** Verzahnung **und** SRN; 6+7: ZW mit **gewalzter** Verzahnung **und** SRN.

Gemeinsame Parameter:

42 CrMo 4, gebundener Auslauf, NL 0



c) Verlauf 1+2: ZWen mit **gewalzter** Verzahnung, **gebundenem** Auslauf, NL 0; 3,4+5: ZWen mit **gewalzter** Verzahnung, **gebundenem** Auslauf, NL 1; 6: ZW mit **geschliffener** Verzahnung, **freiem** Auslauf, NL 1; 7+8: ZWen mit **geschliffener** Verzahnung, **freiem** Auslauf, NL 0.

Gemeinsame Parameter:

42 CrMo 4

Bild 6.6: Biegemoment-Weg-Verläufe bei statischer Biegebelastung nach /FVA08/ von Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480 25x1,75,25 mit freiem und gebundenem Auslauf

Bruchbilder bei statischer Belastung

Die Bruchflächen, die bei der statischen Torsionsbeanspruchung bis zum Bruch entstehen, liegen unabhängig vom Werkstoff, senkrecht zur Prüflingsachse. Prüflinge mit gebundenem Auslauf versagen grundsätzlich direkt an der Nabenkante, bei denen mit freiem Auslauf im Bereich des kleinsten Auslaufdurchmessers am Übergang zwischen der Verzahnung und dem Auslauf. **Bild 6.7** zeigt beispielhaft die Bruchflächen an zwei Prüflingen. Anhand der auf dem rechten Prüfling (*Bild 6.7-b*) erkennbaren Linie wird außerdem die große plastische Verformung bis zum letztendlichen Eintreten des Bruchs ersichtlich.



a) Prüfling aus 18CrNiMo7 mit gebundenem Auslauf und Nabenlage (0)

b) Prüfling aus 42CrMo4 mit freiem Auslauf und Nabenlage (1)

Bild 6.7: Aufgetretene Bruchflächen **bei statischer Torsionsbelastung** bis zum Bauteilversagen nach /FVA08/; gemeinsame Parameter: geschliffene Verzahnung

Die bei den statischen Biegebelastungen auftretenden Brüche an den Prüflingen mit freiem Auslauf beginnen im verzahnungsseitigen Radius. Prüflinge mit gebundenem Auslauf zeigen ein uneinheitliches Verhalten: solche aus 42CrMo4 mit geschliffener Verzahnung brechen am Übergang vom Auslauf zum Einspannungsende hin, Zahnwellen aus 42CrMo4 mit gewalzter Verzahnung brechen auf Höhe der Nabenkante und bei denen aus 18CrNiMo7 musste der Versuch abgebrochen werden, bevor ein Bruch eintrat. **Bild 6.8** zeigt exemplarisch Bruchverläufe infolge statischer Biegebelastung.



a) Prüfling mit gebundenem Auslauf und NL (0)

b) Prüfling mit freiem Auslauf und NL (0)

Bild 6.8: Aufgetretene Bruchflächen **bei statischer Biegebelastung** bis zum Bauteilversagen nach /FVA08/; gemeinsame Parameter: Werkstoff 42CrMo4, geschliffene Verzahnung, Nabenlage (0)

Die Zahlenwerte der statischen Torsions- und Biegeversuche sind in **Tabelle 6.4** (für statische Torsion) bzw. in **Tabelle 6.5** (für statische Biegung) wiedergegeben.

Die Fließ- und Bruchgrenzspannungen wurden aus den im Versuch aufgezeichneten Torsions- und Biegemomenten bezogen auf die im **Abschnitt 3.5** verwendeten Widerstandsmomente berechnet, siehe dazu *Bild 3.50* (S. 106) unter Berücksichtigung der *Tabelle 3.9* (S. 106).

Tabelle 6.4: Ertragene Nennspannungen in N/mm^2 aus den statischen Torsionsuntersuchungen, /FVA08/

Auslaufform, optionale Geometrien, Nabenlage	Bezugsdurchmesser	Werkstoff, Fertigungsverfahren	Fließgrenze ($> 0,2\%$ Dehnung)	Bruch- bzw. Anrissgrenze
	d_{nenn} [mm]		τ_{tFK} [N/mm^2]	τ_{tB} [N/mm^2]
Frei, $r_w=0,55\text{mm}$, NL1	$d_w = 19$	42CrMo4, geschliffen	475	861
Frei, $r_w=0,55\text{mm}$, NL1	$d_w = 19$	42CrMo4, geschliffen, <i>gehärtet</i>	683	1010
Frei, $r_w=0,55\text{mm}$, NL1	$d_w = 19$	42CrMo4, gewalzt	454	882
Frei, $r_w=5\text{ mm}$, NL0	$d_w = 19$	18 CrNiMo7, geschliffen	409	980
Frei, $r_w=5\text{ mm}$, NL1	$d_w = 19$	42CrMo4, geschliffen	483	891
Frei, $r_w=5\text{ mm}$, NL1	$d_w = 19$	42CrMo4, gewalzt	475	869
Frei, $r_w=5\text{ mm}$, NL1	$d_w = 19$	18 CrNiMo7, geschliffen	394	965
Gebunden, NL0	$d_{h1} = 22,05$	42CrMo4, geschliffen	571	911
Gebunden, NL0	$d_{h1} = 22,05$	42CrMo4, gewalzt	561	903
Gebunden, NL0	$d_{h1} = 22,05$	18 CrNiMo7, geschliffen	486	1012
Gebunden, NL1	$d_{h1} = 22,05$	42CrMo4, geschliffen	399	865
Gebunden, NL1	$d_{h1} = 22,05$	42CrMo4, gewalzt	511	926
Gebunden, SRN, NL0	$d_{\text{SRN}} = 23,1$	42CrMo4, geschliffen	468	727
Gebunden, SRN, NL0	$d_{\text{SRN}} = 23,1$	42CrMo4, gewalzt	477	762
Gebunden, SRN, NL0	$d_{\text{SRN}} = 23,1$	18 CrNiMo7, geschliffen	417	872

Tabelle 6.5: Ertragene Nennspannungen in N/mm^2 aus den statischen Biegeversuchen, nach /FVA08/

Auslaufform, optionale Geometrien, Nabenlage	Bezugsdurchmesser	Werkstoff, Fertigungsverfahren	Fließgrenze ($> 0,2\%$ Dehnung)
	d_{nenn} [mm]		σ_{bFK} [N/mm^2]
Frei, $r_w=0,55\text{ mm}$, NL0	$d_w = 19$	42CrMo4, geschliffen	940
Frei, $r_w=5\text{ mm}$, NL0	$d_w = 19$	42CrMo4, geschliffen	910
Gebunden, NL0	$d_{h1} = 22,05$	42CrMo4, geschliffen	890
Gebunden, NL0	$d_{h1} = 22,05$	42CrMo4, gewalzt	850
Gebunden, SRN, NL0	$d_{\text{SRN}} = 23,1$	42CrMo4, geschliffen	960
Gebunden, SRN, NL0	$d_{\text{SRN}} = 23,1$	42CrMo4, gewalzt	850

6.2.3 Auswertung dynamischer Versuche (Ermüdungsversuche)

Für die Ermüdungsversuchsdurchführung wurden 12 Prüflinge pro Wöhlerlinie verwendet. Die durchgeführten dynamischen Torsionsuntersuchungen wurden mit rein schwellender Belastung gefahren. Das Spannungsverhältnis $R = \sigma_u / \sigma_o$ wurde mit 0,2 konstant gehalten. Die Umlaufbiegeuntersuchungen erfolgten unter wechselnder Beanspruchung. Das Spannungsverhältnis betrug hier jeweils $R = -1$.

Die graphische Wiedergabe der Untersuchungsergebnisse findet in doppelt-logarithmischen Diagrammen statt. Auf der Abszisse wird die erreichte Bruchschwingspielzahl abgetragen; bzw. bei Durchläufern, die ohne Bruch $N = 1 \cdot 10^7$ oder mehr Schwingspiele erreichen, die entsprechende Schwingspielzahl, markiert mit einem waagerechten Pfeil. Auf der Ordinate ist die jeweils betrachtete Last (Drehmoment bzw. Biegemoment) aufgetragen.

Die nachfolgenden Bilder enthalten Wöhler-Kurven der durchgeführten Ermüdungsversuche in Abhängigkeit von der Kerbform, vom Fertigungsverfahren und vom Werkstoff. Die Untersuchungsergebnisse (die Wöhlerlinien) sind in **Bild 6.9** bei dynamischer Torsionsbelastung bzw. in **Bild 6.10** bei dynamischer Umlaufbiegung wiedergegeben.

Die Steigungen k der Zeitfestigkeitsgeraden sind jeweils aufgeführt. Das Bestimmtheitsmaß R^2 für die Geraden ist auch genannt (**Tabellen 6.7** und **6.8**). Hierbei ist zu beachten, dass bei steigenden Zahlenwerten für k die zugehörigen Zeitfestigkeitsgeraden flacher verlaufen.

Als Fazit dieser dynamischen Untersuchungen können folgende grundsätzliche Ergebnisse festgehalten werden:

Dynamische Torsion

- Die Streuung fällt bei den Ergebnissen insgesamt gering bis klein aus.
- Erwiesen sich die Prüflinge aus 18CrNiMo7 mit geschliffener Verzahnung bei den statischen Torsionsuntersuchungen gegenüber den anderen ZW-Varianten im Hinblick auf die erreichten Lasten noch als überlegen, ändert sich das Bild wenn man ihre Untersuchungsergebnisse bei dynamischer Torsionsbelastung vergleicht, siehe *Bild 6.9-a*.
- Aus *Bild 6.9-a* geht hervor, dass die ZWen aus 42CrMo4 mit gewalzter Verzahnung bei etwa gleichen Bruch-Schwingspielzahlen wesentlich höhere Lasten ertragen als die ZWen aus 42CrMo4 oder 18CrNiMo7 mit geschliffener Verzahnung.
- Das *Bild 6.9-b* veranschaulicht die Auswirkungen der Auslauform und der SR-Nut. Es werden die unterschiedlichen Ausführungen von ZWen aus dem gleichen Werkstoff mit geschliffener Verzahnung bei Nabennlage (0) miteinander verglichen. Es zeigt sich, dass die ZWen mit freiem Auslauf jeweils den gebundenen unterlegen sind. Auch lässt sich die Verschwächung durch die optional enthaltene SRN hier gut abschätzen: sie hat kaum Einfluss auf die Zeitfestigkeit bei einer dynamischen Torsion der ausgeführten Zahnwellen.

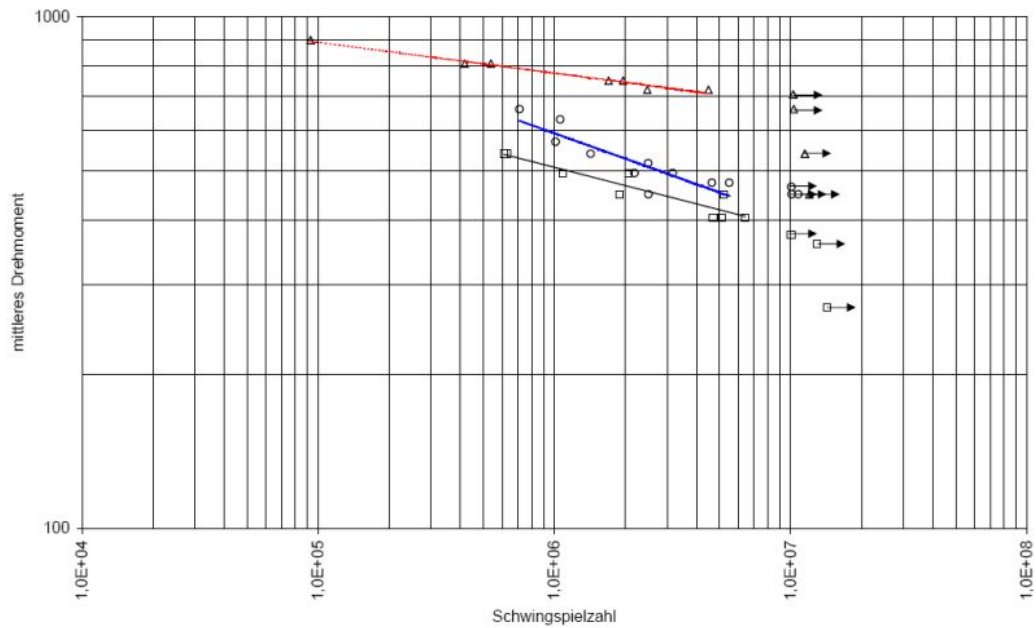
Dynamische Biegung

- Die Streuung bei den Ergebnissen der Umlaufbiegung ist größer als bei Torsion. Es traten hier vereinzelt Durchläufer bei Lastniveaus auf, auf denen mit einem Bruch im Zeitfestigkeitsbereich zu rechnen war. In *Bild 6.10-b* ist z.B. solch ein Durchläufer aufgeführt (der eine der beiden am höchsten liegenden Durchläufer gehört zu einer 42CrMo4-Zahnwelle).
- Bei den dynamischen Umlaufbiegeuntersuchungen ergibt sich, im Vergleich mit denen bei dynamischer Torsion ein geändertes Bild. Hier sind die Zahnwellen mit freiem Auslauf denen mit gebundenem Auslauf insbesondere im Dauerfestigkeitsbereich überlegen (*Bild 6.10-a*). Zu größeren Lasten bzw. zu kleineren Schwingspielzahlen nähern sich die Zeitfestigkeitsgeraden allerdings an.
- Wie bei der dynamischen Torsion zeigt sich bei der dynamischen Biegung ebenfalls ein geringfügig verschwächender Einfluss der SRN auf die Zahnwellen. So liegt die zugehörige Wöhlerlinie in *Bild 6.10-a* für die Verbindungen aus 18CrNiMo7 knapp unterhalb derer ohne SRN.
- Das *Bild 6.10-b* zeigt den Werkstoffeinfluss auf ZWVen mit geschliffener Wellenverzahnung. Insbesondere zu höheren Schwingspielzahlen hin ertragen die Zahnwellen aus 18CrNiMo7 erheblich größere umlaufende Querkkräfte, verglichen mit denen aus 42CrMo4. Zu höheren Lasten hin ist auch hier wieder eine Annäherung der beiden Linien zuerkennen.

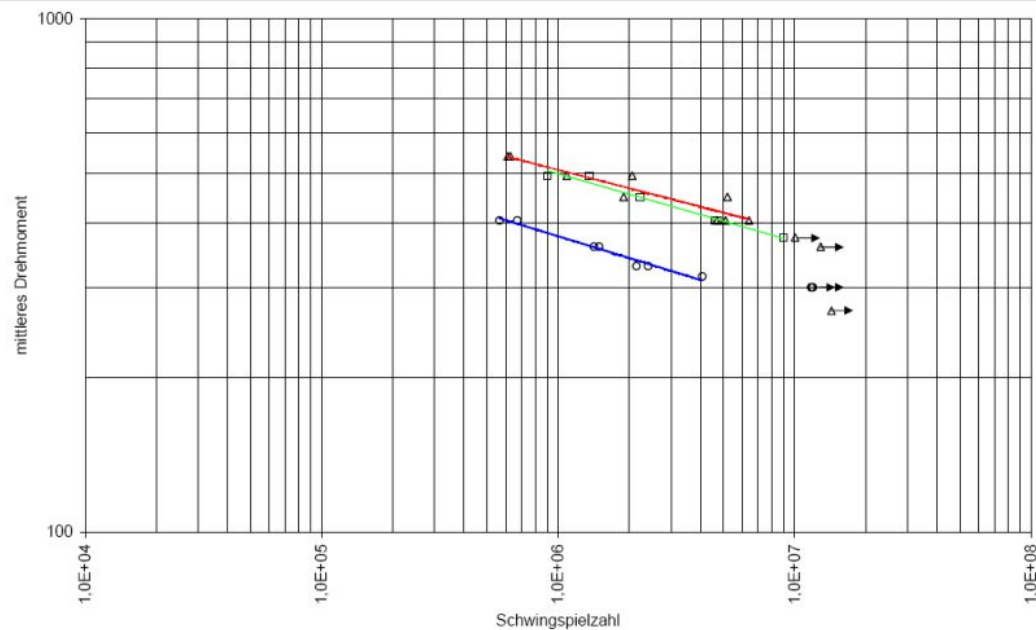
Die Zahlenwerte der Ermüdungsversuche bei dynamischer Torsion und Umlaufbiegung sind in **Tabelle 6.6** aufgelistet:

Tabelle 6.6: Ertragene Nennspannungen in N/mm² aus den dynamischen Untersuchungen (dynamische Biegung und Torsion, $5 \cdot 10^6 \leq N_D \leq 10^7$), 18CrNiMo7 (blindgehärtet) und 42CrMo4 (vergütet), /FVA08/

Auslauform, optionale Geometrien, Nabenlage	d _{nenn} [mm]	Werkstoff, Fertigungsverfahren	Biegung		Torsion	
			σ_{mv}	σ_{bADK}	τ_{mv}	τ_{tADK}
			[N/mm ²]		[N/mm ²]	
Frei, r _w =0,55 mm, NL0	d _w = 19	42CrMo4, geschliffen	0	185	167	111
Frei, r _w =0,55 mm, NL0	d _w = 19	42CrMo4, gewalzt	- -	- -	316	210
Frei, r _w =5 mm, NL0	d _{hl} = 22,05	42CrMo4, geschliffen	0	176	143	95
Frei, r _w =5 mm, NL0	d _{hl} = 22,05	42CrMo4, gewalzt	- -	- -	219	146
Frei, r _w =5 mm, NL0	d _{hl} = 22,05	18CrNiMo7, geschliffen	0	219	192	128
Gebunden, NL0	d _{hl} = 22,05	42CrMo4, geschliffen	- -	- -	185	124
Gebunden, NL0	d _{hl} = 22,05	42CrMo4, gewalzt	- -	- -	325	217
Gebunden, NL0	d _{hl} = 22,05	18CrNiMo7, geschliffen	0	148	214	143
Gebunden, SRN, NL0	d _{SRN} = 23,1	42CrMo4, geschliffen	- -	- -	153	102
Gebunden, SRN, NL0	d _{SRN} = 23,1	42CrMo4, gewalzt	- -	- -	267	178
Gebunden, SRN, NL0	d _{SRN} = 23,1	18CrNiMo7, geschliffen	0	128	174	116



a) Δ : ZW aus 42CrMo4 mit gewalzter Verzahnung; O: ZW aus 18CrNiMo7 mit geschliffener Verzahnung; \square : ZW aus 42CrMo4 mit geschliffener Verzahnung. Gemeinsame Parameter: gebundener Auslauf, NL 0

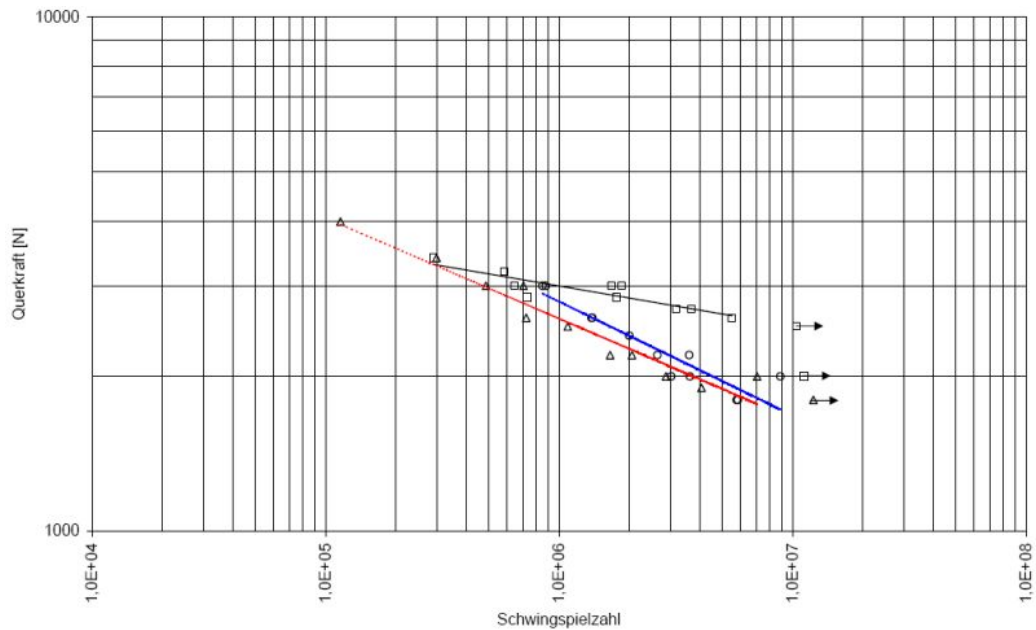


b) Δ : ZW mit gebundenem Auslauf ohne SRN; \square : ZW mit gebundenem Auslauf und SRN; O: ZW mit freiem Auslauf ($r_w = 5$ mm). Gemeinsame Parameter: 42CrMo4, geschliffene Verzahnung, NL 0

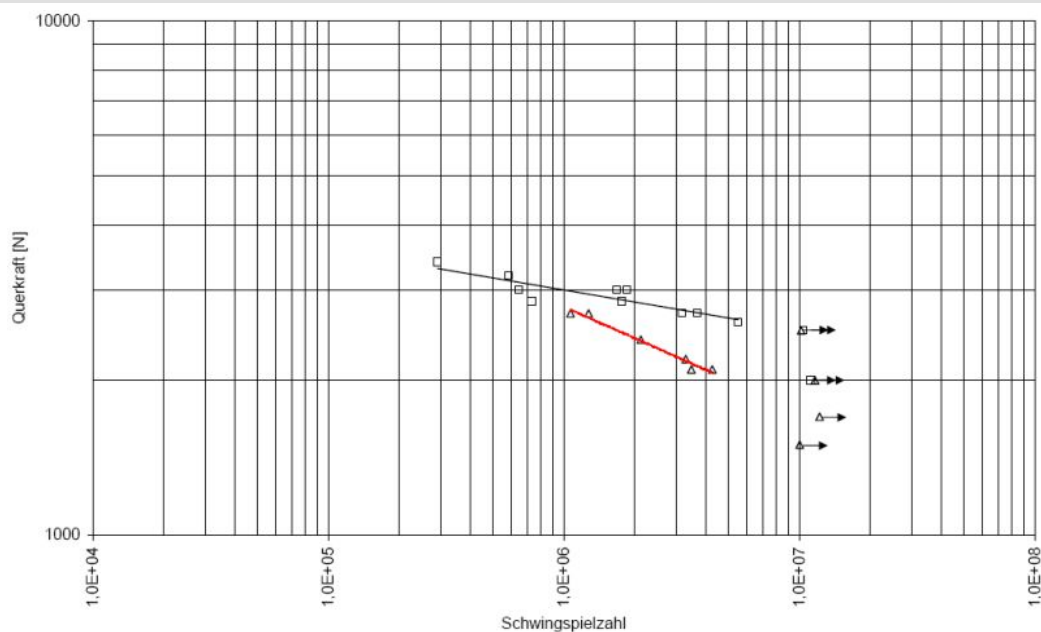
Bild 6.9: Erreichte Schwingspielzahlen und Zeitfestigkeitsgeraden der Prüflinge bei dynamischer Torsion, nach /FVA08/

Tabelle 6.7: Steigungen k der Festigkeitsgeraden und Bestimmtheitsmaße R^2 bei dynamischer Torsion, /FVA08/

in Bild 6.9-a:		in Bild 6.9-b:	
Δ : $k = 16,4$	$R^2 = 0,99$	Δ : $k = 7,3$	$R^2 = 0,87$
O: $k = 5,9$	$R^2 = 0,87$	\square : $k = 7,4$	$R^2 = 0,98$
\square : $k = 7,3$	$R^2 = 0,87$	O: $k = 6,9$	$R^2 = 0,97$



a) □: ZW mit **freiem** Auslauf; O: ZW mit **gebundenem** Auslauf; Δ: ZW mit **gebundenem** Auslauf und mit SRN. Gemeinsame Parameter: 18CrNiMo7, geschliffene Verzahnung, NL 0



b) □: ZW aus **18CrNiMo7**; Δ: ZW aus **42CrMo4**. Gemeinsame Parameter: geschliffene Verzahnung, freier Auslauf ($r_w = 5 \text{ mm}$), NL 0

Bild 6.10: Erreichte Schwingspielzahlen und Zeitfestigkeitsgeraden der Prüflinge bei dynamischer Biegung, nach /FVA08/

Tabelle 6.8: Steigungen k der Festigkeitsgeraden und Bestimmtheitsmaße R^2 bei dynamischer Biegung, /FVA08/

in Bild 6.10-a:		in Bild 6.10-b:	
□: $k = 10,2$	$R^2 = 0,79$	□: $k = 10,2$	$R^2 = 0,79$
O: $k = 4,0$	$R^2 = 0,88$	Δ: $k = 0,8$	$R^2 = 0,98$
Δ: $k = 4,8$	$R^2 = 0,94$	---	---

Bruchbilder bei dynamischer Belastung

Die bei dynamischer Torsionsbelastung auftretenden Brüche beginnen bei Prüflingen mit gebundenem oder mit freiem Auslauf auf Höhe der Nabenkante (Nabenlage „0“) und setzen sich dann größtenteils in einem Winkel von 45° gegenüber der Prüflingsachse in Richtung des großen Prüflingsdurchmessers fort, siehe **Bild 6.11**.

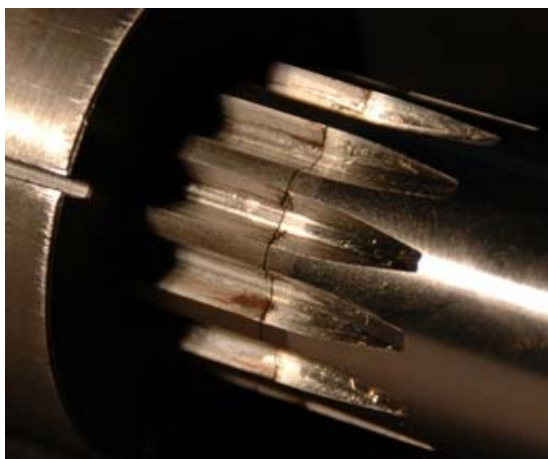


a) Prüfling mit gebundenem Auslauf und NL 0

b) Prüfling mit freiem Auslauf und NL 0

Bild 6.11: Aufgetretene Bruchflächen bei dynamischer Torsionsbelastung für Prüflinge aus 42CrMo4 mit geschliffener Verzahnung, nach /FVA08/

Die zugehörigen Bruchflächen bei dynamischer Biegebelastung liegen größtenteils quer zur Prüflingsachse (**Bild 6.12**). Bei Prüflingen mit gebundenem Auslauf beginnen sie direkt an der Nabenkante wie es auch an der Zahnwelle in **Bild 6.12-a** zu erkennen ist; der Anriss lag direkt unter der Kante der (hier verschobenen) Zahnnahe und geht komplett durch die gezeigten Zähne. Auch bei ZWen mit freiem Auslauf beginnt der Anriss im Normalfall an der Nabenkante, siehe dazu **Bild 6.12-b**. Bei letzteren tritt aber auch vereinzelt ein Bruch im Auslauf und zwar direkt hinter dem Ende des verzahnungsseitigen Radius auf.



a) angebrochene Zahnwelle mit gebundenem Auslauf

b) angebrochene Zahnwelle mit freiem Auslauf

Bild 6.12: Aufgetretene Bruchflächen bei dynamischer Biegebelastung für die Nabenlage (0), nach /FVA08/

6.3 Ermittlung der experimentellen Kerbwirkungszahlen

Die Kerbwirkungszahlen sind wie folgt definiert, siehe dazu **Abschnitt 2.4.5**:

$$\beta_{\sigma,\tau} = \frac{\text{Wechselfestigkeit der glatten polierten Probe}}{\text{Wechselfestigkeit der gekerbten Probe}} \quad (6.1)$$

Die Wechselfestigkeitswerte der glatten Probe können basierend auf den in den statischen Zugversuchen ermittelten Bruchfestigkeiten (*Tabelle 6.2*) wie folgt bestimmt werden:

$$\tau_{tW} = 0,3 \cdot \sigma_B \cdot K_2(d) \quad (6.2) \quad \sigma_{bW} = 0,5 \cdot \sigma_B \cdot K_2(d) \quad (6.3)$$

Die Faktoren 0,3 und 0,5 gelten für kleine Durchmesser ($d = 7,5 \text{ mm}$). $K_2(d)$ berücksichtigt, dass sich mit steigendem Durchmesser der Spannungsgradient und damit auch die Stützwirkung verringern. Der geometrische Größeneinflussfaktor $K_2(d)$ bei Biegung und Torsion wurde in Anlehnung an die *DIN 743 /N3/* mit folgender Gleichung für $d < 150 \text{ mm}$ berechnet:

$$K_2(d) = 1 - 0,2 \cdot \frac{\lg(d/7,5 \text{ mm})}{\lg 20} \quad (6.4)$$

Die sich daraus ergebenden Festigkeitswerte sind in **Tabelle 6.9** angegeben.

Tabelle 6.9: Wechselfestigkeitswerte in N/mm^2 der glatten Proben; $K_2(19)=0,938$; $K_2(22,05)=0,928$; $K_2(23,1)=0,925$

Werkstoff	$R_m=\sigma_B$ [N/mm ²]	$\tau_{tW 19}$ [N/mm ²]	$\tau_{tW 22,05}$ [N/mm ²]	$\tau_{tW 23,1}$ [N/mm ²]	$\sigma_{bW 19}$ [N/mm ²]	$\sigma_{bW 22,05}$ [N/mm ²]	$\sigma_{bW 23,1}$ [N/mm ²]
42CrMo4, Kernzugprobe	969	273	270	269	454	450	448
18CrNiMo7, Kernzugprobe	1024	288	285	284	480	475	474
42CrMo4, gewalzt, HV	1100	310	306	305	516	510	509
18CrNiMo7, geschliffen, HV	1200	338	334	333	563	557	555

Ausgehend von den in den Versuchen ermittelten Ausschlagdauerfestigkeitswerten (*Tabelle 6.6*) lagen der Ermittlung der Kerbwirkungszahlen folgende Gleichungen zu Grunde:

Torsion:

$$\tau_{tWK} = \frac{1}{2} (\tau_{tADK} + 2 \cdot \sigma_B - \tau_{tmv}) - \sqrt{\frac{1}{4} (\tau_{tADK} + 2 \cdot \sigma_B - \tau_{tmv})^2 - 2 \cdot \tau_{tADK} \cdot \sigma_B} \quad (6.5)$$

$$\beta_\tau(d_B) = \frac{\tau_{tW}}{\tau_{tWK}} \quad (\text{Einfl. von } K_{F\tau} \text{ vernachlässigt})$$

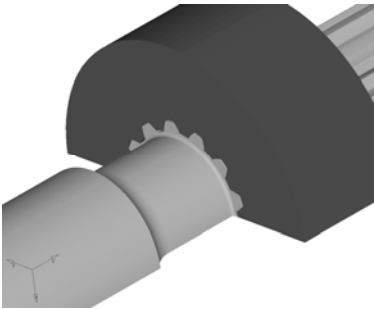
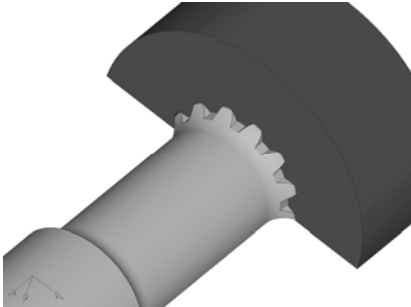
Biegung:

$$\sigma_{bWK} = \frac{1}{2} (\sigma_{bADK} + 2 \cdot \sigma_B - \sigma_{mv}) - \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_{bADK} + 2 \cdot \sigma_B - \sigma_{mv})^2 - 2 \cdot \sigma_{bADK} \cdot \sigma_B} \quad (6.6)$$

$$\beta_\sigma(d_B) = \frac{\sigma_{bW}}{\sigma_{bWK}} \quad (\text{Einfl. von } K_{F\sigma} \text{ vernachlässigt})$$

In den **Tabellen 6.10** und **6.11** ist eine Gegenüberstellung zwischen den numerisch berechneten Form- und Kerbwirkungszahlen und den experimentellen Kerbwirkungszahlen enthalten.

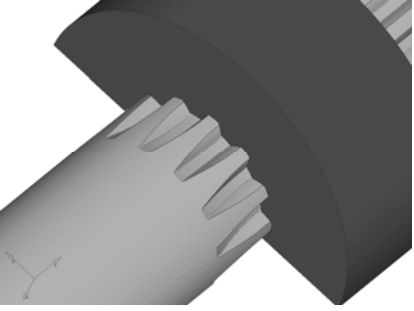
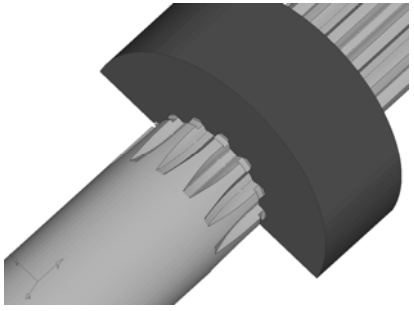
Tabelle 6.10: Vergleich zwischen den mit der FEM ermittelten Form- und Kerbwirkungszahlen und den experimentellen Kerbwirkungszahlen bei Torsion und Biegung für die Zahnwellenverbindung **DIN 5480 -25x1,75x13** (geschliffene Verzahnung) mit freiem Auslauf und Nabenlage (0)

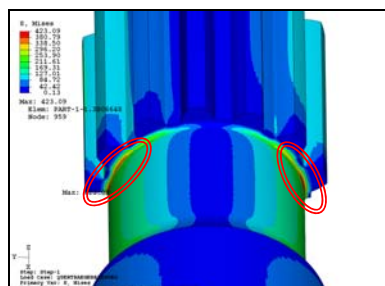
Probenform	α_k -numerisch bzw. β_k -numerisch	β_k -experimentell
 <p>ZWV nach DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf und Nabenlage (0) Auslauf-Kerbradius: $r_w = 0,55 \text{ mm}$ Fußrundungsverhältnis: $\rho_{fmin}/m = 0,16$ Wellendurchmesser: $d_w = 19 \text{ mm}$ Kopfkreisdurchmesser: $d_{a1} = 24,65 \text{ mm}$ $b = 0,6 \cdot d_B$ und $d_{e2}/d_B = 2$</p>	Nenndurchmesser $d_w = 19 \text{ mm}$	
	<p>1) ohne Nabe: $\alpha_{\sigma b_Auslauf_dw} = 2,55$ $\alpha_{\tau t_Auslauf_dw} = 2,10$ $\alpha_{\tau t_Zahnfuß_dw} = 2,24$</p> <p>2) mit Nabe (NL0): $\alpha_{\sigma b_Auslauf_dw} = 2,74$ $(\beta_{\sigma b_Auslauf_dw} = 2,55)$ $\alpha_{\tau t_Auslauf_dw} = 2,45$ $(\beta_{\tau t_Auslauf_dw} = 2,31)$ $\alpha_{\tau t_Zahnfuß_dw} = 2,67$ $(\beta_{\tau t_Zahnfuß_dw} = 2,30)$</p>	<p>42CrMo4, vergütet</p> <p>Biegung: $\beta_{\sigma b_dw} = 2,46$ (42CrMo4)</p> <p>Torsion: $\beta_{\tau t_dw} = 2,23$ (42CrMo4)</p>
 <p>ZWV nach DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf und Nabenlage (0) Auslauf-Kerbradius: $r_w = 5 \text{ mm}$ Fußrundungsverhältnis: $\rho_{fmin}/m = 0,16$ Wellendurchmesser: $d_w = 19 \text{ mm}$ Kopfkreisdurchmesser: $d_{a1} = 24,65 \text{ mm}$ $b = 0,6 \cdot d_B$ und $d_{e2}/d_B = 2$</p>	Nenndurchmesser $d_{h1} = 22,05 \text{ mm}$	
	<p>1) ohne Nabe: $\alpha_{\sigma b_Auslauf_dh1} = 2,10$ $\alpha_{\tau t_Auslauf_dh1} = 2,25$ $\alpha_{\tau t_Zahnfuß_dh1} = 2,90$</p> <p>2) mit Nabe (NL0): $\alpha_{\sigma b_Auslauf_dh1} = 2,31$ $(\beta_{\sigma b_Auslauf_dh1} = 2,20)$ $\alpha_{\tau t_Auslauf_dh1} = 2,55$ $(\beta_{\tau t_Auslauf_dh1} = 2,48)$ $\alpha_{\tau t_Zahnfuß_dh1} = 3,37$ $(\beta_{\tau t_Zahnfuß_dh1} = 2,73)$</p>	<p>42CrMo4, vergütet 18CrNiMo7, blindgehärtet</p> <p>Biegung: $\beta_{\sigma b_dh1} = 2,17$ (18CrNiMo7)</p> <p>Torsion: $\beta_{\tau t_dh1} = 2,00$ (18CrNiMo7) $\beta_{\tau t_dh1} = 2,62$ (42CrMo4)</p>

Anmerkung

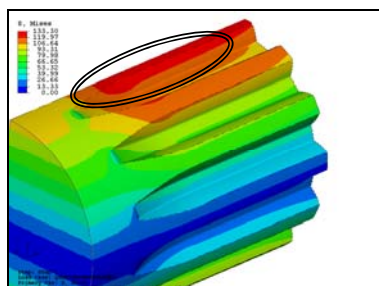
- Die Differenz zwischen der Formzahl und der Kerbwirkungszahl stellt die Stützwirkung dar.
- Zur rechnerischen Ermittlung der Kerbwirkungszahl sind die diesbezüglichen Anmerkungen (S. 209) zu beachten.
- „ohne Nabe“ bedeutet, dass die Formzahlen ohne Nabenbeeinflussung ermittelt wurden z.B. bei Torsion durch eine gleichmäßige Flächenpressung (siehe dazu *Bild 3.17-a*, S. 78).
- „mit Nabe“ heißt, dass die Formzahlen aus einer nichtlinearen Kontaktanalyse (unter Berücksichtigung des Vorhandenseins einer Nabe) bestimmt wurden (siehe *Abschnitt 4.2.8*).
- Das *Bild 6.13* veranschaulicht die Position der Maximalspannung bei Biegung je Kerbform.

Tabelle 6.11: Vergleich zwischen den mit der FEM ermittelten Form- und Kerbwirkungszahlen und den experimentellen Kerbwirkungszahlen bei Torsion und Biegung für die Zahnwellenverbindung **DIN 5480 -25x1,75x13** (geschliffene Verzahnung) mit gebundenem Auslauf mit und ohne SR-Nut und Nabenlage (0)

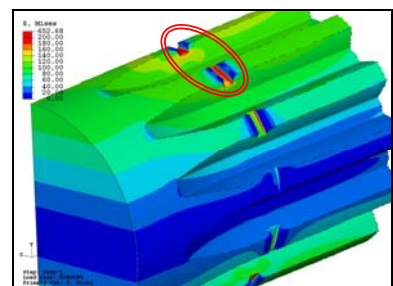
Probenform	α_k -numerisch bzw. β_k -numerisch	β_k -experimentell
 <p>ZWV nach DIN 5480 -25x1,75x13 mit gebundenem Auslauf und NL 0 Auslauf-Kerbradius: $r_w = 31,5 \text{ mm}$ Fußrundungsverhältnis: $\rho_{fmin}/m = 0,16$ Wellendurchmesser: $d_w = d_{a1} = 24,65 \text{ mm}$ $b = 0,6 \cdot d_B$ und $d_{e2}/d_B = 2$</p>	<p>Ne Nenndurchmesser $d_{h1} = 22,05 \text{ mm}$</p> <p>1) ohne Nabe: $\alpha_{\sigma b_Kopfflanke_dh1} = 1,00$ $\alpha_{\tau t_Zahnfuß_dh1} = 2,43$</p>	<p>42CrMo4, vergütet 18CrNiMo7, blindgehärtet</p> <p>Biegung: $\beta_{\sigma b_dh1} = 3,21$ (18CrNiMo7)</p> <p>Torsion: $\beta_{\tau t_dh1} = 1,77$ (18CrNiMo7) $\beta_{\tau t_dh1} = 1,95$ (42CrMo4)</p>
	<p>2) mit Nabe (NL0): $\alpha_{\sigma b_Kopfflanke_dh1} = 1,25$ $(\beta_{\sigma b_Kopfflanke_dh1} = 1,02)$ $\alpha_{\tau t_Zahnfuß_dh1} = 2,68$ $(\beta_{\tau t_Zahnfuß_dh1} = 2,16)$</p>	
 <p>ZWV nach DIN 5480 -25x1,75x13 mit geb. Auslauf und SR-Nut, NL 0 Auslauf-Kerbradius: $r_w = 31,5 \text{ mm}$ Fußrundungsverhältnis: $\rho_{fmin}/m = 0,16$ Wellendurchmesser: $d_w = d_{a1} = 24,65 \text{ mm}$ $b = 0,6 \cdot d_B$ und $d_{e2}/d_B = 2$ SR-Nut nach DIN 471-25x1,2 (Nuttiefe $t_{SRN} = 0,55 \text{ mm}$; Nutbreite $m_{SRN} = 1,3 \text{ mm}$ und Nutrundung $r_{SRN} = 0,12 \text{ mm}$)</p>	<p>Ne Nenndurchmesser $d_{SRN} = 23,1 \text{ mm}$</p> <p>1) ohne Nabe: $\alpha_{\sigma b_SRN_dSRN} = 4,12$ $\alpha_{\tau t_Zahnfuß_dSRN} = 2,66$ $\alpha_{\tau t_SRN_dSRN} = 2,20$</p>	<p>42CrMo4, vergütet 18CrNiMo7, blindgehärtet</p> <p>Biegung: $\beta_{\sigma b_dSRN} = 3,70$ (18CrNiMo7)</p> <p>Torsion: $\beta_{\tau t_dSRN} = 2,23$ (18CrNiMo7) $\beta_{\tau t_dSRN} = 2,42$ (42CrMo4)</p>
	<p>2) mit Nabe (NL0): $\alpha_{\sigma b_SRN_dSRN} = 4,23$ $(\beta_{\sigma b_SRN_dSRN} = 3,28)$ $\alpha_{\tau t_Zahnfuß_dSRN} = 3,16$ $(\beta_{\tau t_Zahnfuß_dSRN} = 2,56)$ $\alpha_{\tau t_SRN_dSRN} = 2,44$ $(\beta_{\tau t_SRN_dSRN} = 2,11)$</p>	



a) ZW mit freiem Auslauf



b) ZW mit gebundenem Auslauf



c) ZW mit geb. Auslauf und SRN

Bild 6.13: Ort der Vergleichsspannungsspitze nach der GEH bei Biegebelastung je nach Kerbform

Anmerkungen

- Die Bestimmung der experimentellen Kerbwirkungszahlen erfolgte gemäß *DIN 743* basierend auf den Ergebnissen aus den Ermüdungsversuchen (Mittel- und Ausschlagspannungen) /FVA08/.
- Für die rechnerische Abschätzung von Kerbwirkungszahlen in Abhängigkeit von der numerisch berechneten Formzahl in den *Tabellen 6.10* und *6.11* wurde auf die Ansätze nach *Siebel/Stieler* und nach *Neuber* Bezug genommen.
- Die Stützziffer n ergibt sich aus dem Verhältnis der Formzahl $\alpha_{\sigma,\tau}$ zur Kerbwirkungszahl $\beta_{\sigma,\tau}$ nach Gl. (2.51) (S. 38).
- Die rechnerische Berücksichtigung der Stützwirkung n im freien Auslaufbereich oder in der Zahnfußabstrahlung erfolgt nach dem *Siebel-Stieler*-Ansatz der Spannungsgradienten gemäß der Gleichung (2.52) (S. 38).
- Die dazu erforderlichen bezogenen Spannungsgefälle je nach Belastungsart (Torsion oder Biegung) wurden für den freien Auslauf nach den neu entwickelten Näherungsgleichungen aus der *Tabelle 4.10* (S. 162) (siehe dazu **Abschnitt 4.3.6**) ermittelt. Für den Zahnfußbereich wurde die Beziehung (4.32) (S. 163) nach /Wes96/ verwendet.
- Die rechnerische Berücksichtigung der Stützwirkung n an der SR-Nut geschieht nach dem *Neuberschen* Ansatz des Strukturradius (S. 41) gemäß der Gleichungen (2.56), (2.57) und (2.59). Es handelt sich dabei um Kerben mit scharfen Radien.
- Zur Vermeidung von möglichen Missverständnissen angesichts der in *Tabellen 6.10* und *6.11* verwendeten Nennspannungsdefinitionen sowie zu einer leichteren Handhabung der experimentellen Ergebnisse /FVA08/ werden die experimentell und rechnerisch erworbenen Kerbwirkungszahlen bei Biegung und Torsion je nach Kerbgeometrie in **Tabelle 6.12** einheitlich bezogen auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} dargestellt.

Tabelle 6.12: Vergleichende Darstellung der Kerbwirkungszahlen /FVA08/ bezogen auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bei Torsion und Biegung für die Zahnwellenverbindung *DIN 5480 -25x1,75x13* mit freiem und gebundenem Auslauf mit und ohne SR-Nut und Nabenlage (0), mit geschliffener und gewalzter Verzahnung

Werkstoff			42CrMo4	18CrNiMo7	42CrMo4	18CrNiMo7
Belastungsart			Torsion		Biegung	
Kerbform	Verfahren		$\beta_{\tau, dh1}$		$\beta_{\sigma, dh1}$	
ZWV mit freiem Auslauf ($r_w = 0,55$ mm), $\rho/m = 0,16$	Geschliffen	Exp.	3,49		3,85	
		FEM	(3,61)		(3,98)	
	Gewalzt	Exp.	1,65			
ZWV mit freiem Auslauf ($r_w = 5$ mm), $\rho/m = 0,16$	Geschliffen	Exp.	2,62	2,00		2,17
		FEM		(2,73)		(2,20)
	Gewalzt	Exp.	1,62			
ZWV mit geb. Auslauf ($r_w = 31,5$ mm), $\rho/m = 0,16$	Geschliffen	Exp.	1,95	1,77		3,21
		FEM		(2,16)		(1,02)
	Gewalzt	Exp.	1,00			
ZWV mit geb. Auslauf und SRN ($r_{SRN} = 0,12$ mm), $\rho/m = 0,16$	Geschliffen	Exp.	2,11	1,94		3,22
		FEM		(2,23)		(2,85)
	Gewalzt	Exp.	1,11			

6.4 Anwendungshinweise

Für die Anwendung der in den *Tabellen 6.10* und *6.11* angegebenen Kerbwirkungszahlen in der Berechnung nach *DIN 743 /N3/* sind diese besonders geeignet, da ihre Ermittlung aus den experimentellen Untersuchungen heraus in reversierender Anwendung der *DIN 743* erfolgte. Die Verwendung in einer anderen Berechnungsvorschrift ist nicht zulässig.

Auf Basis dieser Untersuchungsergebnisse konnte die Berechnungsgenauigkeit für den speziellen Anwendungsfall der Welle mit Zahnwellenprofil nach *DIN 5480 /N1/* erheblich gesteigert werden und die Streubreite der Kennzahlangaben in der Literatur in Abhängigkeit gängiger Fertigungsverfahren und Werkstoffe fokussiert werden.

Zum Abschluss lassen sich folgende Ergebnisse untersuchter Verbindungen formulieren:

Die Anrisse von Gewalt- und Dauerbrüchen gehen meist von einer Kerbe im Zahnfuß am Verbindungsrand oder von einer Kerbe in unmittelbarer Nähe des Randes außerhalb der Verbindung, d.h. vom Auslaufbereich (insbesondere beim freien Auslauf).

Der Steifigkeitssprung Zahnwellen-Nabe-Verbindung bewirkt eine ungleichförmige Beanspruchungsverteilung über der Verbindungslänge und der Zahnhöhe mit einer Lastüberhöhung am Verbindungsbeginn. Die sich dabei überlagernden Wirkungen der Belastungsspitze an der Lasteinleitungsstelle und der durch die Verzahnungs- und Auslaufgeometrie bedingten Kerbwirkungen rufen am Zahnfuß einen komplizierten dreiachsigen Spannungszustand hervor, der den Dauerbruch fördert.

Aus den numerisch und experimentell durchgeführten Untersuchungen geht hervor, dass die Zahnwellen mit gebundenem Auslauf spannungs- bzw. festigkeitsmäßig günstiger als die mit freiem Auslauf sind. Bei Zahnwellen mit freiem Auslauf ist der Auslaufbereich festigkeitsbestimmend, so dass hier Optimierungen durch Entlastungsnuten, Freistiche oder ellipsenförmige Ausrundungen möglich sind.

Das experimentelle Versuchsprogramm an den praxisnahen typischen Zahnwellenverbindungen konnte die Verifizierung der gewonnenen FE-Resultate über das vorgesehene Anwendungsfeld absichern.

Eine gute Übereinstimmung der durchgeführten Vergleiche zwischen den rechnerisch bestimmten Kerbwirkungszahlen mit denen aus den Dauerfestigkeitsversuchen wurde bei Torsionsbeanspruchung für alle Zahnwellen unabhängig von der Kerbform (mit freiem, gebundenem Auslauf mit und ohne SR-Nut) bestätigt.

Auf Grund der komplexen Einspannsituation der kurzen untersuchten Bauteilproben sind erhebliche Verschleiß- und thermische Probleme bei den Umlaufbiegeuntersuchungen aufgetreten. Dies förderte die Risseinleitung und -ausbreitung in mikroskopischen Bereichen an der Oberfläche. Demzufolge traten Abweichungen der numerisch berechneten Formzahlen von den Kerbwirkungszahlen insbesondere bei den Zahnwellen mit gebundenem Auslauf ohne die Sicherungsringnut (siehe dazu *Tabelle 6.11*) auf.

Da die Wechselfestigkeiten der glatten Proben näherungsweise berechnet wurden, ist an dieser Stelle eine gesicherte Quantifizierung der experimentellen Ermittlung der Spannungsauslässe der ungekerbten Welle sowie der Zusammenhänge zwischen Bauteil, Fertigung und Werkstoff erforderlich.

Die Versuchsergebnisse zur Erfassung des umformenden Fertigungsverfahrens (Walzen) zeigten den erwarteten Einfluss der Oberflächenverfestigung auf die Kerbwirkungszahlen. Durch das Kaltwalzen der Verzahnung entsteht eine positive Beeinflussung der Zahnfuß- und Zahnflankenfestigkeit.

Gewalzte 42CrMo4-Prüflinge hatten auf Grund der Druckeigenspannungen deutlich geringere Kerbwirkungszahlen je nach Kerbgeometrie (*Tabelle 6.12*), siehe dazu auch die Kerbwirkungszahlen einsatzgehärteter Werkstoffe für Profilwellen nach *DIN 743 /N3/*.

Die dauerfestigkeitsbestimmenden Parameter sind umfangreich. Dazu werden folgende Einflüsse z.B. bei der Wellenberechnung genannt:

1. Die Kerbgeometrie.
2. Der Werkstoff (z.B. Gefügestand, Härte, spröde, zäh, Korrosion, Kerbempfindlichkeit, Mittelspannung und Spannungsausschlag).
3. Die Größeneinflüsse {technologische, spannungsmechanische bzw. geometrische (z.B. Stützwirkung, Spannungsgefälle), statistische (z.B. Erhöhung der Wahrscheinlichkeit eines Bruches mit Zunahme der Probengröße) und oberflächentechnische Einflüsse (z.B. Eigenspannungen, Randfestigkeit, Behandlung, Oberflächenrauheit)}.

Trotz dieser vielfältigen Parameter, die die Wechsel- bzw. die Dauerfestigkeit einer Welle beeinflussen, können basierend auf den erhaltenen Ergebnissen verlässliche Aussagen zur Kerbwirkung unter Torsions- und Biegebelastung getroffen und die Tragfähigkeitsberechnung entsprechender Zahnwellen durchgeführt werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Die hohen und vielfältigen Anforderungen vor allem an momentenübertragende Profilwellen im konstruktiven Umfeld moderner Maschinen erfordern die Schaffung von Methoden zur Berücksichtigung der örtlichen Spannungskonzentrationen und lassen die möglichst genaue Berechnung der Kerbwirkung sowie Maßnahmen zu deren Verringerung unerlässlich werden.

Der Festigkeitsnachweis der Zahnwellen mit freiem und gebundenem Auslauf ist nach heute gültigen Normen und Richtlinien kaum möglich, da die Problematik der Kerbwirkung im Auslaufbereich in diesen Normen nicht abgedeckt ist. Zugleich ist festzustellen, dass die für diese Verbindungen vorhandenen experimentellen Daten für eine umfassende Bewertung nicht ausreichend sind.

Ausgehend von der im Kapitel 1 beschriebenen Problematik konnte die vorliegende Arbeit viele der Wissenslücken bezüglich der Auslegung von hochbeanspruchten Zahnwellen schließen. Auf dem Anwendungsgebiet der Zahnwellenverbindungen in der Antriebstechnik wurden für einen Grossteil praxisrelevanter Ausführungsvarianten Ergebnisse ermittelt.

Im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit wurden zahlreiche Untersuchungen mit der Finiten-Element-Methode (FEM) unter linear-elastischen Materialeigenschaften nach dem *Hook'schen* Gesetz mit dem Programm MSC/PATRAN-NASTRAN durchgeführt.

Die Beurteilung der numerischen Berechnungsergebnisse der untersuchten Zahnwellenvarianten stützt sich auf experimentelle Untersuchungen (dynamische Dauerfestigkeitsversuche sowie statische Untersuchungen), die parallel am Institut für Maschinenwesen IMW der TU Clausthal durchgeführt wurden.

Das Ziel war es, die Spannungsformzahlen an den Zahnwellen nach *DIN 5480 /N1/* mit dem freien Auslauf sowie mit dem gebundenen Auslauf mit und ohne Sicherungsringnut nach *DIN 471 /N2/* für die Belastungsarten Torsion, Biegung und Zug/Druck zu bestimmen.

Die erzielten FE-Ergebnisse wurden unter Berücksichtigung von Hauptnormalspannungshypothese (NSH) (für spröde Werkstoffe) und Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) (für duktile Werkstoffe) sorgfältig ausgewertet.

Die Grundlage für die breite Anwendbarkeit und Übertragbarkeit der Ergebnisse bildeten Variantenuntersuchungen. Hierbei wurden die Auswirkungen von Variationen der maßgeblichen Geometrieparameter (z.B. Zähnezahl, Kerbschärfe, Durchmesser Verhältnis, geometrische Lage und Tiefe der SR-Nuten, etc.) auf die Größe der Formzahlen in der Fußausrundung, im Auslaufbereich und in der SR-Nutrundung an den Modellen der Zahnwellen numerisch analysiert und erfasst.

Da die Variationsvielfalt der Auslaufgeometrie- und Verzahnungsparameter für die Formzahlberechnung sehr groß ist, war während des Vorhabens ein sehr hoher Anteil von Berechnungen zu realisieren, um den gesamten geometrischen Parameterbereich abzudecken.

Mit den FE-Modellen erfolgten weitere Berechnungen zur Stärke des axialen Abklingverhaltens der Maximalspannungen in Längsrichtung sowie zur Beschreibung der Lage der Spannungsmaxima auf der Kerbberandung im Verzahnungsauslaufbereich.

Zur rechnerischen Bestimmung der Kerbwirkungszahlen aus den Formzahlen nach dem *Siebel-Stieler*-Verfahren /**Sie95**/ wurden FE-Berechnungen zur Abschätzung der bezogenen Spannungsgradienten in Tiefenrichtung für die Zahnwellen mit freiem Auslauf bei Torsion, Biegung und Zug/Druck bearbeitet.

Aus den durchgeführten theoretischen und numerischen Untersuchungen mit zahlreichen Parameterstudien zu den Beanspruchungen der Zahnwellen wurden neue einfache Näherungsgleichungen und Korrekturfaktoren entwickelt. Sie dienen zur Berechnung der Formzahlen, zur Bestimmung der Lage und des Abklingverhaltens der maximalen Spannung in Abhängigkeit von der Formzahl in der Kerbe sowie zur Beschreibung der bezogenen Spannungsgefälle je nach Belastungsart.

Damit können für nahezu alle Zahnwellenvarianten nach *DIN 5480* mit dem freien und dem gebundenen Auslauf mit und ohne SR-Nuten Formzahlergebnisse für Torsion, Biegung und Zug/Druck bestimmt und die Kenntnisse über die Kerbwirkung erweitert werden. Dadurch ist die Voraussetzung geschaffen, die Spannungskonzentration im Festigkeitsnachweis zu erfassen und die Fehldimensionierungen weitgehend auszuschließen.

Des Weiteren liegen in Diagrammform qualitative Aussagen zum Verlauf der Spannungsformzahlen und der bezogenen Spannungsgefälle in Abhängigkeit von den Geometrieparametern vor. Außerdem wurden auch allgemeine Dimensionierungsempfehlungen zur Vorbemessung der Zahnwellen abgeleitet.

Im Anhang dieser Arbeit sind ergänzend die wichtigsten Ergebnisse der FE-Berechnungen detailliert aufgearbeitet und in Tabellen und Diagrammsammlungen zusammengestellt.

Die vorliegenden Ergebnisse sind von entscheidender Bedeutung für die zweckmäßige Gestaltung und Ermüdungsfestigkeitsberechnung entsprechender Zahnwellen mit dem freien Auslauf oder mit dem gebundenen Auslauf mit und ohne Sicherungsringnuten.

Diese Kenntnis der Kerbwirkung gibt dem Konstrukteur die Möglichkeit einer sicheren, aber auch wirtschaftlichen Berechnung und damit auch einer guten Werkstoffausnutzung von diesen hochbeanspruchten Profilwellen.

Die neu erworbenen Untersuchungsergebnisse sollen einen Beitrag zur Weiterentwicklung der bekannten Normen *DIN 743* /**N3**/ und *DIN 5466-2* /**N5**/ leisten. Die Verbreitung der Anwendung methodischer Berechnungsvorschriften in der Praxis ist eine wichtige Verbesserungstendenz.

7.2 Ausblick

Nach den bisher vorliegenden Ergebnissen können folgende Vorschläge und Anregungen als Ausblick auf weitere zukünftige Forschungen theoretischer, experimenteller und numerischer Art, auf dem Themengebiet „Profilwellen-Kerbwirkung“ unterbreitet werden.

- Untersuchungen zur Reduzierung der Kerbwirkung durch die geometrische Optimierung der Kerbformen und der Übergangskonturen, insbesondere an Zahnwellen mit freiem Auslauf durch den Einsatz von Entlastungskerbten, Freistichen oder ellipsenförmigen Ausrundungen anstatt der kreisrunden Kerben. Dadurch kann eine Erhöhung der Tragfähigkeit von Profilwellen erreicht werden.
- Durchführung weiterer Rechnungen von Varianten an abweichungsbehafteten Modellen der Zahnwellenverbindungen zur Berücksichtigung der durch die Verzahnungsfehler entstehenden ungleichmäßigen Belastung und Lastverteilung über der Zahnbreite und -höhe. Dies führt zur Präzisierung der in dieser Arbeit ermittelten Näherungsgleichungen und zu einer genaueren Aussage bezüglich der allgemeinen Anwendbarkeit der gewonnenen Ergebnisse.
- Untersuchungen zur Maximalbelastbarkeit (ertragbaren Spitzenlasten) an Zahnwellenverbindungen mit harter Randschicht. Dabei sind die Ermittlung allgemeingültiger Spannungstiefenverläufe und deren Vergleich mit den Festigkeitstiefenverläufen ein weiterer wichtiger Schwerpunkt dieser Untersuchungen.
- Erweiterung der Untersuchungen auf andere Getriebewellen, z.B. an Keil- und Kerbzahnwellen bei der Ausführung als aufgesetzte und eingearbeitete Wellen.
- Untersuchung zur Tribokorrosion unter dynamischer Belastung als versagensursächlicher und lebensdauerbegrenzender Schädigungsmechanismus bei Profilwellen.
- Untersuchungen zur Abdeckung des Bereiches mehrfachgekerbter Antriebselemente, an Profilwellen mit Mehrfachkerben an den funktionsrelevanten und gefährdeten geometrischen Positionen, z.B. Zusammentreffen von Passfeder/Verzahnungsauslauf. Für diesen Themenbereich „Überlagerungen von Kerben“ sind allgemeingültige Aussagen hinsichtlich der Formzahlen, der bezogenen Spannungsgefälle sowie der Entwicklung eines geeigneten Stützzahlkonzeptes zu erarbeiten.
- Untersuchungen der Einflüsse von Schmierölbohrungen, dünnwandiger Nabengestaltung sowie umformenden Fertigungsverfahren auf die Kerbwirkung für die (Hohl)-Zahnwellen-Verbindungen mit freiem und gebundenem Auslauf.
- Untersuchungen zur Beeinflussung von Pressverbindungen auf die Kerbspannungen benachbarter Verzahnungsausläufe.
- Ermittlung der Dehnungsformzahlen an Profilwellen durch Berechnung der Kerbdehnungen und Kerbspannungen bei elastisch-plastischem Materialverhalten unter Berücksichtigung verschiedener Plastizierungsansätze.
- Entwicklung der Methodik zum Qualitätsmanagement hinsichtlich Zuverlässigkeit und Sicherheit von den numerischen Berechnungen und den FEM-Modellen.

8 Literaturverzeichnis

- /Bei99/ Beitz, W. ; Küttner, K.-H. (Hrsg): Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau. 19. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag 1999
- /Bet97/ Betten, J.: Finite Elemente für Ingenieure 1. Grundlagen, Matrixmethoden, Elastisches Kontinuum. 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin 1997
- /Buc76/ Buch, A.: Einige Bemerkungen über das Einflussfaktorenverfahren zur Berechnung der Dauerfestigkeit von Maschinenbauteilen. Materialprüfung 18 (1976) Nr. 6, S. 194-199
- /Bur98/ Burgtorf, U.: Montage- und Betriebseigenschaften von Zahnwellen-Verbindungen mit Presssitz. Dissertation der TU Clausthal 1998
- /Con62/ Contag, D.: Die Festigkeitsminderung von Wellen unter dem Einfluss von Wellen-Naben-Verbindungen durch Lötung, Nut und Passfeder, Kerbverzahnungen und Keilprofile bei wechselnder Drehung. Dissertation der TU Berlin 1962
- /Dec98/ Decker, K-H.: Maschinenelemente – Gestaltung und Berechnung. Hanser Verlag München Wien , 14. Auflage 1998
- /Die80/ Dietmann, H.: Angenäherte Bestimmung von Stützziffern für die Festigkeitsberechnung. Konstruktion 32 (1980), Heft 5, Springer-Verlag, S. 179-184
- /Die92/ Dietmann, H.: Einführung in die Elastizitäts- und Festigkeitslehre. Alfred Kröner Verlag, 3.Auflage 1992
- /Die85/ Dietmann, H.: Zur Berechnung von Kerbwirkungszahlen. Konstruktion 37 (1985) H. 2, S. 67-71
- /Die78/ Dietz, P.: Die Berechnung von Zahn- und Keilwellenverbindungen. Büttelborn: Selbstverlag des Verfassers 1978
- /Die93/ Dietz, P.; Schäfer, G.; Wesolowski, K.: Zahnwellenverbindungen – Beanspruchungs- und Verschleißverhalten. Konstruktion 45 (1993), Springer-Verlag, S. 227-234
- /Dit91/ Dittmann, K.-J.: Ein Beitrag zur Festigkeitsberechnung und Lebensdauervorhersage für Bauteile aus Stahl unter mehrachsiger synchroner Beanspruchung. Dissertation der TU Berlin 1991
- /Ecc00/ Eccarius, M.: Untersuchungen zur Berechnung und optimierten Gestaltung von Wellen und Achsen mit konstruktiven Kerben. Dissertation der TU Dresden 2000
- /Frö95/ Fröhlich, P.: FEM-Leitfaden. Einführung und praktischer Einsatz von Finite-Element-Programmen. Springer Verlag 1995
- /Göl89/ Göldner, H. ; Holzweißig, F.: Leitfaden der Technischen Mechanik. 11., verbesserte Aufl. Leipzig : VEB Fachbuchverlag 1989
- /Hän81/ Hänel, B.; Wirthgen, G.: Die Berechnung der Dauerfestigkeit nach dem Verfahren von Kogaev und Serensen. IfL-Mitt. 20(1981)H. 3, S. 65-74
- /Hai89/ Haibach, W.: Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung. VDI-Verlag, Düsseldorf 1989

- /Hän60/ Hänchen, R.: Neue Festigkeitsberechnung für den Maschinenbau. München: Carl Hanser Verlag 1960
- /Hän95/ Hänel, B.: FKM-Richtlinie „Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile“ – Erläuterungen. In: Festigkeitsberechnung metallischer Bauteile, VDI Berichte, Band 1227 (1995) S. 27-65, VDI –Verlag, Düsseldorf
- /Hei84/ Heinrich, J.: Kerbwirkung an Sicherungsringnuten und Berechnung von Sicherungsringverbindungen. Dissertation der TH Darmstadt 1984
- /Her37/ Herold, W.: Versuche über Drehschwingfestigkeit abgesetzter, genuteter und durchbohrter Wellen. VDI-Z 81 (1937) Nr. 18, S. 505-509
- /http/ <http://www2.staff.fh-vorarlberg.ac.at/~ge//bf/Bauteilfestigkeit.htm>. FH Vorarlberg
- /Iss03/ Issler, L.; Ruoff, H. ; Häfele, P.: Festigkeitslehre – Grundlagen. Berlin, Heidelberg, New York : Springer 2003
- /Jae88/ Jaenicke, B.: Stützwirkungskonzepte. VDI-Berichte Nr. 661 (1988), S. 27-66
- /Kit96/ Kittsteiner, H.-J.: Die Auswahl und Gestaltung von kostengünstigen Welle-Nabe-Verbindungen. Dissertation der TU München 1996
- /Kle05/ Klein, B.: FEM – Grundlagen in der Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Maschinenbau und Fahrzeugbau. Studium Technik, Vieweg 2005
- /Klo89/ Kloos, K.-H.: Kerbwirkung und Schwingfestigkeitseigenschaften. In: DVM-Berichtsband: Kerben und Betriebsfestigkeit. S. 7-95, 1989
- /Klo95/ Kloos, K.-H.; Kaiser, B.; Jung, U.: Einflüsse der Verfahrensparameter des Festwalzens auf die Schwingfestigkeit bauteilähnlicher Proben. Konstruktion 47 (1995) S. 97-101, Springer Verlag 1995
- /Koh86/ Kohl, G.: Ein Ansatz zur Berechnung der Zahnfußspannungen an Zahnwellenverbindungen. Dissertation der TU Clausthal 1986
- /Kol84/ Kollmann, F. G.: Welle-Nabe-Verbindungen. Konstruktionsbücher Band 32. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag 1984
- /Kra78/ Krapfenbauer, H.: Kaltwalzen eng tolerierter Verzahnung. Werkstatt und Betrieb 111 (1978) Nr. 10, S. 657-661
- /Kra84/ Krapfenbauer, H.: Neue Gesichtspunkte für die Fertigung von Stirnzahnradern durch Kaltwalzen. Präzision-Fertigungstechnik, Hanser Verlag 1984
- /Len95/ Lennartz, J.: Kaltfließpressen von gerad- und schrägverzahnten Getriebewellen. Dissertation der RWTH Aachen. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe2: Fertigungstechnik, Nr. 341. VDI-Verlag, Düsseldorf 1995
- /Lin98/ Linke, H.: Praxisorientierte Berechnung von Wellen und Achsen nach DIN 743. In: Festigkeitsberechnung metallischer Bauteile, VDI Berichte, Band 1442 (1998) S. 63-81, VDI –Verlag, Düsseldorf
- /Lin96/ Linke, H.: Stirnradverzahnung – Berechnung, Werkstoffe, Fertigung. München, Wien : Hanser 1996

- /Mac78/ Macherauch, E.; Reik, W.: 6. Auswirkung von Gefüge, Fertigung und Beanspruchung auf das Dauerschwingverhalten. 6.1 Übersicht und Bewertung wichtiger Einflussgrößen. S. 111-140. In: Verhalten von Stahl bei schwingender Beanspruchung. (Herausgeber: Dahl, W.), Verlag Stahleisen mbH. Düsseldorf 1978
- /Mag81/ Magin, W.: Untersuchung des geometrischen Größeneinflusses bei Umlaufbiegebeanspruchung unter besonderer Berücksichtigung technologischer Einflüsse. Dissertation der TH Darmstadt 1981
- /Mei00/ Meißner, U.; Menzel, A.: Die Methode der finiten Elemente - Eine Einführung in die Grundlagen. Springer Verlag, Berlin 2000
- /Mel03/ Melzer, D.: Getriebewellen – Maximalbelastung: Experimentelle Ermittlung der Anriss- und Verformungsgrenze von einsatzgehärteten Getriebewellen bei statischer Belastung (maximale Belastung). FVA-Forschungsheft Nr. 698, Frankfurt/Main 2003
- /Mel00/ Melzer, D.: Spannungsformzahlen für Hohlwellen. FVA-Forschungsheft Nr. 598, Frankfurt/Main 2000
- /Mül00/ Müller, G.; Groth, C.: FEM für Praktiker-Band 1: Grundlagen. 5. Auflage, Expert-Verlag, 2000
- /Nak51/ Nakazawa, H.: on the Torsion of Splined Shafts. Tokyo Torizo University 1951
- /Neu85/ Neuber, H.: Kerbspannungslehre, Theorie der Spannungskonzentration, Genaue Berechnung der Festigkeit. 3. völlig neubearbeitete und erweiterte Aufl. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo : Springer 1985
- /Neu68/ Neuber, H.: Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnung. Konstruktion 20 (1968), H.7, S. 245-251
- /Nie01/ Niemann, G.; Winter, H.; Höhn, B.-R.: Maschinenelemente Bd. I: Konstruktion und Berechnung von Verbindungen, Lagern, Wellen. 3. Auflage, Springer Verlag 2001
- /Nie03/ Niessner, M.: Ein Beitrag zur Festigkeitsbewertung scharf gekerbter Bauteile unter statischer und zyklischer Belastung. Dissertation der TU Darmstadt 2003
- /Ngu82/ Nguyen, V.-Ph.: Automatische Netzgenerierung für dreidimensionale Festigkeitsberechnung. Dissertation der Uni. Kaiserslautern 1982
- /Ngu82/ Nguyen, V.-Ph.: Automatic Mesh Generation with Tetrahedron Elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, Vol 18, pp.273-289, 1982
- /Per84/ Perseke, W.: Untersuchung zur Mehrfachkerbwirkung beim Zusammentreffen von Paßfedernut und Wellenabsatz sowie Paßfedernut und Sicherungsringnut. Dissertation der TH Darmstadt 1984
- /Pet88/ Peterson, R. E.: Stress Concentration Factors. John Wiley and Sons. New York 1988
- /Puc72/ Puchner, O.; Kamensky, A.: Spannungskonzentration und Kerbwirkung von Kerben im Kerbrand. Konstruktion 24 (1972) Heft 4, S. 127-134
- /Rad03/ Radaj, D.: Ermüdungsfestigkeit; Grundlagen für Leichtbau, Maschinen- und Stahlbau. 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin 2003

- /Rie03/ Rieg, F.; Hackenschmidt, R.: Finite Elemente Analyse für Ingenieure - Eine leicht verständliche Einführung. 2. Auflage, Carl Hanser Verlag, München 2003
- /Rol03/ Roloff/ Matek.: Maschinenelemente – Normung, Berechnung, Gestaltung. Vieweg Verlag Wiesbaden, 16. Auflage 2003
- /Rot82/ Roth, K.: Konstruieren mit Konstruktionskatalogen. Springer Verlag, Berlin 1982
- /Sch95/ Schäfer, G.: Der Einfluss von Oberflächenbehandlungen auf das Verschleißverhalten flankenzentrierter Zahnwellenverbindungen mit Schiebesitz. Dissertation der TU Clausthal 1995
- /Sch03/ Schäfer, G.: Auslegung von Zahnwellen-Verbindungen. In: Tagungsband „DMK 2003“, S. 437; (Herausgeber: Schlecht, B.), Wissenschaftsverlag Aachen 2003
- /Sch79/ Schlottmann, D.: Konstruktionslehre. VEB Verlag Technik, Berlin 1979
- /Sch76/ Schöpf, H.-J.: Festigkeitsuntersuchung an Zahnwellen-Verbindungen mit Spannungsoptik und Dauerschwingversuchen. Dissertation der TU München 1976
- /Sch78/ Schöpf, H.-J.: Zahnwellenverbindungen. Offenlegungsschrift Nr. DE 2656944, Deutsches Patentamt 1978
- /See77/ Seeger, T.; Beste, A.: Kerben und Bruch. VDI – Berichte, Reihe 18, Nr. 2, VDI – Verlag, Düsseldorf 1977
- /Sie95/ Siebel, E.; Stieler, M.: Ungleichförmige Spannungsverteilung bei schwindender Beanspruchung. VDI-Z 97 (1995) Nr. 5, S. 121-126
- /Sti54/ Stieler, M.: Untersuchungen über die Dauerschwingfestigkeit metallischer Bauteile bei Raumtemperatur. Dissertation der TH Stuttgart 1954
- /Thu60/ Thum, A.; Petersen, C.; Svenson, O.: Verformung, Spannung und Kerbwirkung. Eine Einführung. 1.Aufl. Düsseldorf : VDI-Verlag 1960
- /Thu39/ Thum, A.; Federn, K.: Spannungszustand und Bruchausbildung. Springer, Berlin 1939
- /Tur72/ Turno, A.: Gesenkschmieden und Pressen von Zahnrädern und verzahnten Werkstücken. Industrie-Anzeiger 94. Jg. Nr. 83 v. 6. 10. 1972
- /Vil84/ Villmer, F.J.: Zum Mechanismus der Lastverteilung in Zahnwellenverbindungen. Dissertation der TU Clausthal 1984
- /Ulr35/ Ulrich, M.: Verdrehfestigkeit und Verschleiß von Keilwellen. Versuchsbericht Nr. 111, Reichsverband der Automobilindustrie e.V. Berlin 1935
- /Wel76/ Wellinger, K.; Dietmann, H.: Festigkeitsberechnung. 3. Auflage. Stuttgart, Alfred Kröner Verlag 1976
- /Wes96/ Wesolowski, K.: Dreidimensionale Beanspruchungszustände und Festigkeitsnachweis drehmomentbelasteter Zahnwellen-Verbindungen unter elastischer und teilplastischer Verformung. Dissertation der TU Clausthal 1996
- /Woh78/ Wohlfahrt, H.: 6. Auswirkung von Gefüge, Fertigung und Beanspruchung auf das Dauerschwingverhalten. 6.2 Einfluss von Eigenspannungen. S. 141-164. In: Verhal-

ten von Stahl bei schwingender Beanspruchung. (Herausgeber: Dahl, W.), Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf 1978

- /Zap86/ Zapf, R.: Betriebs- und Verschleißverhalten flankenzentrierter Zahnwellen-Verbindungen mit Schiebesitz. Dissertation der TU Clausthal 1986

Studienarbeiten

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden folgende unveröffentlichte Studienarbeiten betreut, deren Ergebnisse zum Teil ebenfalls eingeflossen sind:

- /Bec04/ Becht, M.: Modellerstellung und Formzahlermittlung an Evolventenzahnwellen. Unveröffentlichter Großer Beleg, Daryusi, A., IMM TU Dresden, Juni 2004
- /Now05/ Nowak, R.: FEM-Ermittlung von Formzahlen bei verzahnten Wellen mit Sicherungsringnuten. Unveröff. Großer Beleg, Daryusi, A., IMM TU Dresden, Juni 2005
- /Bud07/ Buder, S.: FEM-Ermittlung von Formzahlen an Zahnwellen mit freiem und gebundenem Auslauf. Unveröff. Großer Beleg, Daryusi, A., IMM TU Dresden, März 2007
- /Str07/ Stritzki, C.: FEM-Kontaktrechnungen von Zahnwellen-Verbindungen mit freiem Auslauf. Unveröff. Großer Beleg, Daryusi, A., IMM TU Dresden, Mai 2007

Veröffentlichungen zum FVA-Forschungsvorhaben Nr. 467

- /FVA05/ Daryusi, A.: Ermittlung der Kerbwirkung bei Profilwellen für die praktische Getriebeberechnung. Veröffentlichung zum FVA-Forschungsvorhaben Nr. 467 anlässlich der FVA Info Tagung, Würzburg, 22. und 23. November 2005
- /FVA06/ Daryusi, A.: Ermittlung der Kerbwirkung bei Profilwellen für die praktische Getriebeberechnung. Veröffentlichung und Vortrag zum FVA-Forschungsvorhaben Nr. 467 anlässlich der FVA Info Tagung, Würzburg, 21. und 22. November 2006
- /FVA08/ Daryusi, A.; Lau, P.: Profilwellen-Kerbwirkung: Ermittlung der Kerbwirkung bei Profilwellen für die praktische Getriebeberechnung von Zahnwellen. FVA-Forschungsheft Nr. 467, Frankfurt/Main 2008

Normen, Richtlinien

- /N1/ DIN 5480 – Passverzahnungen mit Evolventenflanken und Bezugsdurchmesser. Hrsg. Deutsches Institut für Normung.
Teil 1: Grundlagen und Teil 2: Nennmaße und Prüfmaße. Berlin: Beuth-Verlag, 2004
Teil 15: Qualitätsprüfung und Teil 16: Werkzeuge. Berlin: Beuth-Verlag 2006
- /N2/ DIN 471 – Sicherungsringe (Halteringe) für Wellen; Regelausführung und schwere Ausführung. Berlin: Beuth-Verlag 1981
- /N3/ DIN 743 – Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen – Teil 1: Einführung, Grundlagen; Teil 2: Formzahlen und Kerbwirkungszahlen und Teil 3: Werkstoff-Festigkeitswerte. Berlin: Beuth-Verlag 2000

-
- /N4/ DIN 5466-1 – Tragfähigkeitberechnung von Zahn- und Keilwellen-Verbindungen - Teil 1: Grundlagen. Berlin: Beuth-Verlag 2000
- /N5/ DIN 5466-2 – Tragfähigkeitsberechnung von Zahn- und Keilwellen-Verbindungen - Teil 2: Zahnwellen-Verbindungen nach DIN 5480. Berlin: Beuth-Verlag 2002
- /N6/ DIN 5464 – Passverzahnungen mit Keilflanken - Schwere Reihe. Berlin: Beuth-Verlag 2006
- /N7/ DIN ISO 14 – Keilwellen-Verbindungen mit geraden Flanken und Innenzentrierung – Maße, Toleranzen, Prüfung; Identisch mit ISO 14, Ausgabe 1982. Berlin: Beuth-Verlag 1986
- /N8/ DIN 5481 – Passverzahnungen mit Kerbflanken. Berlin: Beuth-Verlag 2005
- /N9/ DIN 32711 – Antriebselemente. Polygonprofile P3G. Berlin: Beuth-Verlag 1979
- /N10/ DIN 32712 – Antriebselemente. Polygonprofile P4C. Berlin: Beuth-Verlag 1979
- /N11/ DIN ISO 6413 – Technische Zeichnungen; Darstellung von Keilwellen und Kerbverzahnungen, Identisch mit ISO 6413: 1988. Berlin: Beuth-Verlag 1990
- /N12/ DIN 5471 – Werkzeugmaschinen; Keilwellen- und Keilnaben-Profile mit 4 Keilen, Innenzentrierung; Maße. Berlin: Beuth-Verlag 1974
- /N13/ DIN 5472 – Werkzeugmaschinen; Keilwellen- und Keilnaben-Profile mit 6 Keilen, Innenzentrierung; Maße. Berlin: Beuth-Verlag 1980
- /N14/ DIN 8002 – Maschinenwerkzeuge für Metall, Wälzfräser für Stirnräder mit Quer- oder Längsnut, Modul 1 bis 20. Beuth Verlag Berlin 01/1955
- /N15/ DIN 58411 – Wälzfräser für Stirnräder der Feinwerktechnik mit Modul 0,1 bis 1. Beuth Verlag Berlin 11/1987
- /N16/ EN 10083-1 – Vergütungsstähle Technische Lieferbedingungen für Edelstähle. Deutsche Fassung 10/96
- /N17/ EN 10084 – Einsatzstähle Technische Lieferbedingungen. Deutsche Fassung 06/98
- /N18/ DIN 50125 – Prüfung metallischer Werkstoffe – Zugproben – Richtlinien für die Herstellung. 09/1999
- /N19/ E DIN 50150 – Umwertung von Härtewerten Prüfung metallischer Werkstoffe; Allgemeine Festlegungen. 00/99
- /ISO1/ ISO 4156 – Straight cylindrical involute splines - Metric modul, side fit - Generalities, dimensions and inspection. International Standards Organization (ISO), 1989
- /ANS1/ ANSI B92.2M – Metric Module, Involute Splines – American National Standards Institute (ANSI), 1989
- /FKM1/ FKM-Richtlinie: Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile. Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), Frankfurt/Main : VDMA-Verlag 1998
- /TGL1/ TGL 19340: Dauerfestigkeit der Maschinenbauteile, Teil 4 (Formzahlen und Kerbwirkungszahlen). Hrsg. Amt für Standardisierung, DDR-Standard 1983

Verwendete Programme:

- /MSC/ MSC – Patran/Nastran, FEM – Programmpakete 2005 der Firma MSC – Software
- /ProE/ CAD – System, Pro/ENGINEER 2001 der Firma PTC
- /ZGeo/ Zahngeometrie – Software, IMM TU Dresden

9 Anlagenverzeichnis

Es erfolgt eine Unterteilung der Anlage in vier Teile.

Anlage A Zusammenstellung der Untersuchungsergebnisse zur Auswirkung der Variation der geometrischen Örtlichkeit der Drehmomenteinleitung auf die Formzahl

Anlage B Zusammenstellung der Berechnungsergebnisse zu den Belastungsprinzipien und Einspannbedingungen zur Erzeugung eines reinen Biegemomentes

Anlage C Zusammenstellung der FE-Werte und Verläufe der Formzahlen in Abhängigkeit von dem Durchmesser Verhältnis und der Kerbschärfe für die Belastungsarten Torsion, Biegung und Zug/Druck

Interessante Positionen zur Auswertung der maximalen Vergleichsspannungen nach der GEH und NSH bei Torsionsbelastung für die Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf.

Anlage D FEM-Berechnung der bezogenen Spannungsgradienten und Formzahlverläufe an Zahnwellen mit freiem Auslauf für die Belastungsarten Torsion, Biegung und Zug/Druck

9.1 Anlage A

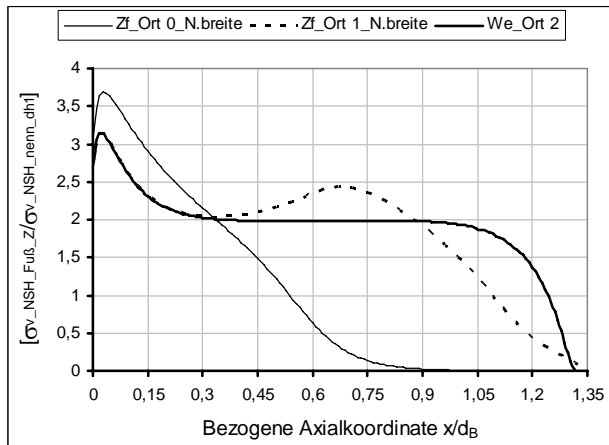
Anlage A

Simulation der torsionsbelasteten Zahnwellen

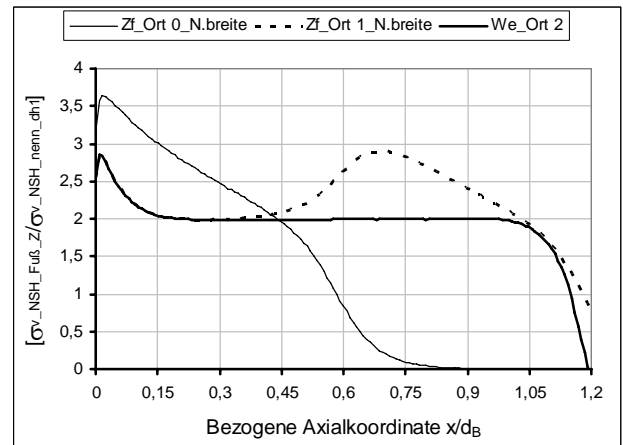
FE-Ergebnisse der Untersuchungen zur Auswirkung der Variation der geometrischen Örtlichkeit der Drehmomenteinleitung auf die Größe der Formzahlen

Übersicht der Wellengeometrien für die Variationsrechnungen								
Verzahnungsgrößen	Zeichen	Einheit	Messgrößen der Berechnungsvarianten					
Bezugsdurchmesser	d_B	[mm]	15	25	40	60	100	150
Zähnezahl	z		6	11	18	28	48	74
Modul	m	[mm]	2					
Bezugsdurchmesser/Modul	d_B/m		7,5	12,5	20	30	50	75
Fußrundungsradius	ρ_{Fmin}	[mm]	0,16.m					
Eingriffswinkel	α	[°]	30					
Profilverschiebung	$x_1.m$	[mm]	0,4					
Teilkreisdurchmesser	d	[mm]	12	22	36	56	96	148
Ersatzgeometriefaktor	c_{h1}		0,39	0,313	0,28	0,263	0,252	0,247
Ersatzdurchmesser	d_{h1}	[mm]	11,73	21,65	35,60	55,58	95,57	147,56
Grundkreisdurchmesser	d_b	[mm]	10,40	19,05	31,18	48,50	83,14	128,17
Kopfkreisdurchmesser	d_{a1}	[mm]	14,6	24,6	38,6	58,6	98,6	150,6
Fußkreisdurchmesser	d_{f1}	[mm]	10,6	20,6	34,6	54,6	94,6	146,6
Wellengrunddurchmesser	$d_w = d_{f1} - 1,6$	[mm]	9	19	33	53	93	145
Innendurchmesser	d_{i1}	[mm]	1	2	2	3	6	8
Durchmesserverhältnis	d_w/d_{a1}		0,617	0,775	0,855	0,904	0,943	0,963
	d_w/d_{f1}		0,849	0,922	0,954	0,971	0,983	0,989
	d_{f1}/d_{a1}		0,73	0,84	0,90	0,93	0,96	0,97
	d_i/d_w		0,11	0,11	0,06	0,06	0,06	0,06
Absatz_Kerbschärfe	r/t		0,5					
Absatz_Kerbradius	r	[mm]	1,4					
Auslauf_Kerbschärfe	r_w/t_{a1}		0,2					
Auslauf_Kerbradius	r_w	[mm]	0,56					
Kerbtiefe	$t = t_{a1}$	[mm]	2,8					
Zahndicke am Teilkreis	s_n	[mm]	3,603					
Zahnfußdicke	s_{Fn}	[mm]	3,776	4,005	4,095	4,143	4,179	4,196
Konuswinkel	ϕ	[°]	30					
Kerbabstandsverhältnis	a/d_w		0,25					
Kerbabstand	a	[mm]	2,25	4,75	8,25	13,25	23,25	36,25
$A_{ges.} = a + r + r_w$	$A_{ges.}$	[mm]	4,21	6,71	10,21	15,21	25,21	38,21
Verzahnungslänge	$L_z = 1,25 \cdot d_B$	[mm]	20	30	50	70	110	175

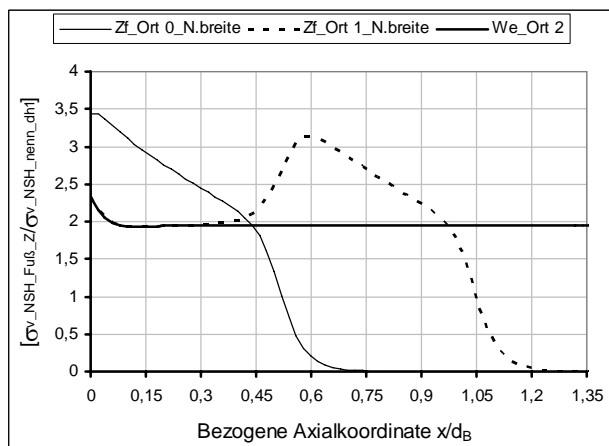
Tabelle A-1: Modellierte geometrische Abmessungen der aufgesetzten Zahnwellen und verwendete Größen der Modelle für die numerischen Berechnungen



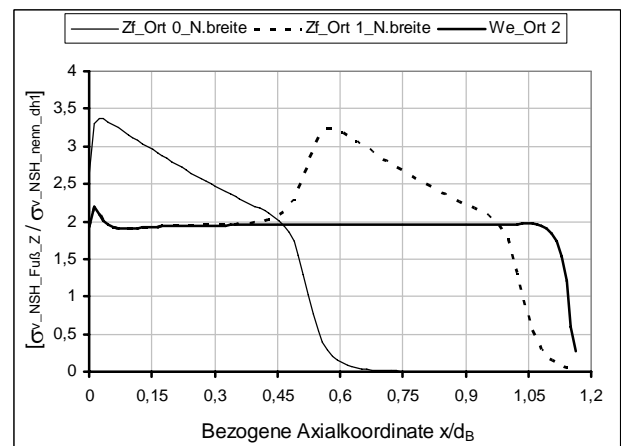
DIN 5480–W15x2x6



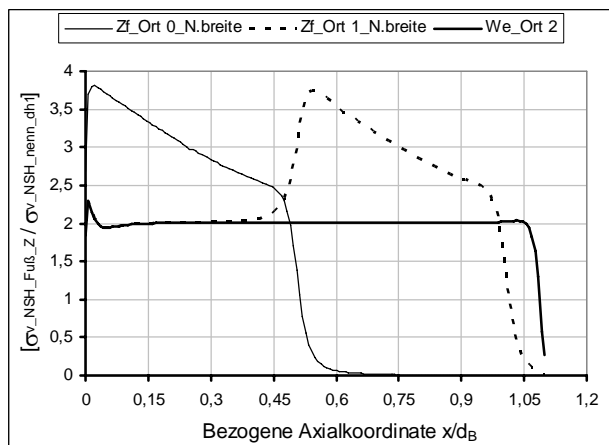
DIN 5480–W25x2x11



DIN 5480–W40x2x18



DIN 5480–W60x2x28



DIN 5480–W100x2x48

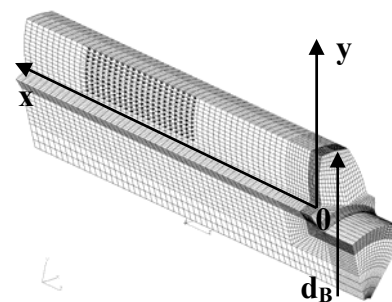


Bild A-1: Ermittlung des allgemeinen *Torsionsformzahlverlaufes* im *Zahnfußbereich* der *Zugseite* für die *Zahnwellen* mit *freiem Auslauf* mit unterschiedlichen *Lasteinleitungsorten* *nach der NS-Hypothese*

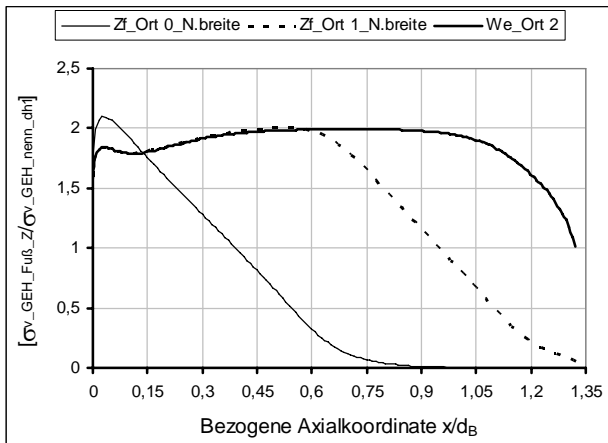
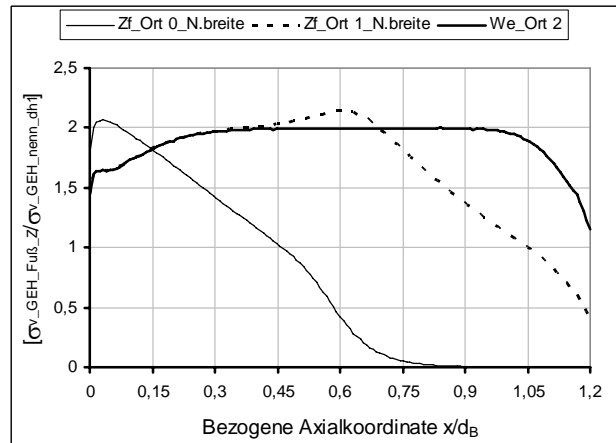
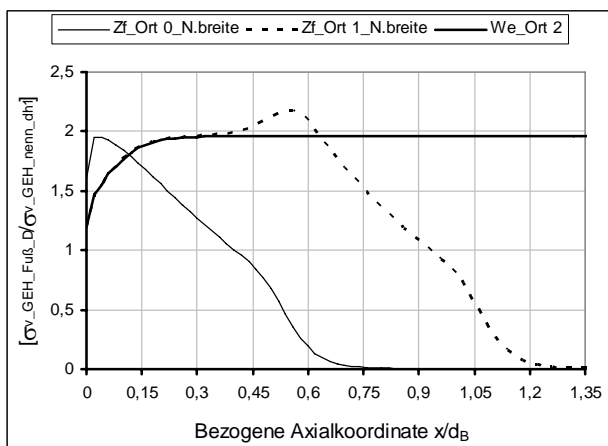
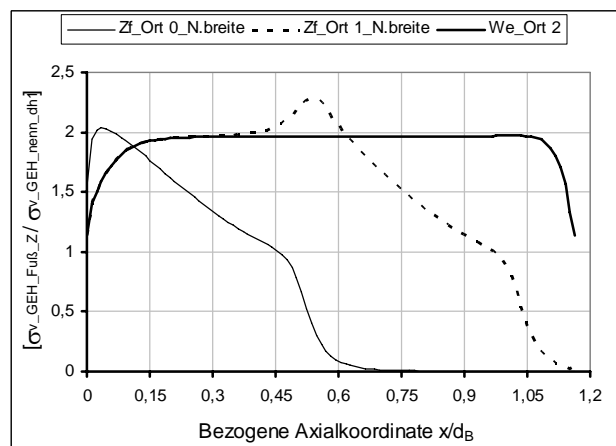
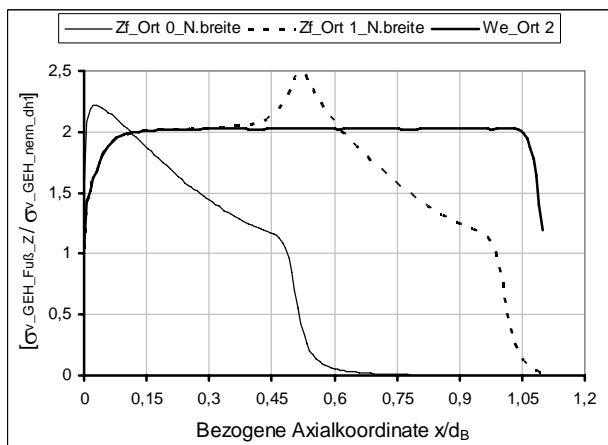
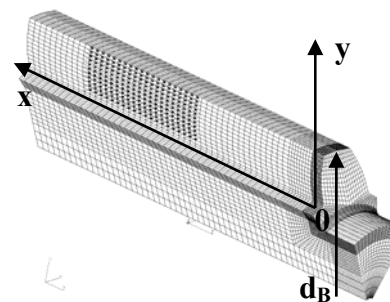
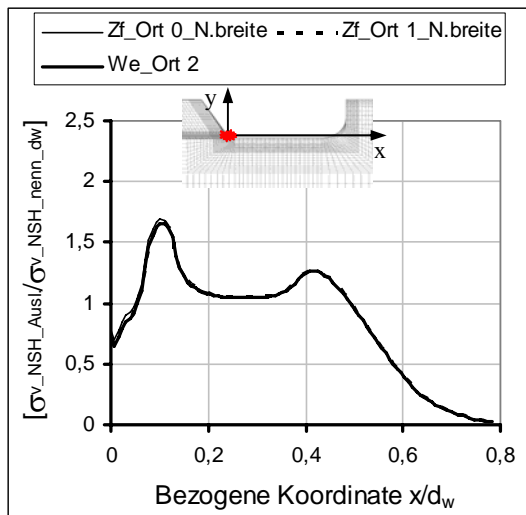
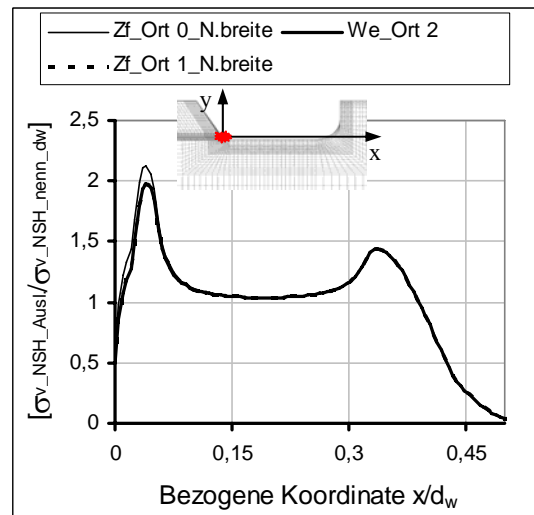
**DIN 5480–W15x2x6****DIN 5480–W25x2x11****DIN 5480–W40x2x18****DIN 5480–W60x2x28****DIN 5480–W100x2x48**

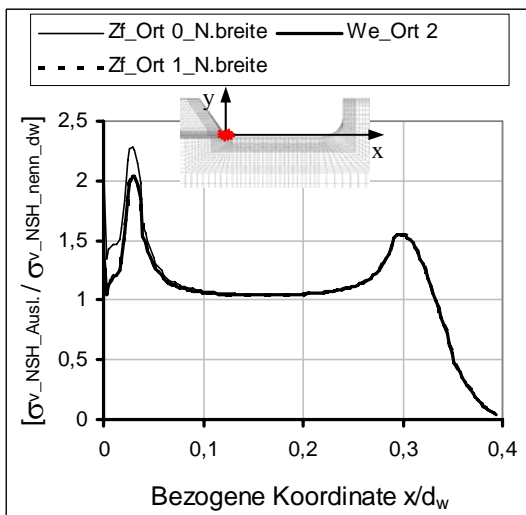
Bild A-2: Ermittlung des allgemeinen *Torsionsformzahlverlaufes* im Zahnfußbereich der Zugseite für die Zahnwellen mit freiem Auslauf mit unterschiedlichen Lasteinleitungsorten nach der *GE-Hypothese*



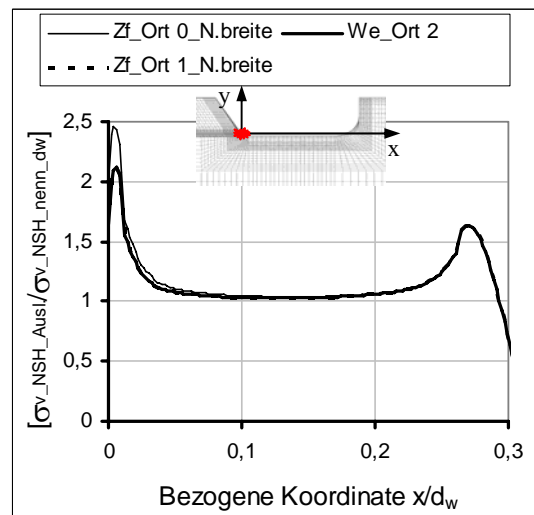
DIN 5480-W15x2x6



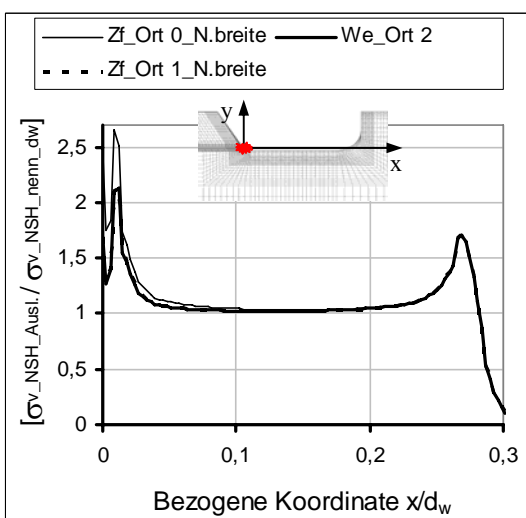
DIN 5480-W25x2x11



DIN 5480-W40x2x18



DIN 5480-W60x2x28



DIN 5480-W100x2x48

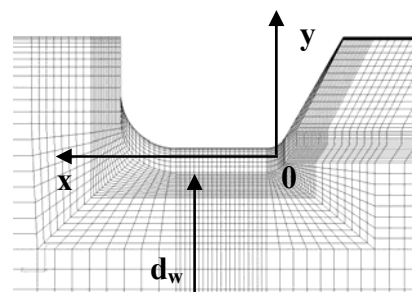


Bild A-3: Prinzipieller Torsionsformzahlverlauf in x-Richtung der Auslaufkerbe der Zahnwellen; mit Konus; $a/d_w = 0,25$; nach der NS-Hypothese

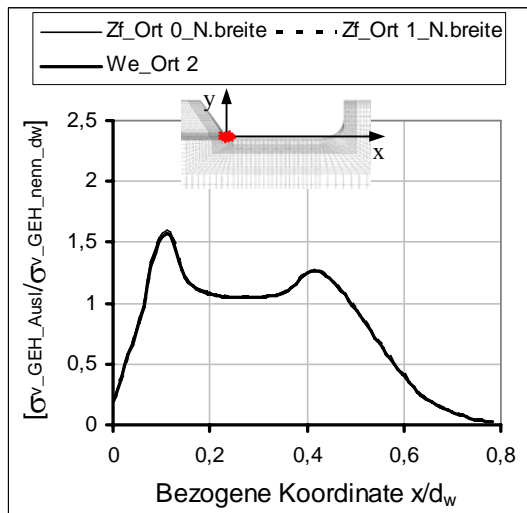
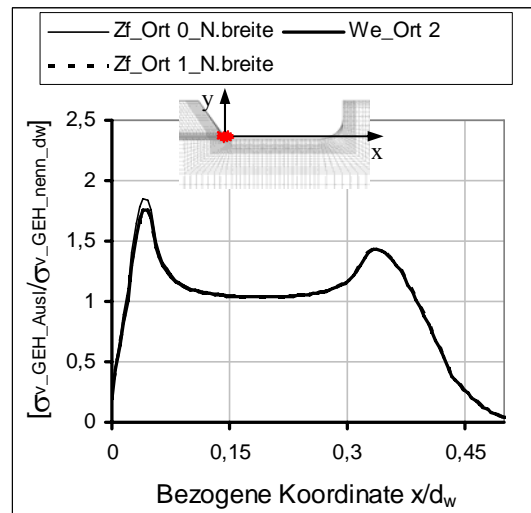
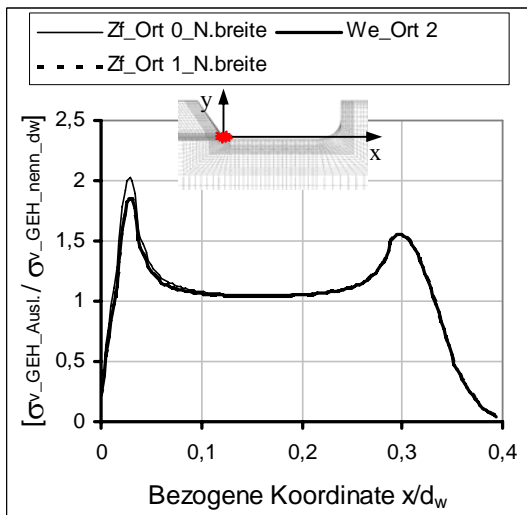
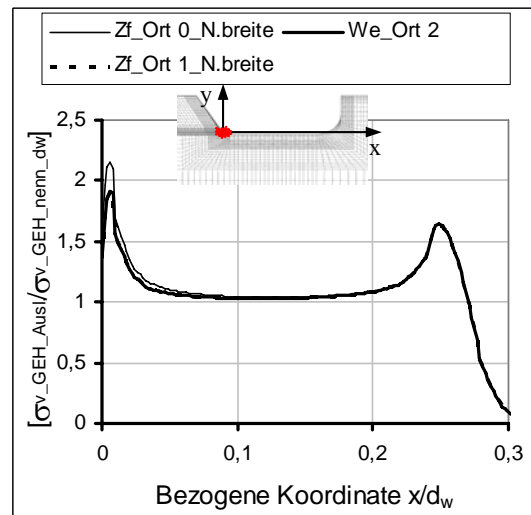
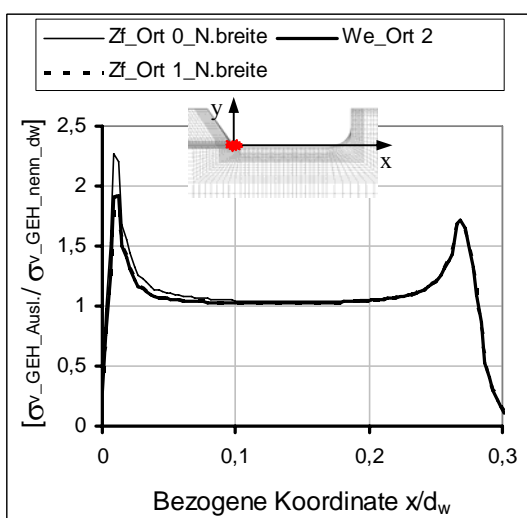
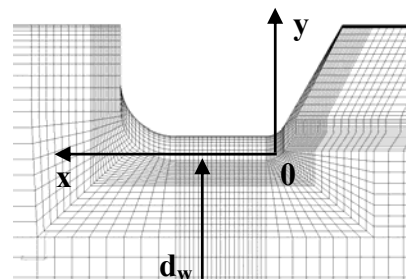
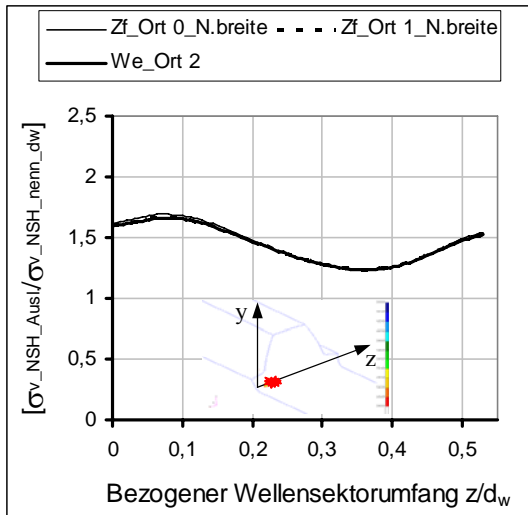
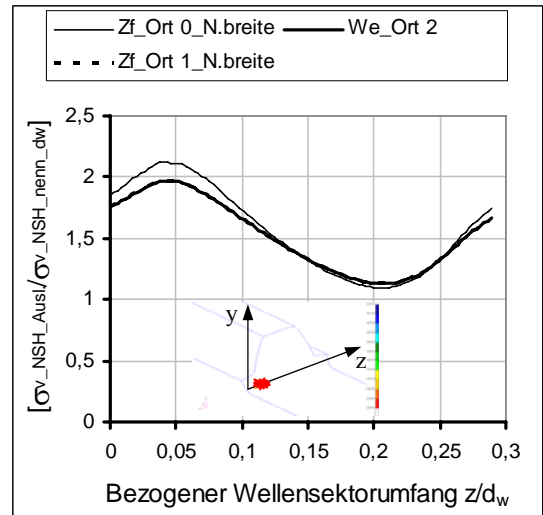
**DIN 5480–W15x2x6****DIN 5480–W25x2x11****DIN 5480–W40x2x18****DIN 5480–W60x2x28****DIN 5480–W100x2x48**

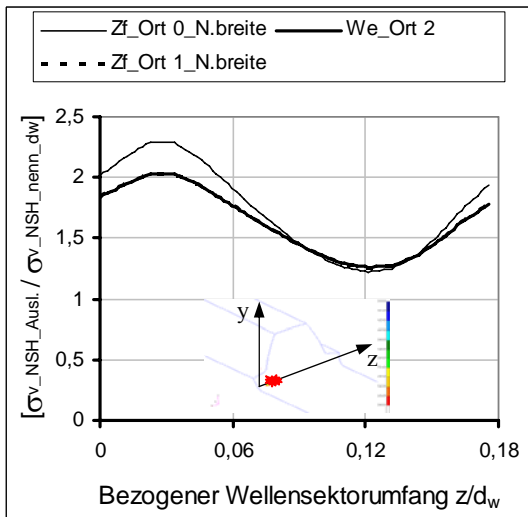
Bild A-4: Prinzipieller Torsionsformzahlverlauf in x-Richtung der Auslaufkerbe der Zahnwellen; mit Konus; $a/d_w = 0,25$; nach der GE-Hypothese



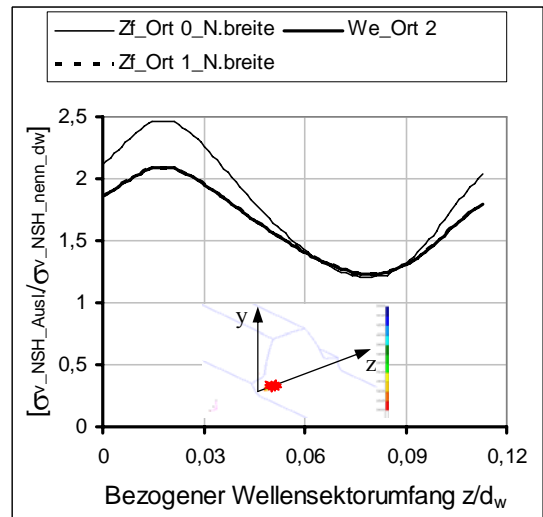
DIN 5480-W15x2x6



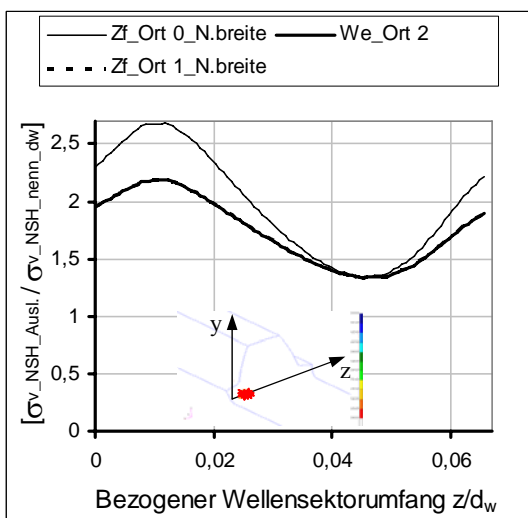
DIN 5480-W25x2x11



DIN 5480-W40x2x18



DIN 5480-W60x2x28



DIN 5480-W100x2x48

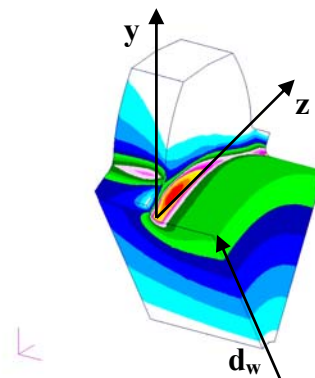


Bild A-5: Prinzipieller *Torsionsformzahlverlauf* in *Umfangsrichtung* des *freien Auslaufs* der *Zahnwellen*; mit *Konus*; $a/d_w = 0,25$; *nach der NS-Hypothese*

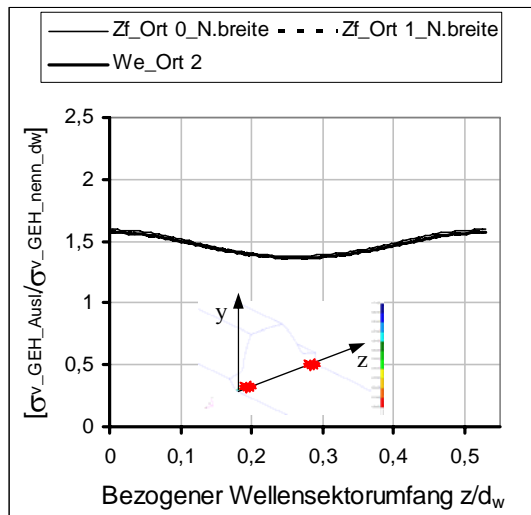
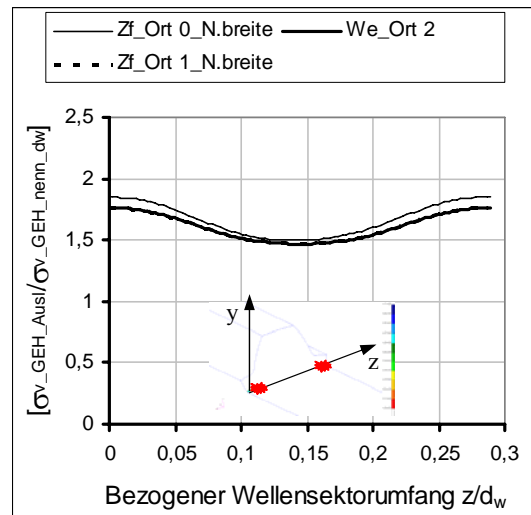
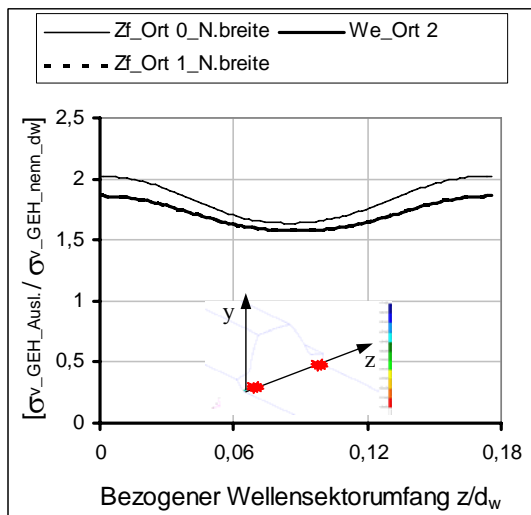
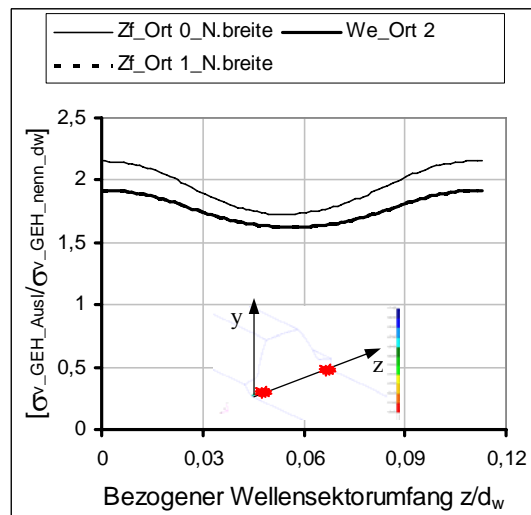
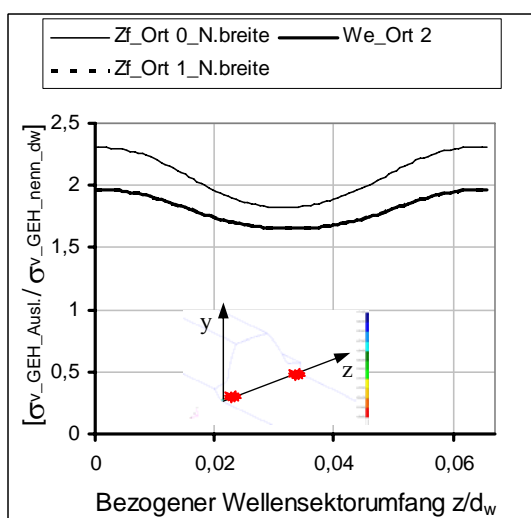
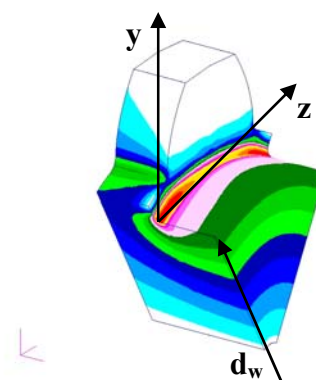
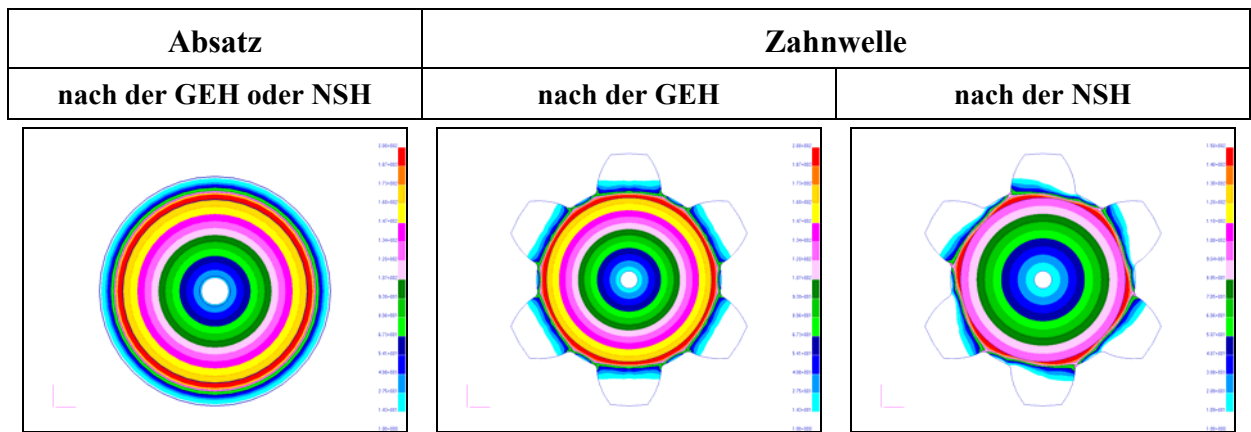
**DIN 5480-W15x2x6****DIN 5480-W25x2x11****DIN 5480-W40x2x18****DIN 5480-W60x2x28****DIN 5480-W100x2x48**

Bild A-6: Prinzipieller Torsionsformzahlverlauf in Umfangsrichtung des freien Auslaufs der Zahnwellen; mit Konus; $a/d_w = 0,25$; nach der GE-Hypothese

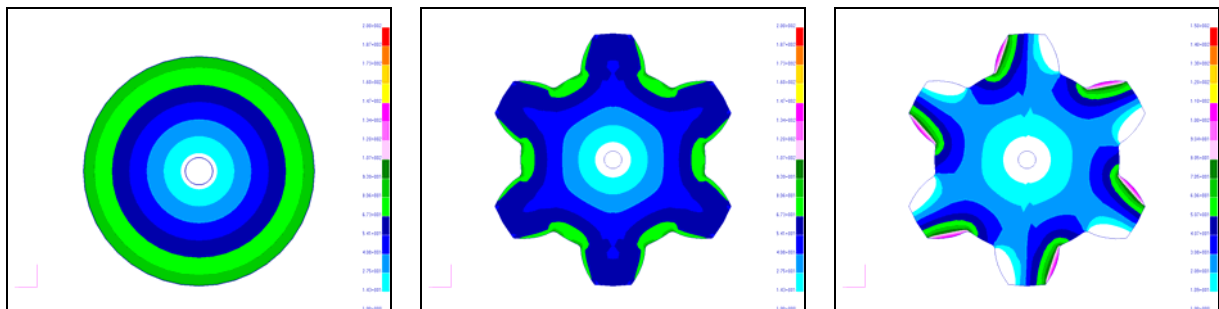


$$\alpha_{\text{tt-GEH}} = \alpha_{\text{tt-NSH}} = 1,55$$

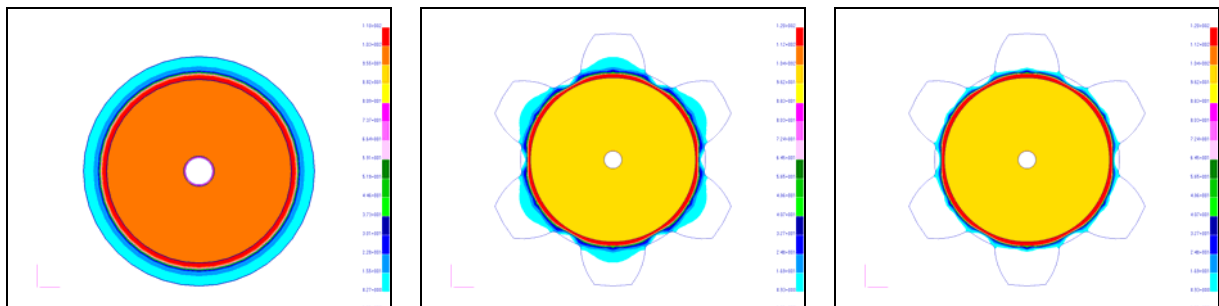
$$\alpha_{\text{tt-GEH}} = 1,97$$

$$\alpha_{\text{tt-NSH}} = 2,47$$

a) Spannungsverteilung bei **Torsion** in einem vom Krafteinleitungseinfluss ungestörten Vorder-Querschnitt



b) Spannungsverteilung bei **Torsion** an der Einspannebene

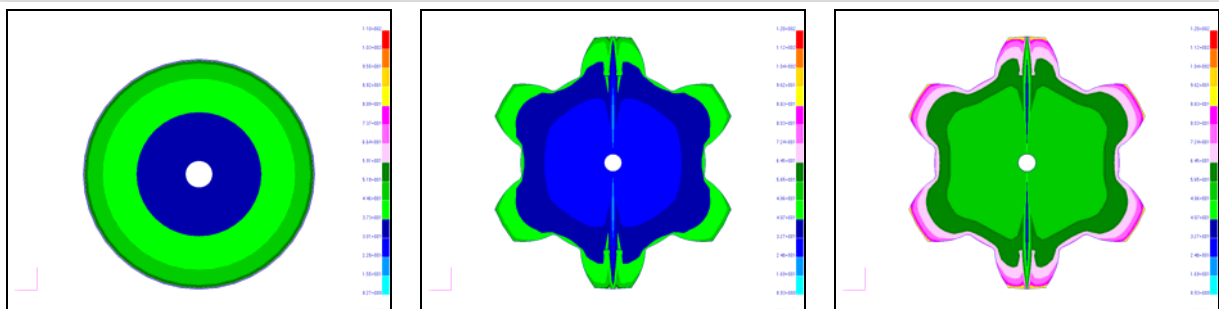


$$\alpha_{\sigma\text{zd-GEH}} = 2,06 ; \alpha_{\sigma\text{zd-NSH}} = 2,35$$

$$\alpha_{\sigma\text{zd-GEH}} = 3,0$$

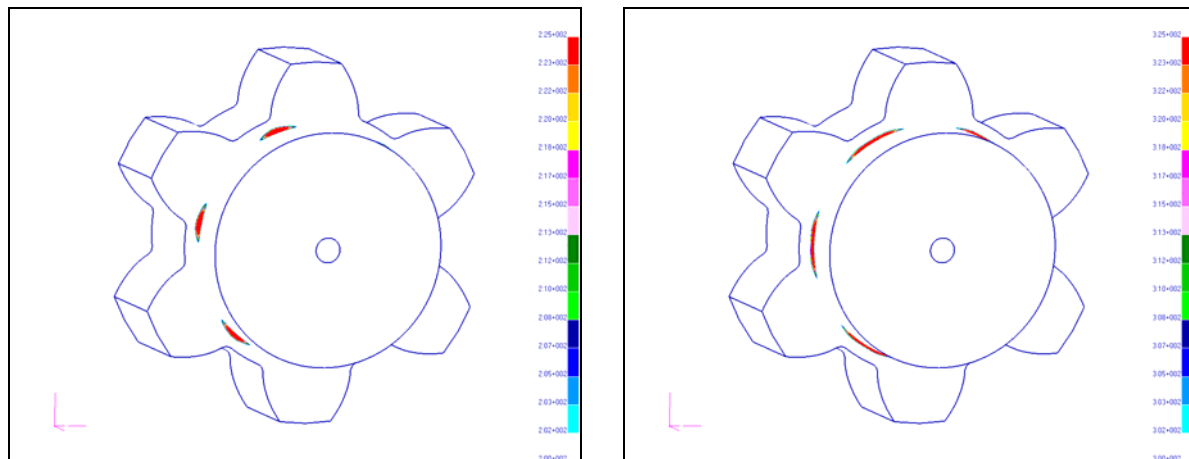
$$\alpha_{\sigma\text{zd-NSH}} = 3,43$$

c) Spannungsverteilung bei **Zug/Druck** in einem vom Krafteinleitungseinfluss ungestörten Vorder-Querschnitt

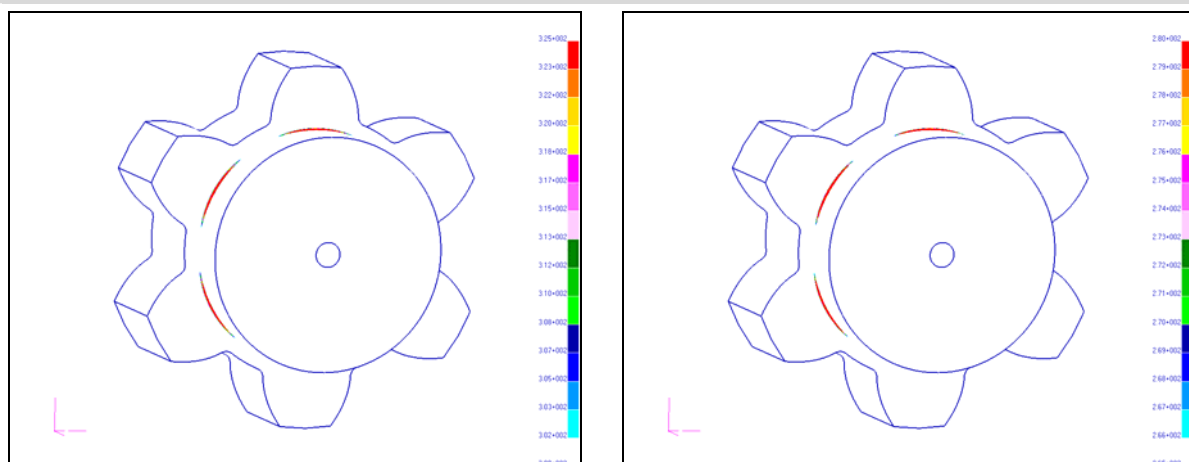


d) Spannungsverteilung bei **Zug/Druck** an der Einspannebene

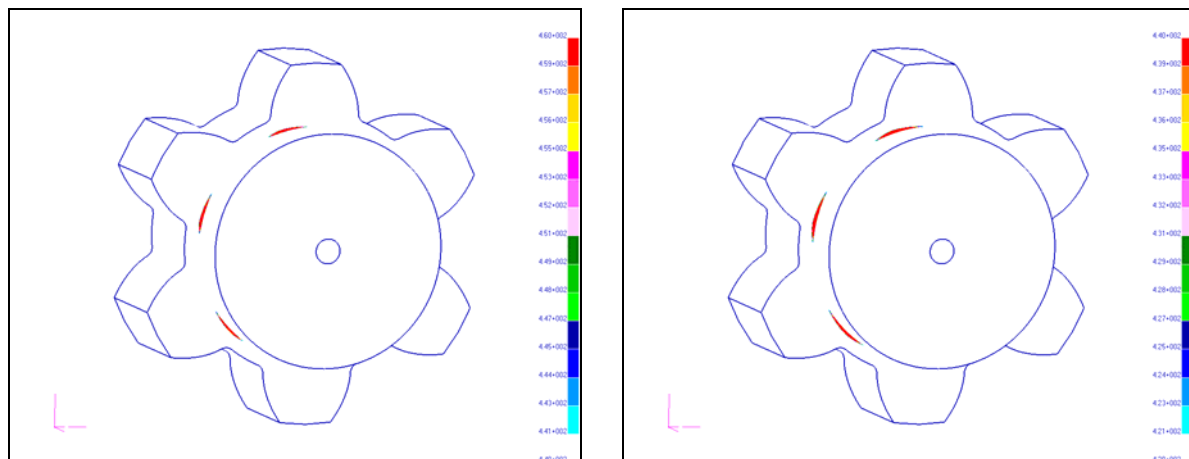
Bild A-7: Spannungsverteilungen bei **Torsion** und **Zug/Druck** an einem Absatz ($r/t = 0,4$ und $d/D = 0,8$; $d = 20$ mm; $d_i = 3,3$ mm) im Vergleich zu einer Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6 ($r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$; $d_w = 9,49$ mm; $d_i = 1$ mm); Die Nennspannung ist auf den Wellendurchmesser d_w bezogen



a) Zahnwelle bei Torsion; links: nach NSH und rechts: nach GEH

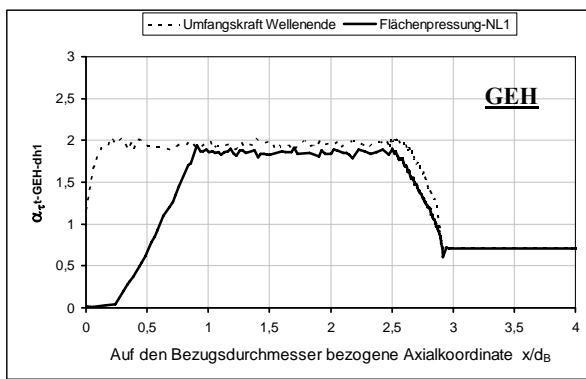


b) Zahnwelle bei Zug; links: nach NSH und rechts: nach GEH

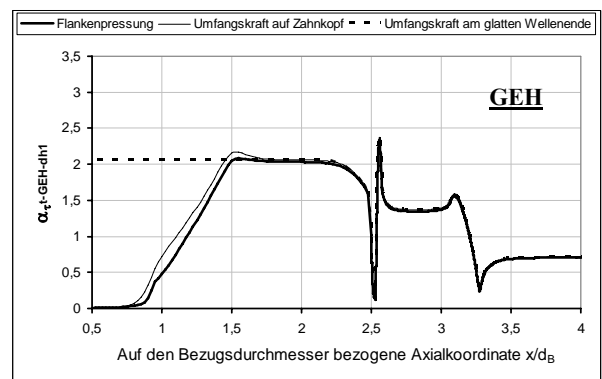


c) Zahnwelle bei kombinierter Belastung (Zug und Torsion); links: nach NSH und rechts: nach GEH

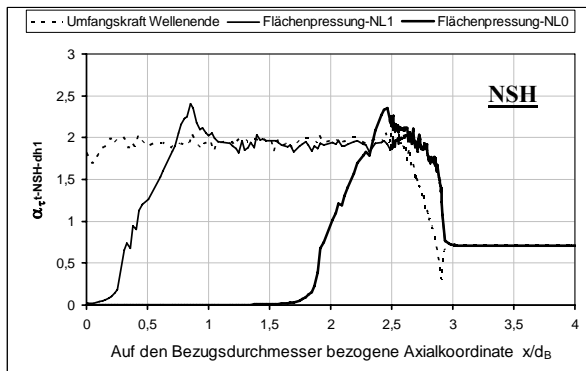
Bild A-8: Ort der Spannungskonzentration im freien Auslauf der Zahnwelle DIN 5480 W15xx2x6 ($r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$) bei Torsion, Zug/Druck und bei zusammengesetzter Belastung aus Zug und Torsion



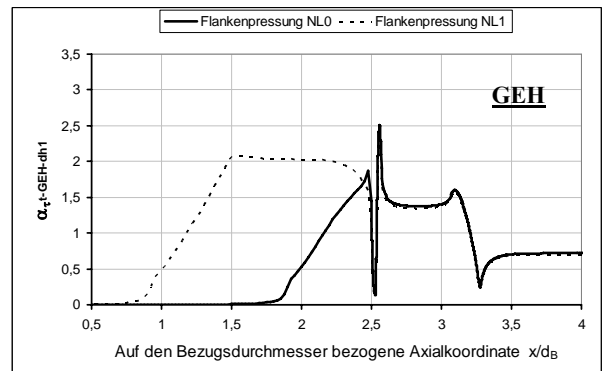
a) ZW mit gebundenem Auslauf



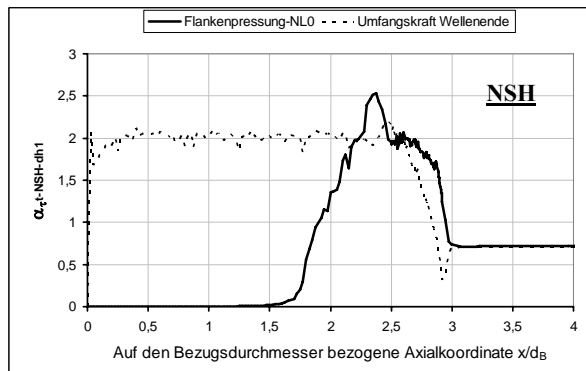
b) ZW mit freiem Auslauf



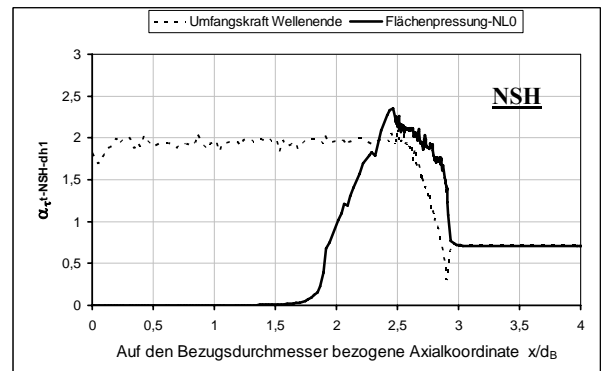
c) ZW mit gebundenem Auslauf



d) ZW mit freiem Auslauf



e) ZW mit gebundenem Auslauf und mit SRN



f) ZW mit gebundenem Auslauf ohne SRN

Bild A-9: Vergleich der Torsionsformzahlverläufe (bezogen auf den Ersatzdurchmesser $d_{h1} = 22,05 \text{ mm}$) entlang der Zahnwelle (im Zahnfuß- und Auslaufbereich der Zugseite) nach **DIN 5480 W25x1,75x13** mit freiem und gebundenem Auslauf sowie mit und ohne Sicherungsringnut, für unterschiedliche Drehmomenteinleitungen als Flankenpressung in Nabelage (0) und Nabelage (1) sowie als Umfangskräfte am ungestörten Wellenende, /Bud07/

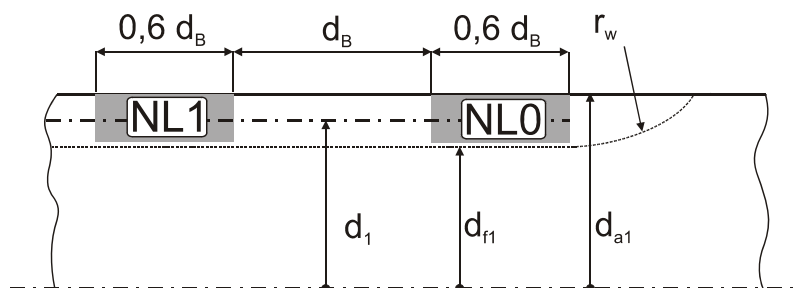
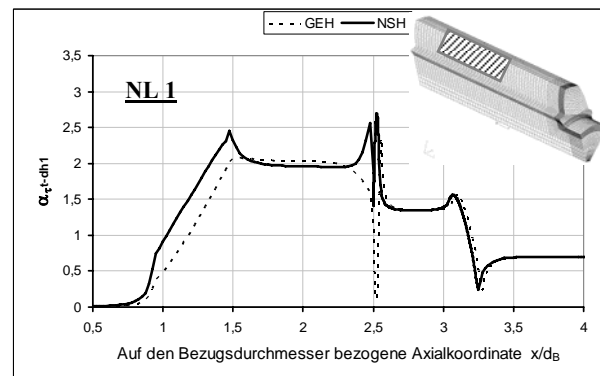
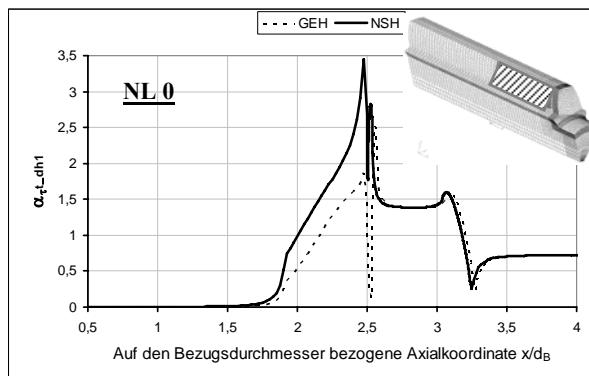
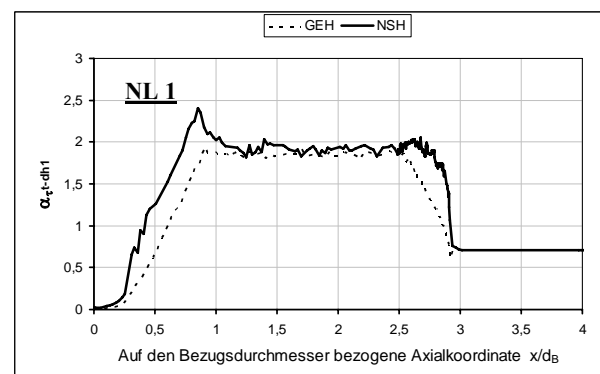
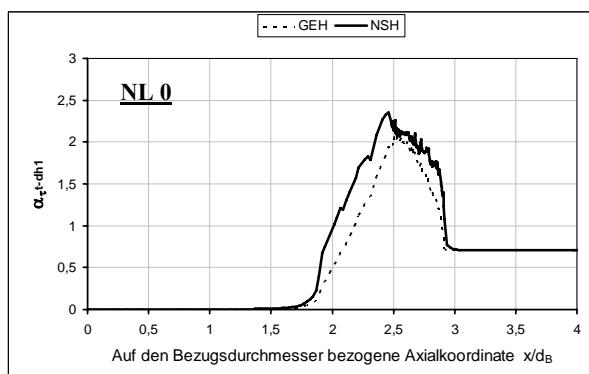


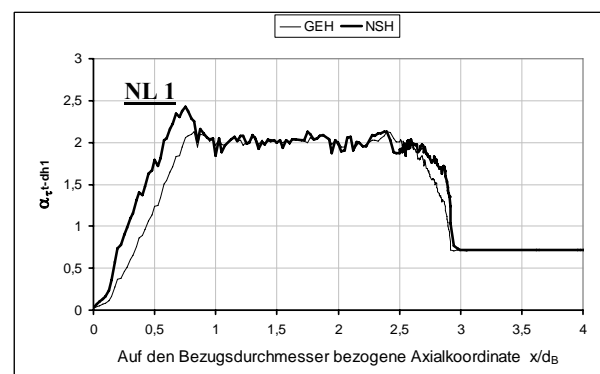
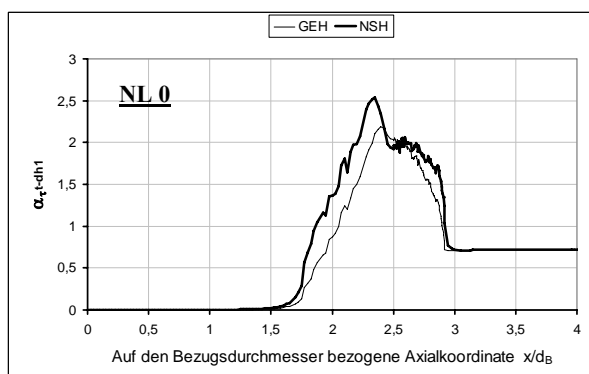
Bild A.10: Darstellung der geometrischen Lage der Flankenpressung in Nabelage 0 und 1 für die Zahnwelle mit gebundenem Auslauf, /Bud07/



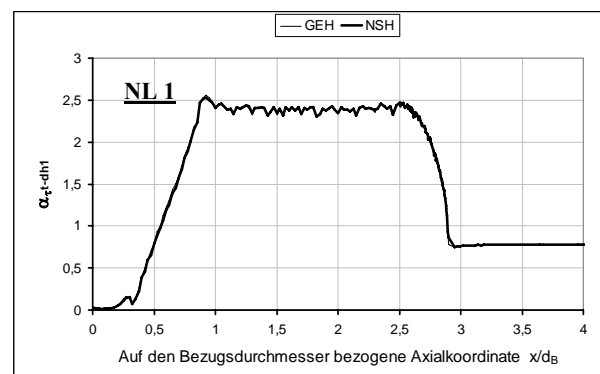
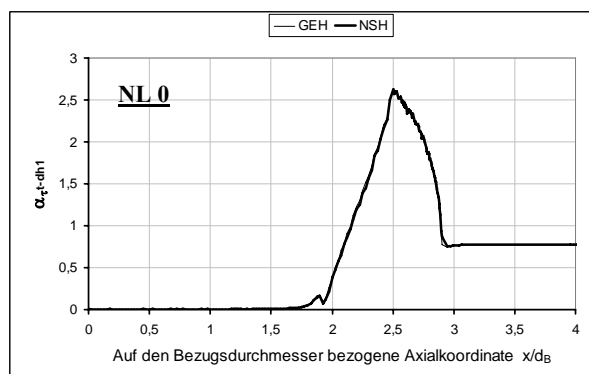
a) DIN 5480–W25x1,75x13 /N1/ mit **freiem Auslauf**, links: NL (0) und rechts: NL (1)



b) DIN 5480–W25x1,75x13 /N1/ mit **gebundenem Auslauf**, links: NL (0) und rechts: NL (1)



c) DIN 5480–W25x1,75x13 mit **gebundenem Auslauf** und **SR-Nut**, links: NL (0) und rechts: NL (1)



d) **Kerbzahnwelle** DIN 5481 W24x21 /N8/ mit **gebundenem Auslauf**, links: NL (0) und rechts: NL (1)

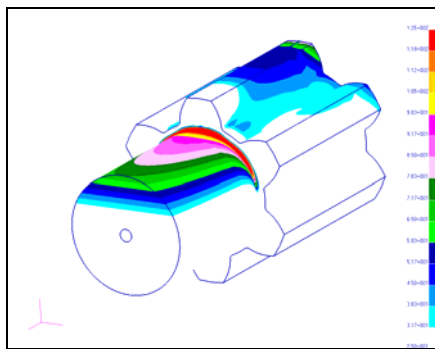
Bild A-11: Vergleich der Torsionsformzahlverläufe (bezogen auf $d_{h1} = 22,05 \text{ mm}$) entlang der Zahnwelle (im Zahnfuß- und Auslaufbereich der Zugseite) DIN 5480 W25x1,75x13 /N1/ mit freiem und gebundenem Auslauf, mit/ohne SRN, sowie entlang der Kerbzahnwelle DIN 5481 W24x21 /N8/, Flankenpressung in NL 0 und in NL 1

9.2 Anlage B

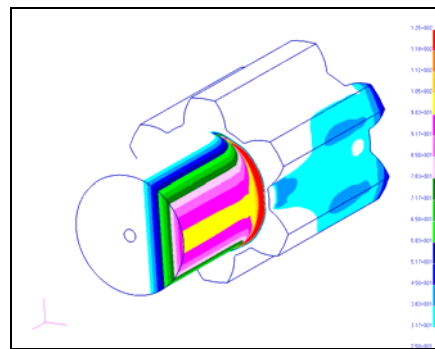
Anlage B

Simulation der biegebelasteten Zahnwellen

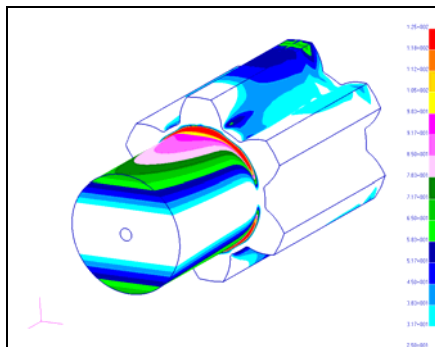
FE-Ergebnisse der Untersuchungen zu den Belastungsprinzipien und Einspannbedingungen zur Erzeugung eines reinen Biegemomentes



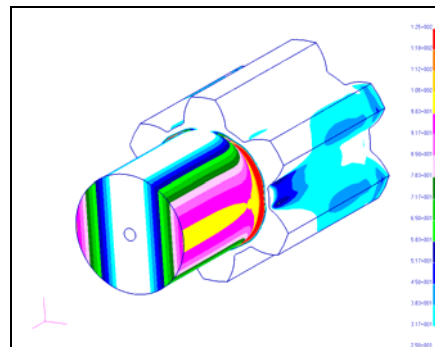
$$\alpha_{\text{ob-NSH}} = 3,11$$



$$\alpha_{\text{ob-NSH}} = 2,74$$

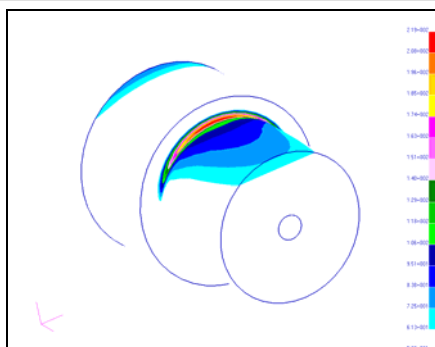


$$\alpha_{\text{ob-GEH}} = 2,72$$

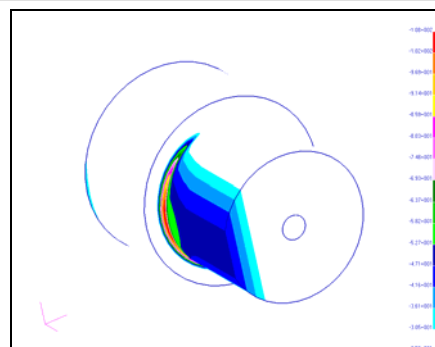


$$\alpha_{\text{ob-GEH}} = 2,39$$

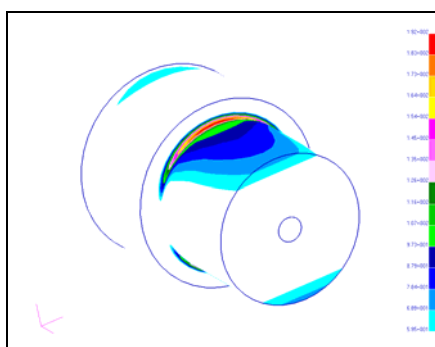
a) Zahnwelle mit freiem Auslauf DIN 5480 W15x2x6 ($r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$)



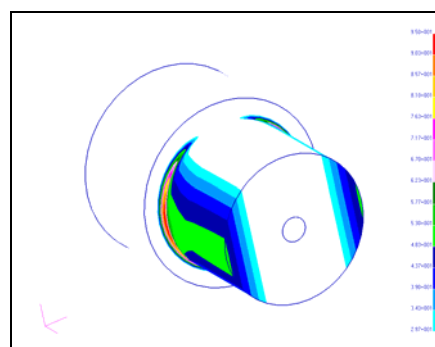
$$\alpha_{\text{ob-NSH}} = 2,19$$



$$\alpha_{\text{ob-NSH}} = 2,16$$



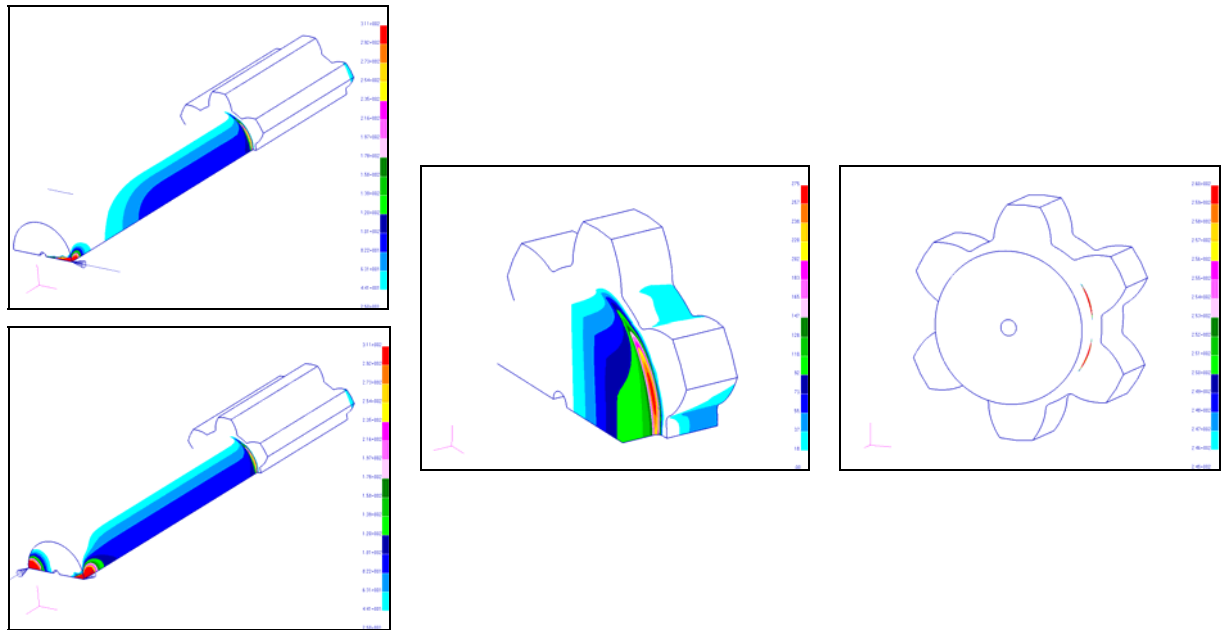
$$\alpha_{\text{ob-GEH}} = 1,92$$



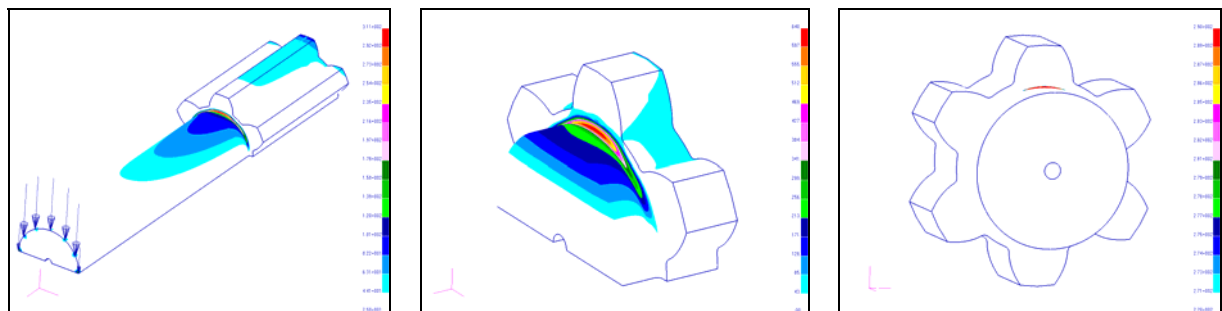
$$\alpha_{\text{ob-GEH}} = 1,89$$

b) Welle mit Absatz ($r/t = 0,4$ und $d/D = 0,8$)

Bild B-1: Vergleich der Vergleichsspannungsverteilung nach der NSH und der GEH, **oben:** an der Zahnwelle und **unten:** am Wellenabsatz, **links:** bei Querkraftbiegung und **rechts:** bei Querträger- oder Vierpunkte-Biegung. Die Nennspannung ist je Lasteinleitungsmodell auf den Wellendurchmesser d_w im Kerbgrund bezogen



a) Vierpunkte- und Querträger-Biegemodelle (Zahnücke in Krafrichtung): $\alpha_{\sigma b-NSH} = 2,74$ und $\alpha_{\sigma b-GEH} = 2,39$



b) Querkraft-Biegemodell (Vollzahn in Krafrichtung): $\alpha_{\sigma b-NSH} = 3,11$ und $\alpha_{\sigma b-GEH} = 2,72$

Bild B-2: Vergleichsspannungsverteilung und Lage der Spannungsmaxima nach der NSH bei Biegung (Vierpunkte-, Querträger- und Querkraftbiegung) einer Zahnwelle mit freiem Auslauf, DIN 5480 W15x2x6 ($r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$); die Nennspannung ist auf den Wellendurchmesser d_w bezogen

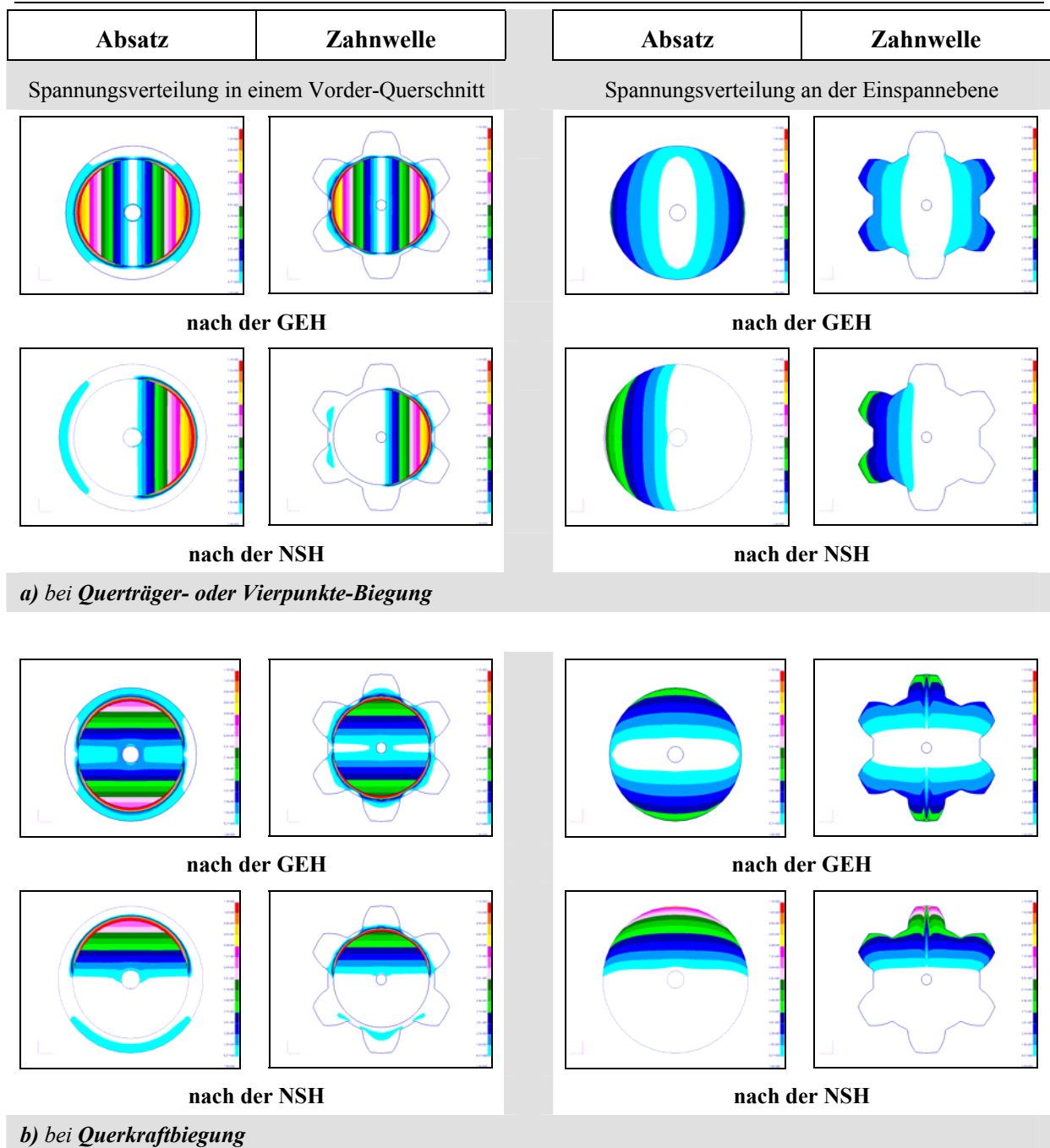


Bild B-3: Spannungsverteilungen nach der GEH und NSH an einem Absatz im Vergleich zu einer Zahnwelle; **oben:** bei Querträger- oder Vierpunkte-Biegung und **unten:** bei Querkraftbiegung, **links:** in einem durch den Krafteinleitungseinfluss ungestörten Vorder-Querschnitt und **rechts:** an der Einspannebene

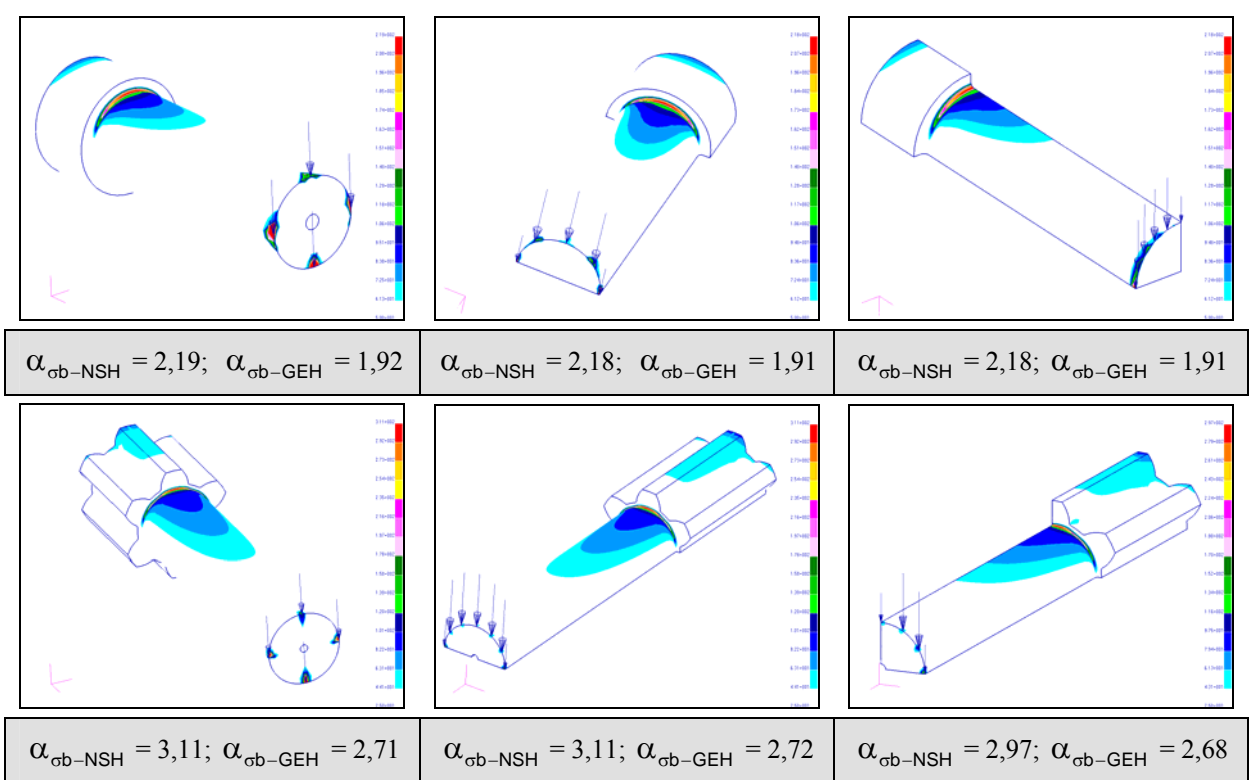


Bild B-4: Verteilung der Vergleichsspannung nach der NSH durch Querkraftbiegung bei der Verwendung eines Vollmodells, Halbmodells und Viertelmodells, **oben:** Wellenabsatz ($d = 20 \text{ mm}$; $D = 25 \text{ mm}$; $d_i = 1 \text{ mm}$; $r = 1 \text{ mm}$; $r/t = 0,4$ und $d/D = 0,8$) und **unten:** Zahnwelle mit freiem Auslauf ($d_w = 9,49 \text{ mm}$; $d_i = 1 \text{ mm}$; $d_{h1} = 11,73 \text{ mm}$; $r_w = 0,255 \text{ mm}$; $r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$)

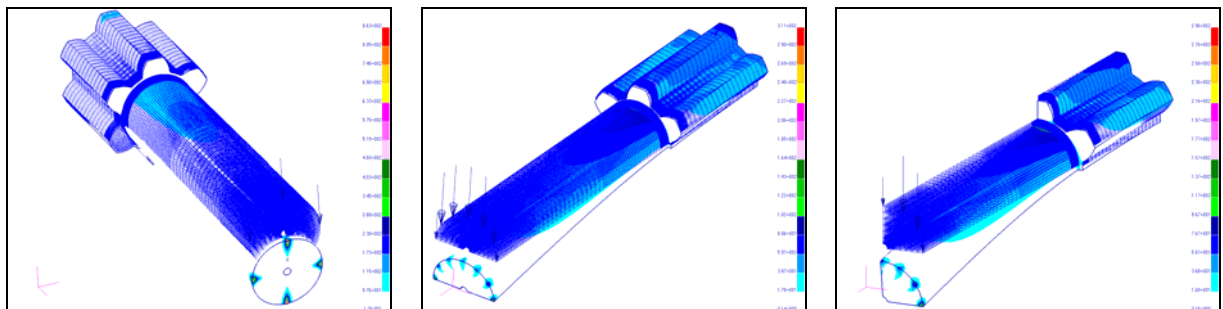


Bild B-5: Darstellung des Verformungsverhaltens einer Zahnwelle durch Querkraftbiegung bei der Verwendung eines Vollmodells, Halbmodells und Viertelmodells

Tabelle B-1: Einfluss der Querkraft auf die max. Biegespannung bzw. auf die Formzahl im freien Auslauf der Zahnwelle DIN 5480 **W15x2x6** ($d_w/d_{a1} = 0,65$; $r_w/t_{a1} = 0,1$; $d_w = 9,49$ mm; $d_i = 1$ mm; $x = 0,2$ und $d_{h1} = 11,73$ mm). Verhältnis: Hebelarmlänge/Wellendurchmesser $l_w/d_w = 3 = \text{const.}$ Die Nennspannung bei Querträgerbiegung $\sigma_{b-nenn} = \text{const.} = 100$ N/mm²; $\tau_{m-nenn} = \text{veränderlich}$. Formzahl der querkraftfreien Biegung $\alpha_{\sigma b_NSH} = 2,88$

Auswertung der FE-Ergebnisse im freien Auslaufbereich DIN 5480 W15x2x6										
			$\frac{\tau_{m-nenn}}{\sigma_{b-nenn}}$	$\sigma_{b(Fq,Mb)_max}$		$\alpha_{\sigma b(Fq,Mb)_dw}$		$\frac{\alpha_{\sigma b-GEH}}{\alpha_{\sigma b-NSH}}$	$\frac{\alpha_{\sigma b(Fq,Mb)}}{\alpha_{\sigma b}}$	
l_w/d_w	σ_{b-nenn}	τ_{m-nenn}		GEH	NSH	GEH	NSH		bezogene Formzahl	prozentuale Abweichung
Formzahl der querkraftfreien Biegung $\alpha_{\sigma b_NSH} = 2,88$										
3	100	0	0,000	261	288	2,61	2,88	0,91	1	0
3	100	0,30	0,003	287	317	2,87	3,17	0,91	1,10	10,07
3	100	0,74	0,007	327	361	3,27	3,61	0,91	1,25	25,35
3	100	1,49	0,015	394	435	3,94	4,35	0,91	1,51	51,04
3	100	2,23	0,022	461	508	4,61	5,08	0,91	1,76	76,39
3	100	2,97	0,030	528	583	5,28	5,83	0,91	2,02	102,43
3	100	3,71	0,037	595	657	5,95	6,57	0,91	2,28	128,13
3	100	4,46	0,045	660	732	6,6	7,32	0,90	2,54	154,17
3	100	5,94	0,059	796	878	7,96	8,78	0,91	3,05	204,86
3	100	8,91	0,089	1060	1170	10,6	11,7	0,91	4,06	306,25
3	100	14,85	0,149	1600	1770	16	17,7	0,90	6,15	514,58
3	100	20,79	0,208	2140	2360	21,4	23,6	0,91	8,19	719,44
3	100	29,70	0,297	2940	3250	29,4	32,5	0,90	11,28	1028,47
3	100	35,64	0,356	3470	3830	34,7	38,3	0,91	13,30	1229,86
3	100	44,56	0,446	4280	4720	42,8	47,2	0,91	16,39	1538,89
3	100	59,408	0,594	5620	6210	56,2	62,1	0,90	21,56	2056,25

Prozentuale Abweichung der Formzahl $\alpha_{\sigma b(Fq,Mb)_NSH}$ von der querkraftfreien Biegeformzahl

$$\alpha_{\sigma b} \text{ ist: } \frac{\alpha_{\sigma b(Fq,Mb)_NSH} - \alpha_{\sigma b_NSH}}{\alpha_{\sigma b_NSH}} \cdot 100\%.$$

Tabelle B-2: Einfluss der Querkraft auf die max. Biegespannung bzw. auf die Formzahl im freien Auslauf der Zahnwellen W15x2x6 ($d_w/d_{al} = 0,65$; $r_w/t_{al} = 0,1$) und W40x2x18 ($d_w/d_{al} = 0,85$; $r_w/t_{al} = 0,3$). Verhältnis: Hebelarmlänge/Wellendurchmesser $l_w/d_w = \text{veränderlich} = 0,05 \text{ bis } 4$. Bedingung: $\sigma_{b-nenn} = \text{veränderlich}$; $\tau_{m-nenn} = \text{const.} = 3 \text{ N/mm}^2$ für W15x2x6 und $\tau_{m-nenn} = \text{const.} = 3,17 \text{ N/mm}^2$ für W40x2x18

Auswertung der FE-Ergebnisse im freien Auslaufbereich DIN 5480 W40x2x18										
Formzahl der querkraftfreien Biegung $\alpha_{\sigma b_NSH} = 2,42$										
			$\frac{\tau_{m-nenn}}{\sigma_{b-nenn}}$	$\sigma_{b(Fq,Mb)_max}$		$\alpha_{\sigma b(Fq,Mb)_dw}$		$\frac{\alpha_{\sigma b-GEH}}{\alpha_{\sigma b-NSH}}$	$\frac{\alpha_{\sigma b(Fq,Mb)}}{\alpha_{\sigma b}}$	
l_w/d_w	σ_{b_nenn}	τ_{m_nenn}		GEH	NSH	GEH	NSH		bezogene Formzahl	prozentuale Abweichung
3,964	100	3,17	0,032	223	242	2,23	2,42	0,92	1	0
3,475	87,67	3,17	0,036	197	213	2,25	2,43	0,92	1,004	0,40
3,108	78,42	3,17	0,040	176	191	2,24	2,44	0,92	1,007	0,65
2,68	67,62	3,17	0,047	153	166	2,26	2,45	0,92	1,014	1,44
2,252	56,82	3,17	0,056	129	140	2,27	2,46	0,92	1,018	1,81
1,824	46,03	3,17	0,069	105	114	2,28	2,48	0,92	1,023	2,34
1,396	35,23	3,17	0,090	81	88,1	2,30	2,50	0,92	1,033	3,33
0,969	24,44	3,17	0,130	57,1	62,2	2,34	2,55	0,92	1,052	5,17
0,541	13,64	3,17	0,232	33,3	36,4	2,44	2,67	0,91	1,102	10,24
0,327	8,25	3,17	0,384	21,8	23,7	2,64	2,87	0,92	1,188	18,76
0,113	2,85	3,17	1,111	17,3	13,1	6,07	4,60	1,32	1,899	89,93
0,052	1,31	3,17	2,414	Naheinfluss						

Auswertung der FE-Ergebnisse im freien Auslaufbereich DIN 5480 W15x2x6										
Formzahl der querkraftfreien Biegung $\alpha_{\sigma b_NSH} = 2,97$										
			$\frac{\tau_{m-nenn}}{\sigma_{b-nenn}}$	$\sigma_{b(Fq,Mb)_max}$		$\alpha_{\sigma b(Fq,Mb)_dw}$		$\frac{\alpha_{\sigma b-GEH}}{\alpha_{\sigma b-NSH}}$	$\frac{\alpha_{\sigma b(Fq,Mb)}}{\alpha_{\sigma b}}$	
l_w/d_w	σ_{b_nenn}	τ_{m_nenn}		GEH	NSH	GEH	NSH		bezogene Formzahl	prozentuale Abweichung
4,2	100	3	0,030	268	297	2,68	2,97	0,90	1	0
3,155	74,94	3	0,040	203	224	2,71	2,99	0,91	1,007	0,67
2,3	54,82	3	0,055	150	166	2,74	3,03	0,90	1,020	1,95
1,56	37,146	3	0,081	104	115	2,80	3,10	0,90	1,042	4,24
1,03	24,53	3	0,122	71,3	78,6	2,91	3,20	0,91	1,079	7,88
0,5	11,94	3	0,251	38,6	42,6	3,23	3,57	0,91	1,201	20,13
0,185	4,38	3	0,685	20,3	22,7	4,64	5,18	0,89	1,745	74,51

Einschätzung: Die zur Erzeugung einer reinen querkraftfreien Biegung notwendige Länge des Hebelarmes ist $l_w \approx 2,5x d_w$.

9.3 Anlage C

Anlage C

Formzahlberechnung an Zahnwellen mit freiem Auslauf

FE-Werte und Verläufe der Formzahlen in Abhängigkeit von dem Durchmesser Verhältnis und der Kerbschärfe für die Belastungsarten Torsion, Biegung und Zug/Druck

Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf

Interessante Positionen zur Auswertung der maximalen Vergleichsspannungen nach der GEH und NSH bei Torsionsbelastung für die Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf

Tabelle C-1: Formzahlwerte in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} für die Zahnwelle **DIN 5480 W15x2x6** mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 14,6 \text{ mm}$; $d_{h1} = 11,735 \text{ mm}$; $\rho_{f\text{-}min}/m = 0,16$; $d_i = 1 \text{ mm}$) für zwei unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen d_w und d_{h1}

Zahnwelle mit freiem Auslauf
DIN 5480 W15x2x6
Belastungsart: Torsion

d_w/d_{a1}	0,50	0,55	0,60	0,65	0,675
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\tau\text{t-NSH-dw}}$				
0,04	1,87	2,30	2,83	3,44	3,80
0,06	1,66	2,01	2,44	2,97	3,27
0,08	1,53	1,84	2,21	2,68	2,93
0,10	1,41	1,70	2,05	2,47	2,70
0,15	1,32	1,54	1,79	2,13	2,31
0,20	1,28	1,45	1,64	1,92	2,07
0,30	1,19	1,34	1,51	1,70	1,80
0,40	1,14	1,27	1,42	1,58	1,64
0,50	1,09	1,22	1,36	1,49	1,53

d_w/d_{a1}	0,50	0,55	0,60	0,65	0,675
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\tau\text{t-NSH-dh1}}$				
0,04	7,77	7,18	6,80	6,50	6,42
0,06	6,88	6,27	5,87	5,62	5,52
0,08	6,36	5,74	5,31	5,07	4,95
0,10	5,86	5,31	4,93	4,67	4,57
0,15	5,50	4,81	4,30	4,03	3,90
0,20	5,33	4,53	3,94	3,63	3,50
0,30	4,94	4,18	3,63	3,21	3,04
0,40	4,72	3,96	3,41	2,99	2,78
0,50	4,55	3,81	3,27	2,82	2,59

Belastungsart: Biegung

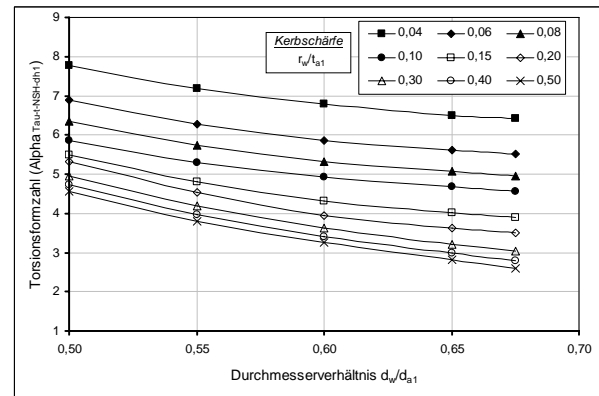
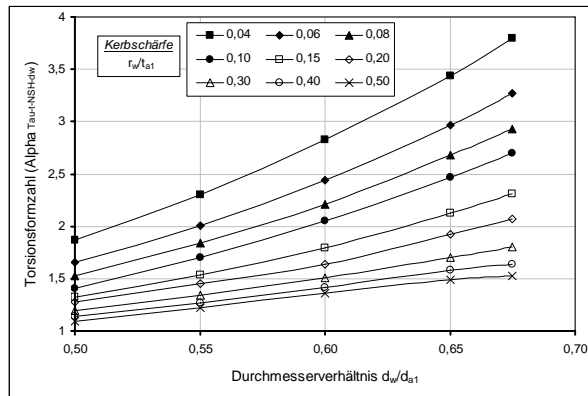
d_w/d_{a1}	0,50	0,55	0,60	0,65	0,675
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma\text{b-NSH-dw}}$				
0,04	2,92	3,24	3,61	4,03	4,27
0,06	2,48	2,75	3,06	3,44	3,64
0,08	2,21	2,45	2,73	3,08	3,25
0,10	2,02	2,25	2,51	2,81	2,98
0,15	1,79	1,96	2,16	2,41	2,53
0,20	1,66	1,80	1,96	2,17	2,27
0,30	1,48	1,61	1,75	1,90	1,99
0,40	1,40	1,50	1,61	1,74	1,80
0,50	1,31	1,42	1,53	1,63	1,69

d_w/d_{a1}	0,50	0,55	0,60	0,65	0,675
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma\text{b-NSH-dh1}}$				
0,04	12,13	10,11	8,68	7,62	7,20
0,06	10,31	8,58	7,35	6,50	6,14
0,08	9,18	7,65	6,56	5,82	5,49
0,10	8,41	7,03	6,04	5,32	5,03
0,15	7,42	6,12	5,19	4,56	4,28
0,20	6,90	5,63	4,72	4,10	3,84
0,30	6,15	5,04	4,20	3,59	3,35
0,40	5,80	4,68	3,88	3,30	3,05
0,50	5,46	4,43	3,67	3,09	2,85

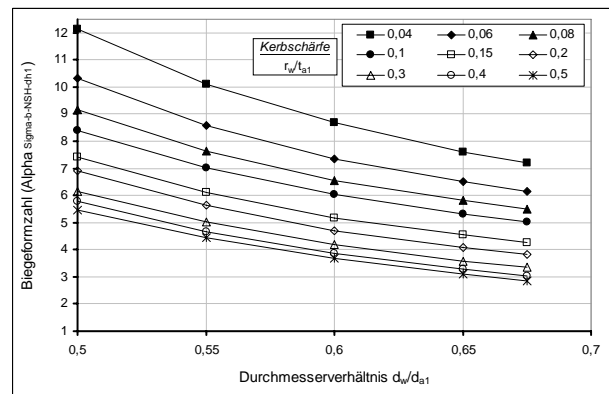
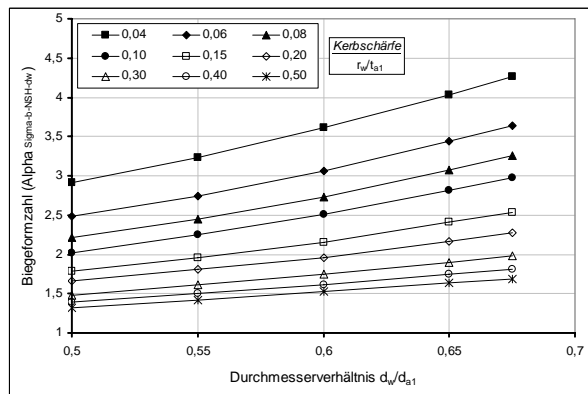
Belastungsart: Zug/Druck

d_w/d_{a1}	0,50	0,55	0,60	0,65	0,675
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma\text{zd-NSH-dw}}$				
0,04	4,26	4,50	4,75	5,02	5,16
0,06	3,55	3,76	3,98	4,25	4,37
0,08	3,11	3,31	3,52	3,78	3,90
0,10	2,84	3,03	3,23	3,44	3,55
0,15	2,43	2,58	2,74	2,94	3,01
0,20	2,21	2,34	2,48	2,63	2,70
0,30	1,92	2,05	2,16	2,29	2,37
0,40	1,79	1,88	1,97	2,08	2,15
0,50	1,67	1,76	1,85	1,94	2,01

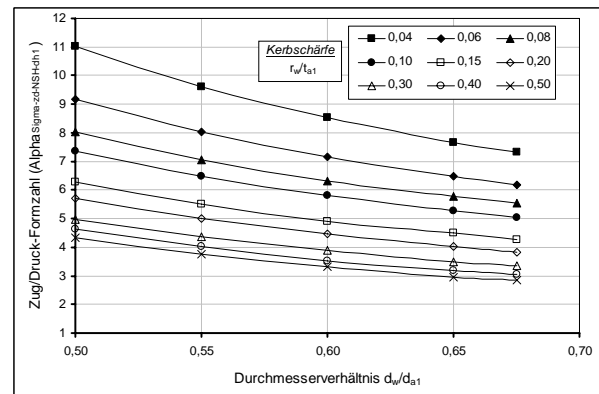
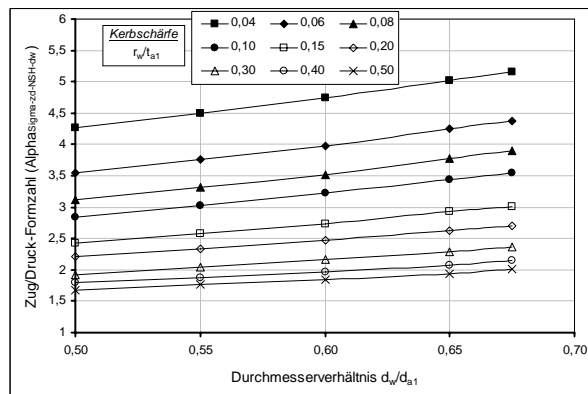
d_w/d_{a1}	0,50	0,55	0,60	0,65	0,675
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma\text{zd-NSH-dh1}}$				
0,04	11,02	9,61	8,52	7,68	7,32
0,06	9,18	8,03	7,14	6,50	6,19
0,08	8,04	7,07	6,32	5,78	5,53
0,10	7,35	6,47	5,80	5,26	5,03
0,15	6,28	5,51	4,92	4,50	4,27
0,20	5,71	5,00	4,45	4,02	3,83
0,30	4,96	4,38	3,88	3,50	3,36
0,40	4,64	4,02	3,54	3,18	3,05
0,50	4,33	3,76	3,32	2,97	2,85



a) Formzahlen bei Torsionsbeanspruchung



b) Formzahlen bei Biegebeanspruchung



c) Formzahlen bei Zug/Druckbeanspruchung

Bild C-1: Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei **Torsion, Biegung und Zug/Druck** in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} für die Zahnwelle **DIN 5480 W15x2x6** mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 14,6$ mm; $d_i = 1$ mm; $d_{h1} = 11,735$ mm; $p_{f-min}/m = 0,16$); **links:** Nennspannung auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und **rechts:** Nennspannung auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen

Tabelle C-2: Formzahlwerte in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesserverhältnis d_w/d_{a1} für die Zahnwelle **DIN 5480 W25x2x11** mit freiem Auslauf ($x_l = 0,2$; $d_{a1} = 24,6$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 21,65$ mm; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$) für zwei unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen d_w und d_{h1}

Zahnwelle mit freiem Auslauf
DIN 5480 W25x2x11
Belastungsart: Torsion

d_w/d_{a1}	0,40	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,775	0,80	0,83
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\tau t-NSH-dw}$								
0,04	1,89	2,09	2,36	2,54	2,79	3,31	3,70	4,46	6,80
0,06	1,68	1,87	2,08	2,24	2,43	2,84	3,18	3,76	6,10
0,08	1,55	1,73	1,91	2,05	2,21	2,55	2,86	3,48	5,61
0,10	1,47	1,62	1,80	1,92	2,05	2,37	2,64	3,07	5,28
0,15	1,35	1,47	1,62	1,73	1,82	2,06	2,28	2,76	4,63
0,20	1,28	1,38	1,51	1,58	1,67	1,88	2,08	2,59	4,00
0,30	1,20	1,28	1,39	1,45	1,50	1,66	1,84	2,75	3,52
0,40	1,15	1,22	1,32	1,37	1,41	1,53	1,93	2,65	3,22
0,50	1,12	1,18	1,27	1,31	1,36	1,45	2,06	2,57	2,98

d_w/d_{a1}	0,40	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,775	0,80	0,83
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\tau t-NSH-dh1}$								
0,04	20,13	11,40	7,45	6,29	5,54	5,35	5,42	5,94	8,13
0,06	17,89	10,17	6,56	5,55	4,83	4,59	4,66	5,01	7,29
0,08	16,48	9,41	6,03	5,08	4,39	4,12	4,19	4,63	6,71
0,10	15,62	8,83	5,68	4,76	4,07	3,83	3,87	4,09	6,31
0,15	14,39	8,02	5,11	4,28	3,62	3,33	3,34	3,67	5,53
0,20	13,65	7,53	4,77	3,91	3,32	3,04	3,05	3,45	4,78
0,30	12,73	6,98	4,39	3,59	2,98	2,68	2,69	3,66	4,21
0,40	12,24	6,65	4,17	3,39	2,80	2,47	2,83	3,53	3,85
0,50	11,93	6,43	4,01	3,25	2,70	2,34	3,02	3,42	3,56

Belastungsart: Biegung

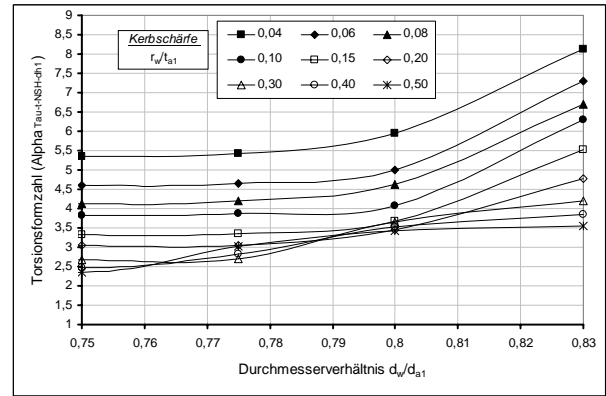
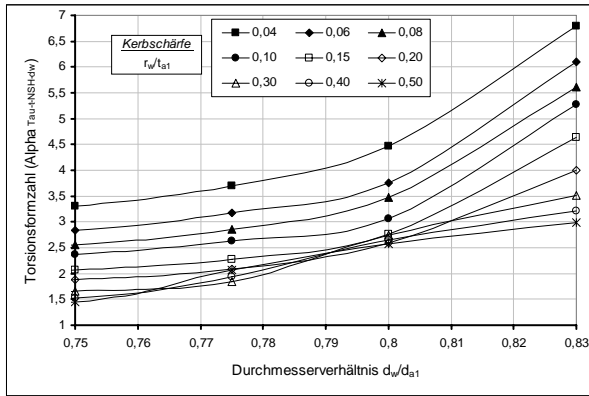
d_w/d_{a1}	0,40	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,775	0,80	0,83
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma b-NSH-dw}$								
0,04		3,30	3,84	4,18	4,52	4,86	4,99	5,29	5,15
0,06		2,82	3,26	3,53	3,81	4,08	4,17	4,44	4,48
0,08		2,54	2,91	3,15	3,39	3,61	3,73	3,94	4,06
0,10		2,33	2,67	2,87	3,06	3,30	3,44	3,60	3,78
0,15		2,01	2,30	2,47	2,63	2,83	2,94	3,01	3,31
0,20		1,83	2,07	2,21	2,34	2,55	2,63	2,65	2,85
0,30		1,61	1,81	1,94	2,06	2,20	2,24	2,29	2,62
0,40		1,49	1,67	1,76	1,86	1,98	2,01	2,05	2,52
0,50		1,41	1,54	1,63	1,72	1,84	1,85	1,91	2,41

d_w/d_{a1}	0,40	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,775	0,80	0,83
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma b\text{-NSH-dh1}}$								
0,04		18,00	12,12	10,35	8,98	7,86	7,30	7,04	6,16
0,06		15,38	10,29	8,75	7,56	6,59	6,11	5,91	5,36
0,08		13,85	9,18	7,80	6,73	5,83	5,46	5,25	4,85
0,10		12,71	8,43	7,10	6,08	5,33	5,04	4,79	4,52
0,15		10,96	7,26	6,11	5,23	4,57	4,31	4,01	3,96
0,20		9,98	6,53	5,46	4,65	4,12	3,85	3,53	3,41
0,30		8,78	5,71	4,79	4,09	3,55	3,28	3,05	3,13
0,40		8,13	5,25	4,37	3,70	3,20	2,94	2,73	3,01
0,50		7,69	4,86	4,03	3,41	2,97	2,71	2,54	2,88

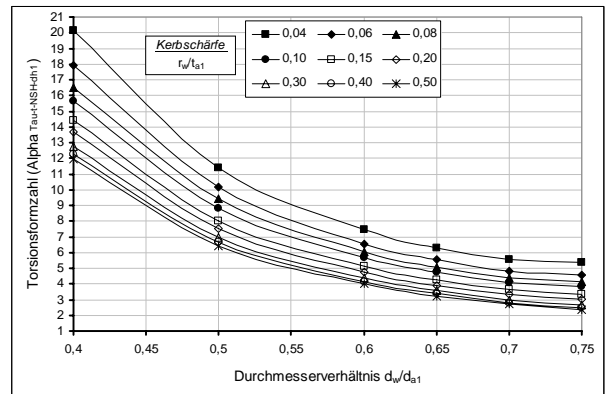
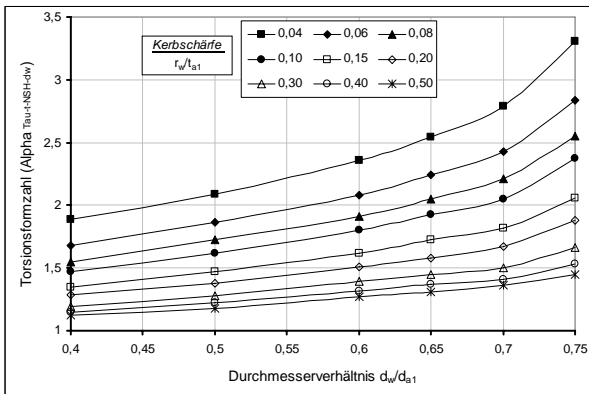
Belastungsart: Zug/Druck

d_w/d_{a1}	0,40	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,775	0,80	0,83
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma zd\text{-NSH-dw}}$								
0,04	3,60	4,05	4,56	4,86	5,12	5,35	5,40	5,63	5,45
0,06	3,05	3,46	3,87	4,12	4,30	4,49	4,55	4,73	4,74
0,08	2,78	3,10	3,46	3,65	3,82	3,99	4,06	4,20	4,29
0,10	2,56	2,85	3,17	3,34	3,47	3,65	3,74	3,84	4,00
0,15	2,19	2,44	2,71	2,85	2,98	3,13	3,22	3,35	3,50
0,20	1,97	2,20	2,45	2,60	2,68	2,80	2,87	2,85	3,01
0,30	1,72	1,92	2,14	2,25	2,32	2,43	2,47	2,46	2,77
0,40	1,58	1,76	1,95	2,06	2,11	2,20	2,22	2,23	2,66
0,50	1,47	1,64	1,82	1,90	1,99	2,00	2,03	2,04	2,55

d_w/d_{a1}	0,40	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,775	0,80	0,83
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma zd\text{-NSH-dh1}}$								
0,04	17,43	12,55	9,81	8,90	8,09	7,37	6,96	6,81	6,14
0,06	14,76	10,72	8,33	7,54	6,80	6,18	5,87	5,72	5,34
0,08	13,46	9,60	7,43	6,68	6,04	5,49	5,24	5,08	4,83
0,10	12,39	8,83	6,82	6,12	5,49	5,03	4,82	4,65	4,51
0,15	10,60	7,56	5,83	5,22	4,71	4,31	4,15	4,05	3,94
0,20	9,54	6,82	5,27	4,76	4,24	3,86	3,70	3,45	3,39
0,30	8,33	5,95	4,59	4,12	3,67	3,35	3,19	2,98	3,12
0,40	7,65	5,45	4,20	3,77	3,34	3,03	2,86	2,70	3,00
0,50	7,12	5,08	3,92	3,48	3,15	2,75	2,62	2,47	2,87

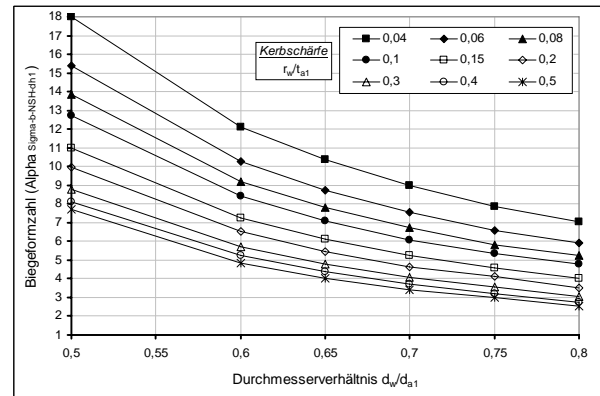
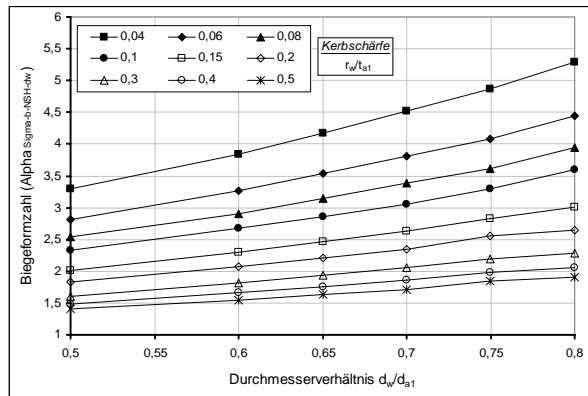


a) Torsionsformzahlen für große Durchmesserhältnisse d_w/d_{a1}



b) Torsionsformzahlen für kleine Durchmesserhältnisse d_w/d_{a1}

Bild C-2: Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei **Torsion** in Abhängigkeit von Kerbschärfe und Durchmesser Verhältnis für die Zahnwelle **DIN 5480 W25x2x11** mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 24,6$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 21,65$ mm; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$); **links:** Nennspannung auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und **rechts:** Nennspannung auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen



a) Biegeformzahlen

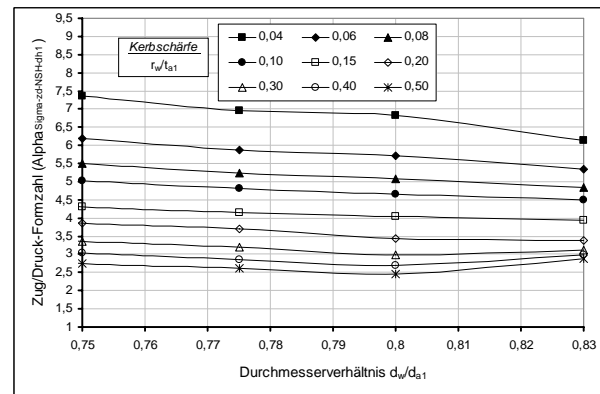
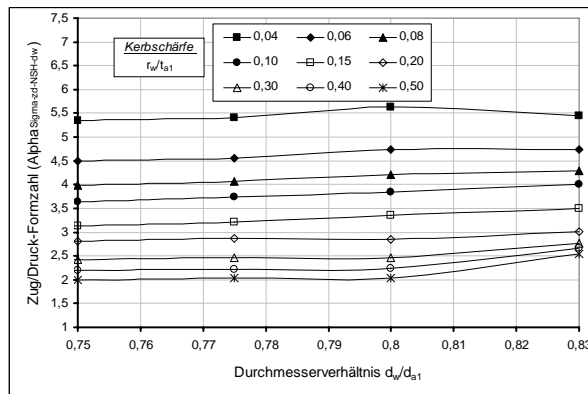
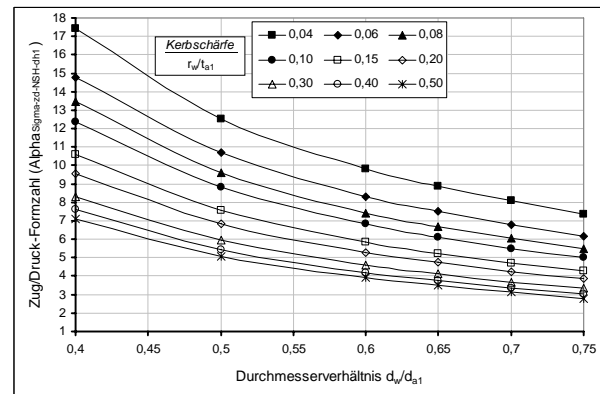
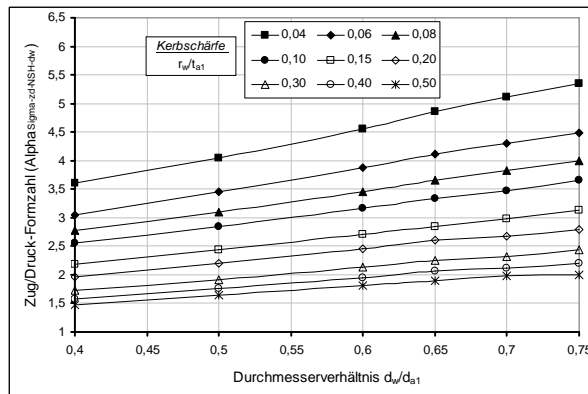
b) Zug/Druck-Formzahlen für große Durchmesser Verhältnisse d_w/d_{s1} c) Zug/Druck-Formzahlen für kleine Durchmesser Verhältnisse d_w/d_{s1}

Bild C-3: Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei **Biegung** und **Zug/Druck** in Abhängigkeit von Kerbschärfe und Durchmesser Verhältnis für die Zahnwelle **DIN 5480 W25x2x11** mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 24,6$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 21,65$ mm; $p_{Fmin}/m = 0,16$); **links:** Nennspannung auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und **rechts:** Nennspannung auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen

Tabelle C-3: Formzahlwerte in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} für die Zahnwelle **DIN 5480 W40x2x18** mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 38,6 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{h1} = 35,6 \text{ mm}$; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$) für zwei unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen d_w und d_{h1}

Zahnwelle mit freiem Auslauf
DIN 5480 W40x2x18
Belastungsart: Torsion

d_w/d_{a1}	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\tau t\text{-NSH-dw}}$								
0,04	2,12	2,24	2,36	2,49	2,63	2,77	3,01	3,62	
0,06	1,87	1,97	2,07	2,18	2,30	2,43	2,62	3,12	
0,08	1,71	1,81	1,90	2,00	2,11	2,22	2,38	2,82	
0,10	1,62	1,70	1,79	1,88	1,98	2,08	2,22	2,62	
0,15	1,45	1,52	1,60	1,68	1,77	1,86	1,97	2,26	
0,20	1,35	1,42	1,49	1,57	1,64	1,72	1,81	2,06	
0,30	1,26	1,31	1,37	1,43	1,49	1,55	1,62	1,81	
0,40	1,19	1,24	1,29	1,35	1,40	1,45	1,51	1,67	
0,50	1,15	1,20	1,25	1,30	1,34	1,38	1,43	1,58	

d_w/d_{a1}	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\tau t\text{-NSH-dh1}}$								
0,04	13,31	10,55	8,57	7,11	6,01	5,15	4,61	4,62	
0,06	11,71	9,27	7,52	6,23	5,26	4,52	4,01	3,99	
0,08	10,76	8,51	6,90	5,71	4,82	4,13	3,65	3,60	
0,10	10,18	8,04	6,50	5,37	4,52	3,87	3,40	3,35	
0,15	9,11	7,19	5,81	4,80	4,04	3,46	3,01	2,89	
0,20	8,48	6,69	5,41	4,47	3,75	3,20	2,77	2,63	
0,30	7,89	6,19	4,98	4,08	3,41	2,88	2,48	2,31	
0,40	7,48	5,85	4,69	3,86	3,20	2,70	2,31	2,13	
0,50	7,22	5,64	4,52	3,70	3,06	2,57	2,19	2,02	

Belastungsart: Biegung

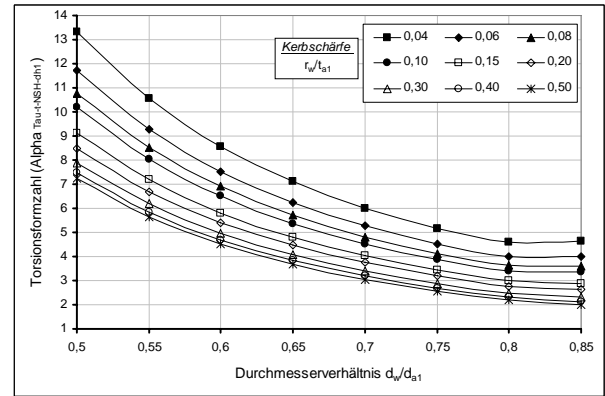
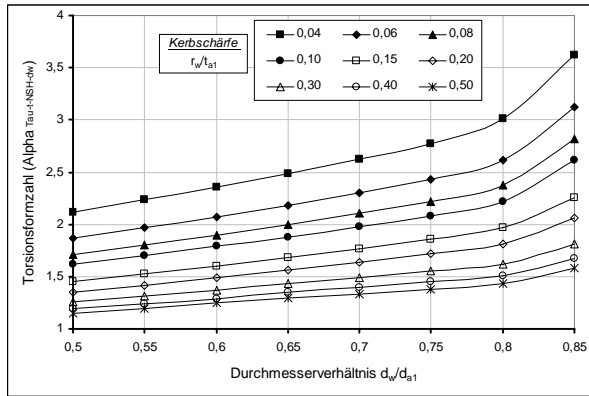
d_w/d_{a1}	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma b\text{-NSH-dw}}$							
0,04	3,28	3,83	4,13	4,49	4,81	5,07	5,36	5,67
0,06	2,88	3,26	3,51	3,75	4,03	4,20	4,42	4,73
0,08	2,55	2,90	3,13	3,32	3,56	3,74	3,93	4,18
0,10	2,37	2,67	2,87	3,04	3,20	3,39	3,57	3,84
0,15	2,01	2,28	2,46	2,60	2,76	2,91	3,05	3,32
0,20	1,82	2,05	2,21	2,32	2,47	2,63	2,76	3,00
0,30	1,59	1,81	1,93	2,04	2,15	2,27	2,42	2,63
0,40	1,46	1,65	1,74	1,84	1,94	2,05	2,20	2,42
0,50	1,40	1,54	1,62	1,74	1,84	1,92	2,06	2,26

d_w/d_{a1}	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,9
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma b-NSH-dh1}$							
0,04	20,59	13,91	11,79	10,26	8,94	7,76	6,85	6,18
0,06	18,07	11,86	10,02	8,57	7,49	6,44	5,65	5,15
0,08	16,00	10,55	8,94	7,60	6,62	5,73	5,02	4,55
0,10	14,88	9,70	8,21	6,96	5,95	5,19	4,56	4,18
0,15	12,58	8,30	7,03	5,95	5,13	4,46	3,90	3,62
0,20	11,42	7,44	6,31	5,31	4,59	4,03	3,53	3,27
0,30	9,99	6,57	5,50	4,66	4,00	3,48	3,09	2,87
0,40	9,15	5,99	4,96	4,20	3,61	3,14	2,82	2,64
0,50	8,79	5,59	4,62	3,98	3,42	2,94	2,64	2,46

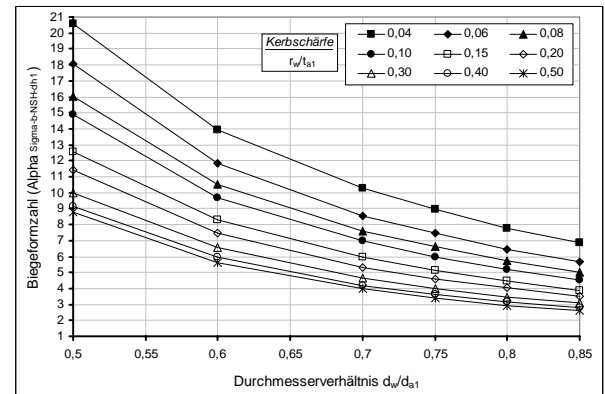
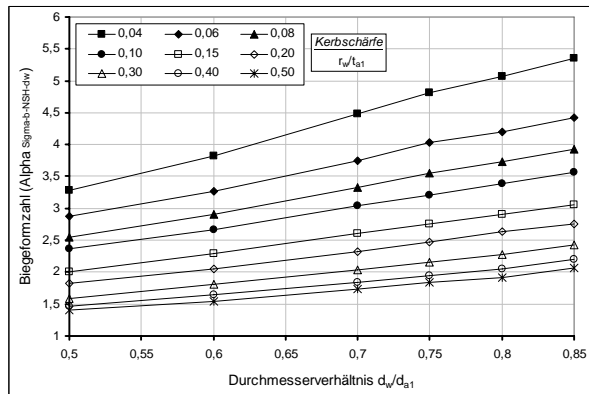
Belastungsart: Zug/Druck

d_w/d_{a1}	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma zd-NSH-dw}$								
0,04	4,17	4,37	4,58	4,80	5,09	5,39	5,55	5,70	
0,06	3,56	3,73	3,90	4,08	4,28	4,49	4,67	4,77	
0,08	3,15	3,31	3,47	3,64	3,80	3,96	4,12	4,21	
0,10	2,91	3,05	3,19	3,34	3,48	3,62	3,73	3,84	
0,15	2,46	2,59	2,72	2,86	2,98	3,09	3,20	3,30	
0,20	2,21	2,32	2,44	2,57	2,65	2,76	2,87	2,97	
0,30	1,95	2,04	2,14	2,24	2,33	2,42	2,50	2,60	
0,40	1,79	1,86	1,94	2,02	2,10	2,18	2,25	2,37	
0,50	1,68	1,74	1,81	1,88	1,95	2,03	2,10	2,22	

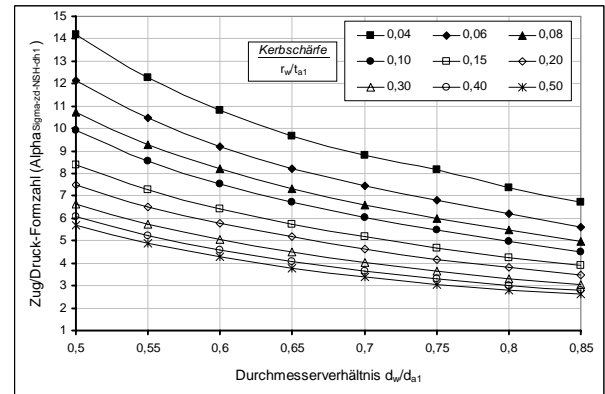
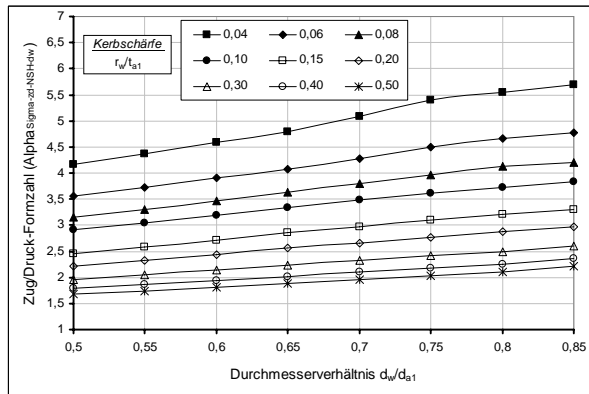
d_w/d_{a1}	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma zd-NSH-dh1}$								
0,04	14,19	12,29	10,82	9,66	8,83	8,15	7,38	6,71	
0,06	12,12	10,48	9,21	8,21	7,43	6,79	6,21	5,62	
0,08	10,73	9,30	8,20	7,33	6,59	5,99	5,48	4,96	
0,10	9,90	8,57	7,54	6,72	6,04	5,47	4,96	4,52	
0,15	8,37	7,27	6,43	5,76	5,16	4,67	4,25	3,89	
0,20	7,51	6,52	5,77	5,17	4,61	4,17	3,81	3,50	
0,30	6,65	5,75	5,06	4,51	4,04	3,66	3,32	3,06	
0,40	6,09	5,24	4,58	4,07	3,64	3,30	2,99	2,79	
0,50	5,71	4,90	4,28	3,78	3,39	3,07	2,79	2,61	



a) Formzahlen bei Torsionsbeanspruchung



b) Formzahlen bei Biegebeanspruchung



c) Formzahlen bei Zug/Druckbeanspruchung

Bild C-4: Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei **Torsion**, **Biegung** und **Zug/Druck** in Abhängigkeit von Kerbschärfe und Durchmesser Verhältnis für die Zahnwelle **DIN 5480 W40x2x18** mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 38,6 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{h1} = 35,6 \text{ mm}$; $p_{Fmin}/m = 0,16$); **links:** Nennspannung auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und **rechts:** Nennspannung auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen

Tabelle C-4: Formzahlwerte in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} für die Zahnwelle **DIN 5480 W25x0,5x48** mit freiem Auslauf ($x_l = 0,45$; $d_{a1} = 24,9$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 24,142$ mm; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$) für zwei unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen d_w und d_{h1}

Zahnwelle mit freiem Auslauf**DIN 5480 W 25x0,5x48****Belastungsart: Torsion**

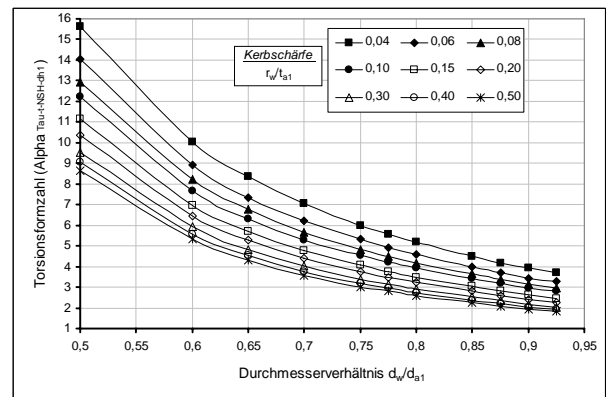
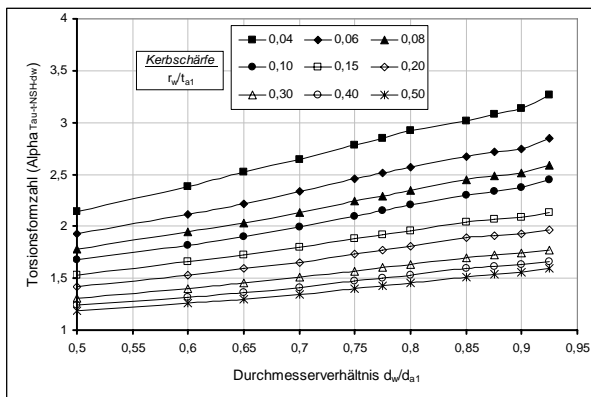
d_w/d_{a1}	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,775	0,80	0,85	0,875	0,90	0,925
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\tau t-NSH-dw}$										
0,04	2,15	2,38	2,52	2,65	2,78	2,85	2,92	3,02	3,08	3,14	3,27
0,06	1,93	2,11	2,22	2,34	2,46	2,51	2,57	2,67	2,72	2,75	2,85
0,08	1,78	1,95	2,04	2,14	2,24	2,29	2,35	2,45	2,48	2,51	2,59
0,10	1,68	1,82	1,91	2,00	2,10	2,15	2,21	2,30	2,34	2,37	2,45
0,15	1,53	1,66	1,73	1,80	1,88	1,92	1,96	2,04	2,07	2,09	2,13
0,20	1,42	1,53	1,59	1,65	1,73	1,77	1,81	1,89	1,91	1,93	1,97
0,30	1,30	1,40	1,46	1,51	1,57	1,60	1,63	1,70	1,72	1,74	1,77
0,40	1,24	1,32	1,37	1,41	1,47	1,50	1,53	1,59	1,61	1,63	1,66
0,50	1,19	1,26	1,30	1,35	1,40	1,43	1,46	1,51	1,54	1,56	1,60

d_w/d_{a1}	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,775	0,80	0,85	0,875	0,90	0,925
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\tau t-NSH-dh1}$										
0,04	15,64	10,04	8,36	7,03	6,01	5,58	5,20	4,48	4,18	3,93	3,72
0,06	14,04	8,90	7,35	6,21	5,31	4,92	4,57	3,96	3,69	3,44	3,27
0,08	12,95	8,21	6,75	5,67	4,84	4,49	4,18	3,64	3,38	3,14	2,98
0,10	12,21	7,68	6,32	5,30	4,54	4,22	3,93	3,41	3,18	2,96	2,82
0,15	11,16	6,98	5,73	4,79	4,06	3,76	3,49	3,03	2,81	2,61	2,46
0,20	10,35	6,46	5,28	4,39	3,74	3,46	3,22	2,80	2,60	2,41	2,26
0,30	9,51	5,92	4,83	4,02	3,39	3,13	2,90	2,52	2,34	2,18	2,04
0,40	9,04	5,57	4,53	3,75	3,18	2,94	2,72	2,36	2,19	2,04	1,92
0,50	8,64	5,32	4,31	3,58	3,02	2,79	2,59	2,24	2,09	1,95	1,84

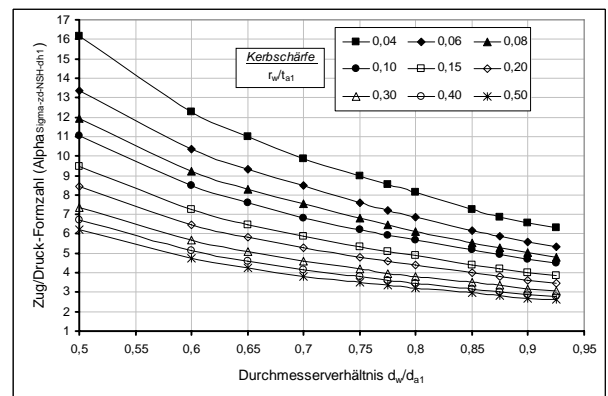
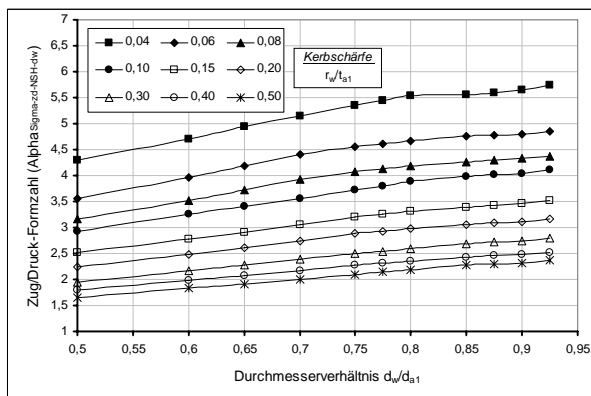
Belastungsart: Zug/Druck

d_w/d_{a1}	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,775	0,80	0,85	0,875	0,90	0,925
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma zd-NSH-dw}$										
0,04	4,30	4,70	4,95	5,14	5,36	5,44	5,53	5,56	5,60	5,64	5,74
0,06	3,55	3,96	4,18	4,41	4,56	4,61	4,67	4,76	4,78	4,80	4,86
0,08	3,17	3,53	3,72	3,92	4,07	4,12	4,18	4,26	4,30	4,33	4,38
0,10	2,94	3,26	3,41	3,55	3,73	3,80	3,88	3,98	4,01	4,04	4,11
0,15	2,52	2,77	2,91	3,05	3,20	3,26	3,32	3,39	3,44	3,47	3,52
0,20	2,24	2,48	2,61	2,75	2,88	2,93	2,99	3,06	3,09	3,12	3,16
0,30	1,95	2,17	2,28	2,39	2,50	2,54	2,59	2,68	2,72	2,74	2,79
0,40	1,79	1,98	2,07	2,17	2,27	2,31	2,35	2,42	2,46	2,49	2,53
0,50	1,66	1,83	1,91	2,00	2,10	2,14	2,19	2,27	2,30	2,32	2,37

d_w/d_{a1}	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,775	0,80	0,85	0,875	0,90	0,925
r_w/t_{a1}	$\alpha_{\sigma zd-NSH-dh1}$										
0,04	16,18	12,27	11,01	9,87	8,96	8,51	8,12	7,23	6,88	6,55	6,30
0,06	13,36	10,34	9,30	8,47	7,62	7,22	6,85	6,19	5,87	5,57	5,34
0,08	11,92	9,21	8,28	7,53	6,80	6,45	6,14	5,54	5,28	5,03	4,81
0,10	11,04	8,50	7,59	6,81	6,23	5,95	5,70	5,18	4,92	4,69	4,52
0,15	9,47	7,24	6,47	5,86	5,35	5,10	4,88	4,41	4,22	4,02	3,87
0,20	8,42	6,48	5,81	5,27	4,81	4,59	4,39	3,98	3,79	3,62	3,47
0,30	7,33	5,68	5,07	4,58	4,18	3,98	3,80	3,49	3,34	3,18	3,06
0,40	6,73	5,16	4,61	4,15	3,79	3,60	3,45	3,15	3,02	2,89	2,77
0,50	6,22	4,77	4,25	3,83	3,51	3,35	3,22	2,95	2,82	2,69	2,60



a) Formzahlen bei Torsionsbeanspruchung



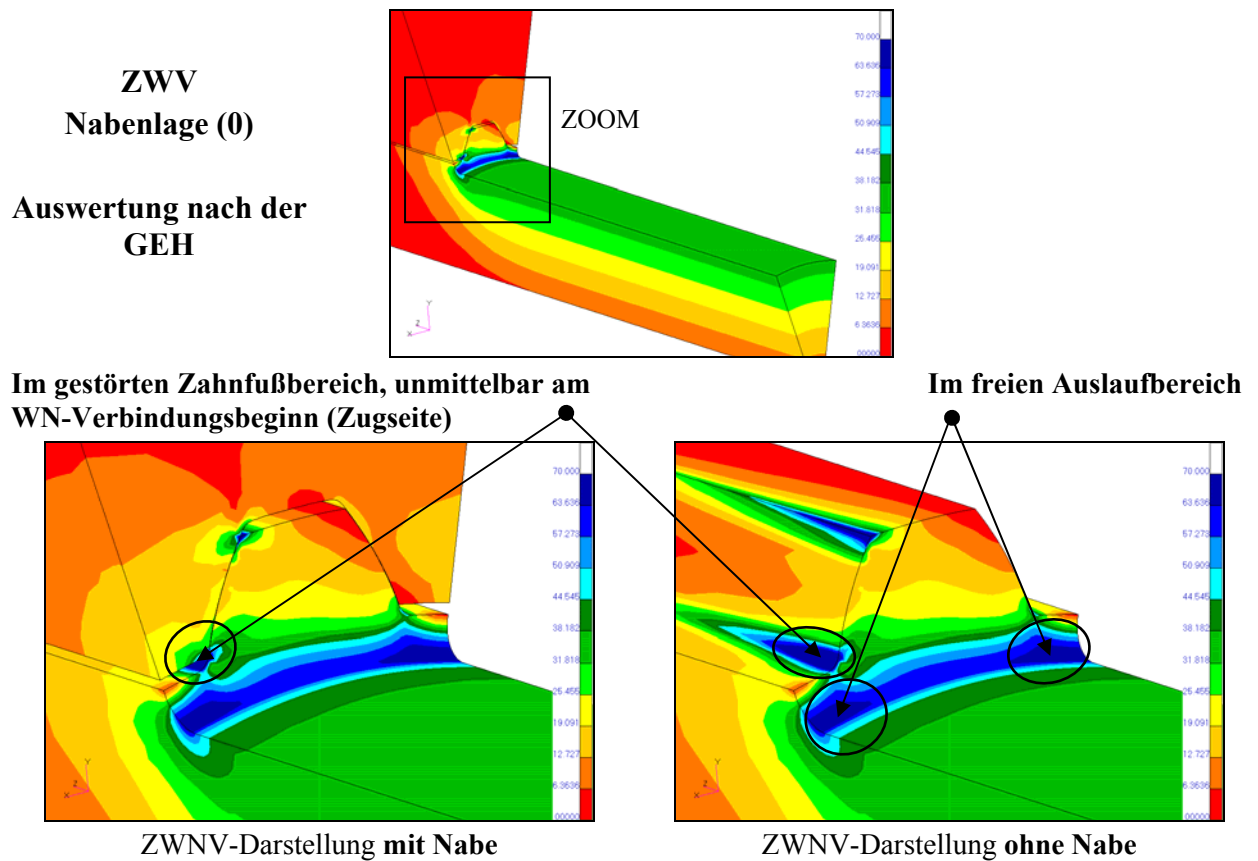
b) Formzahlen bei Zug/Druckbeanspruchung

Bild C-5: Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei **Torsion** und **Zug/Druck** in Abhängigkeit von Kerbschärfe und Durchmesser Verhältnis für die Zahnwelle **DIN 5480 W25x0,5x48** mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,45$; $d_{a1} = 24,9$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 24,142$ mm; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$); **links:** Nennspannung auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und **rechts:** Nennspannung auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen

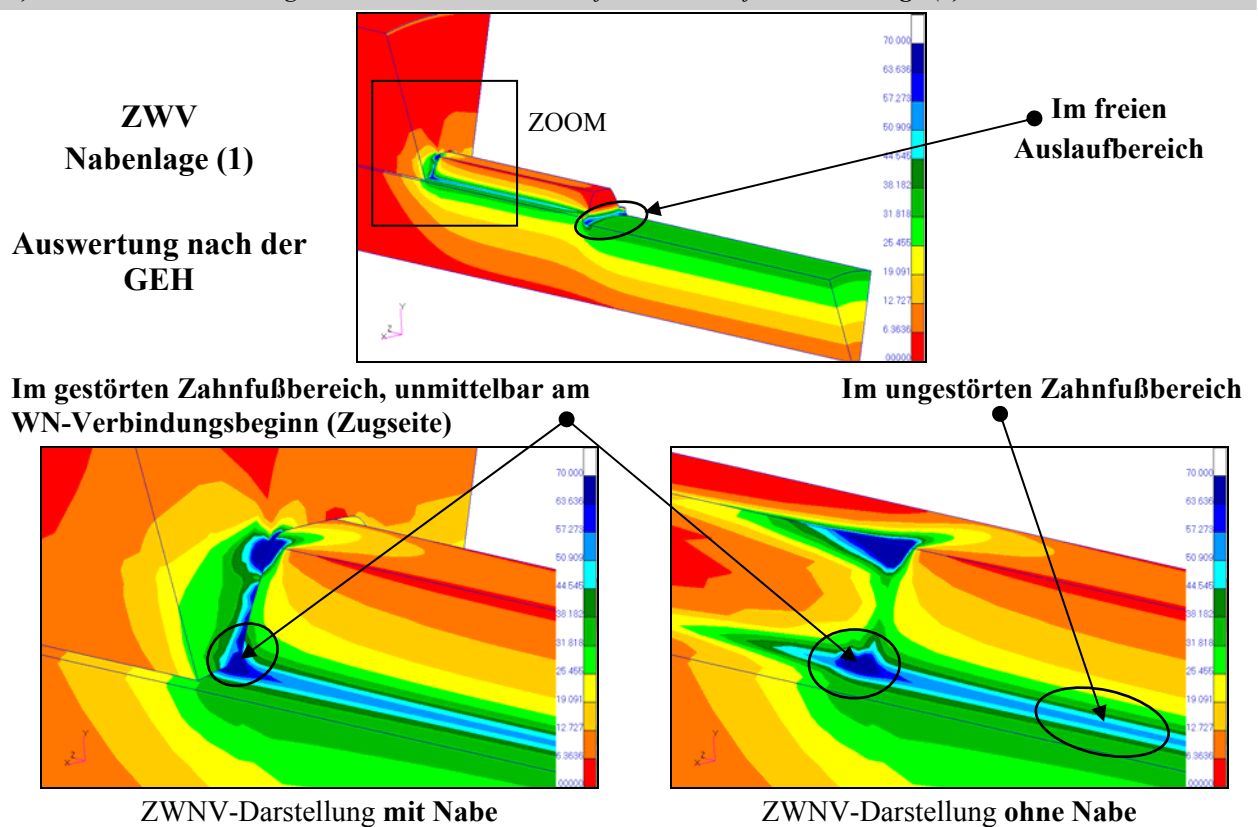
Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf

Interessante Positionen zur Auswertung der maximalen Vergleichsspannungen nach der GEH und NSH bei Torsionsbelastung für die Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf

Die Darstellung der Auswertungspositionen erfolgt unter Berücksichtigung des Nabeneinflusses (Nabenlage „0“ und Nabenlage „1“) und des Einflusses der Sicherungsringnut DIN 471 – 25 x 1,2

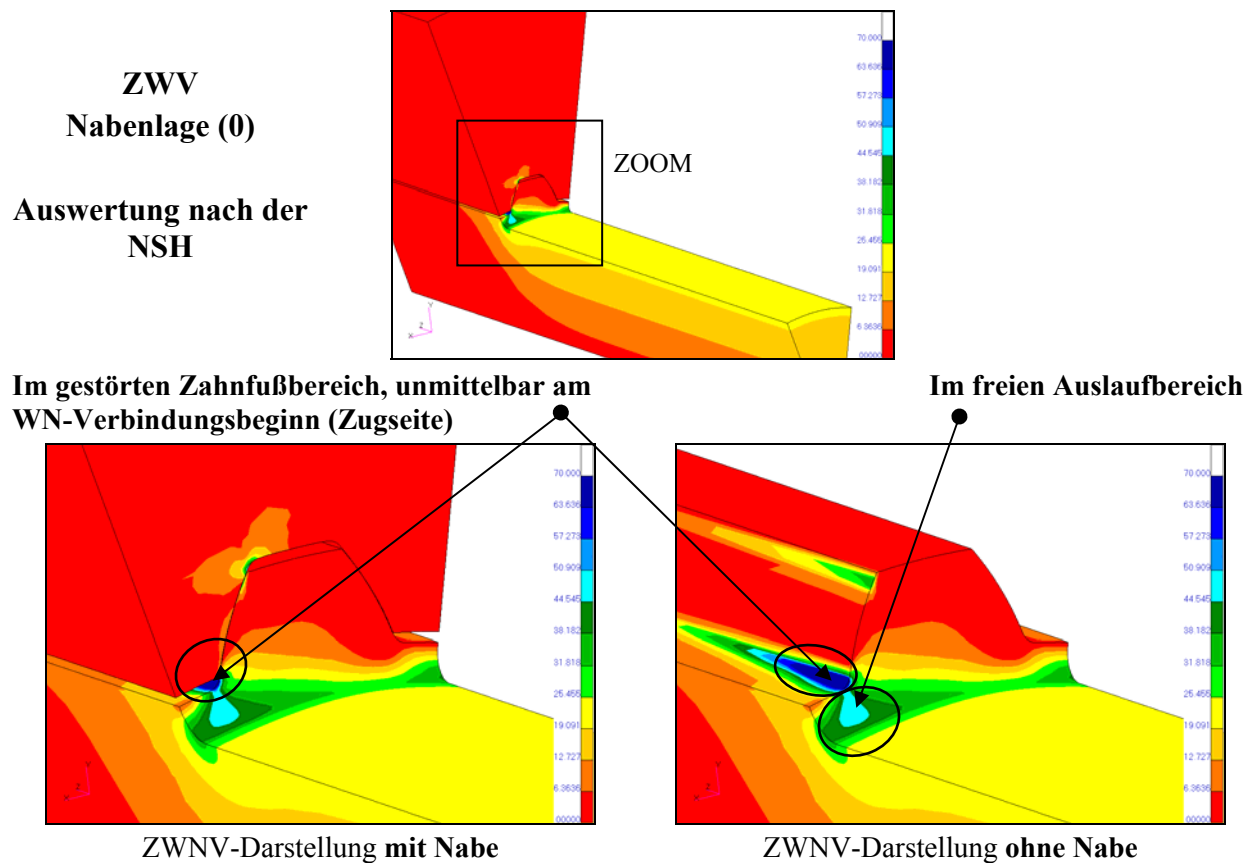


a) Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf und Nabenlage (0); nach der GEH

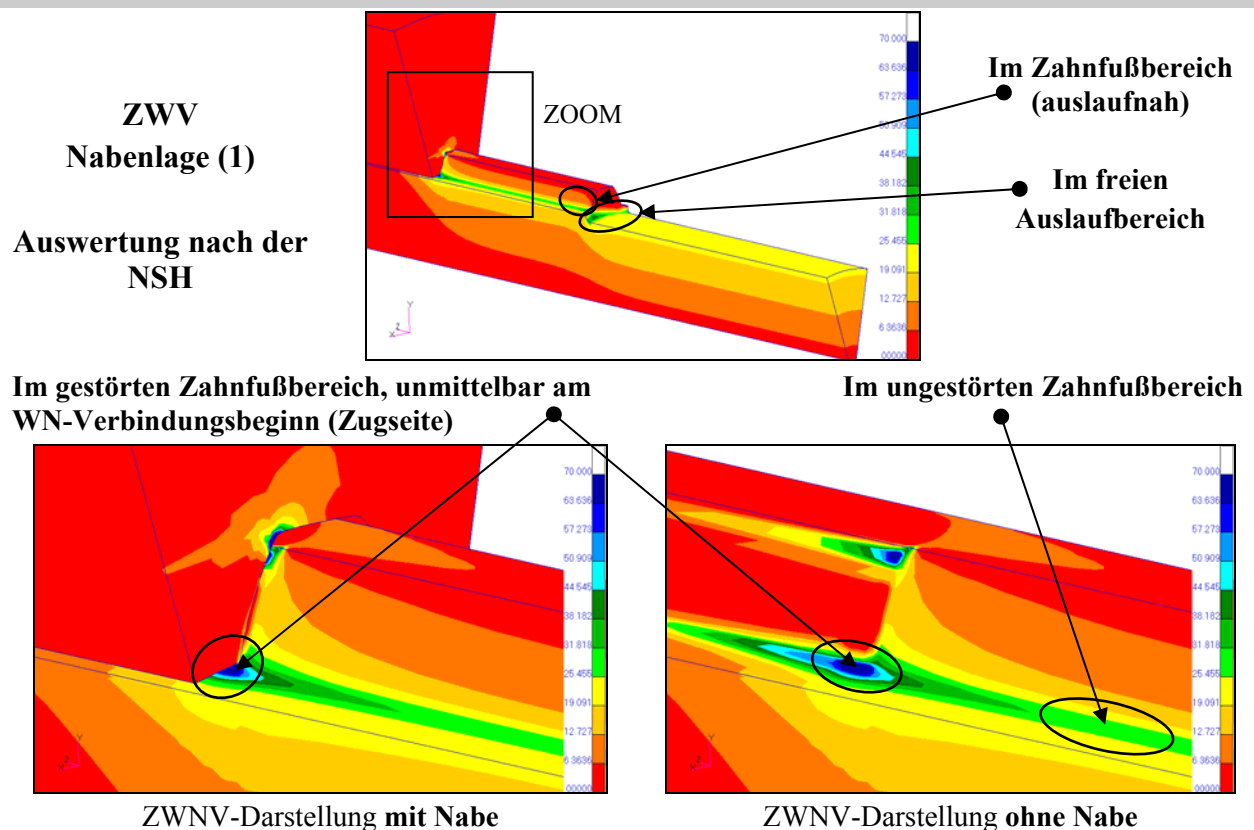


b) Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf und Nabenlage (1); nach der GEH

Bild C-6: Darstellung der interessanten Positionen der Vergleichsspannungsüberhöhungen (σ_{v-GEH}) nach der GEH an der torsionsbelasteten Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf; a) für die Nabenlage (0) und b) für die Nabenlage (1); /Str07/

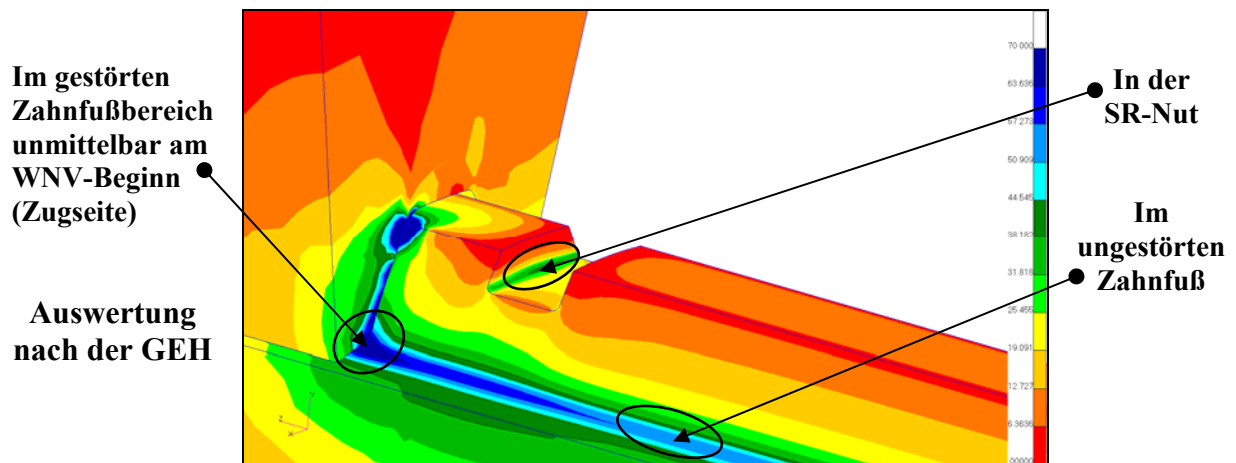


a) Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf und Nabenlage (0); nach der NSH

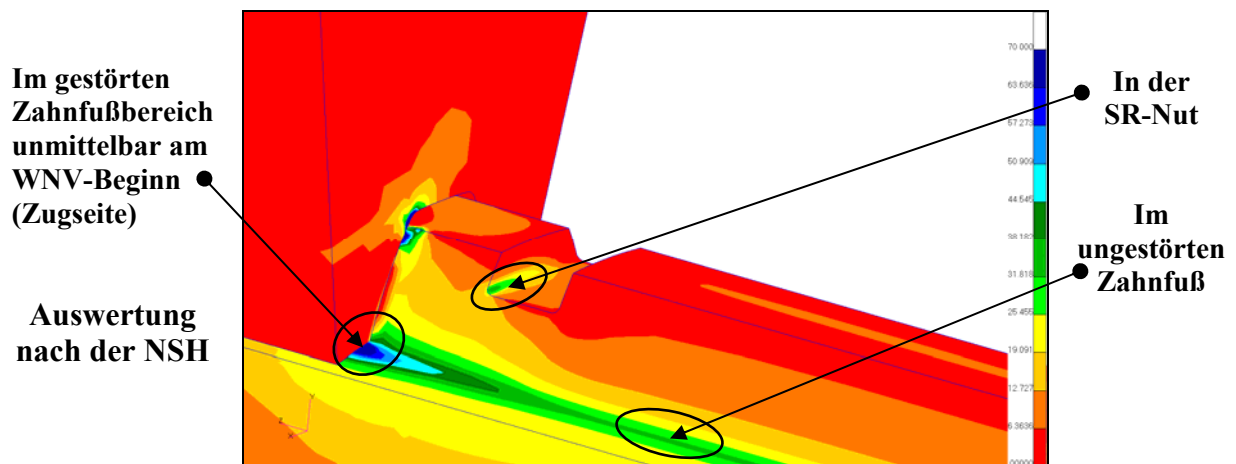


b) Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf und Nabenlage (1); nach der NSH

Bild C-7: Darstellung der interessanten Positionen der Vergleichsspannungsüberhöhungen (σ_{V-NSH_I}) nach der NSH an der torsionsbelasteten Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf; a) für die Nabenlage (0) und b) für die Nabenlage (1); /Str07/



a) Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf, **Nabenlage (1)** und mit der **Sicherungsringnut DIN 471 – 25 x 1,2**; Vergleichsspannungsmaxima bei Torsion nach der **GEH**



b) Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf, **Nabenlage (1)** und mit der **Sicherungsringnut DIN 471 – 25 x 1,2**; Vergleichsspannungsmaxima bei Torsion nach der **NSH**

Bild C-8: Darstellung der interessanten Positionen der Vergleichsspannungsüberhöhungen an der torsionsbelasteten Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf und **Nabenlage (1)** sowie mit der **Sicherungsringnut DIN 471 – 25 x 1,2**; a) nach der **GEH** (σ_{v-GEH}) und b) nach der **NSH** (σ_{v-NSH}); /Str07/

9.4 Anlage D

Anlage D

Bezogenes Spannungsgefälle an Zahnwellen mit freiem Auslauf

Berechnung der bezogenen Spannungsgradienten G^* und Formzahl-tiefenverläufe für die Belastungsarten Torsion, Biegung und Zug/Druck

Tabellen D-1 bis D-4: FE-berechnete Werte der bezogenen Spannungsgefälle (**oben**) sowie die Formzahl-tiefenverläufe (**unten**) bei **Torsion** für die Zahnwellen mit freiem Auslauf nach DIN 5480 (W15x2x6; W25x2x11; W40x2x18; W25x0,5x48), $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

$$\alpha_{tt_GEH} = \frac{\sigma_{v_GEH_max}}{\sigma_{v_GEH_nenn}} = \frac{\sigma_{v_GEH_max}}{\sqrt{3} \cdot \tau_{t.nenn}}$$

$$\alpha_{tt} = \frac{\sigma_{l_max}}{\tau_{t.nenn}}$$

$$ZH_{\alpha_{tt}} = \frac{\alpha_{tt_GEH}}{\alpha_{tt_NSH}}$$

$$ZH_{G_{tt}^*} = \frac{G_{tt_GEH}^*}{G_{tt_NSH}^*}$$

Tabelle D-1:

Belastungsart:		Torsion		DIN 5480 W15 x 2 x 6				bez. Sp.-gefälle $G^* [\text{mm}^{-1}]$			
t_{a1}	r_w	r_w/t_{a1}	d_w/d_{a1}	d_w	α_{tt}	α_{tt_GEH}	$ZH_{\alpha_{tt}}$	DIN 743	Polynomisch		$ZH_{G_{tt}^*}$
[mm]	[mm]			[mm]				/N3/	G_{NSH}^*	G_{GEH}^*	
2,56	0,10	0,04	0,65	9,49	3,441	2,58	0,750	11,50	5,719	4,745	0,830
2,92	0,12	0,04	0,60	8,76	2,830	2,50	0,883	9,58	5,245	4,567	0,871
2,56	0,26	0,10	0,65	9,49	2,468	1,97	0,798	4,49	3,970	3,032	0,764
2,92	0,29	0,10	0,60	8,76	2,047	1,89	0,923	3,94	3,310	2,804	0,847
2,56	0,51	0,20	0,65	9,49	1,924	1,63	0,847	2,25	2,530	1,764	0,697
2,92	0,58	0,20	0,60	8,76	1,637	1,56	0,953	1,98	1,929	1,657	0,859
2,56	2,56	1,00	0,65	9,49	1,223	1,20	0,981	0,45	0,755	0,599	0,793

$$G_{GEH}^* = 0,86 \cdot G_{NSH}^* + 0,13$$

$$\alpha_{tt_GEH} = 0,65 \cdot \alpha_{tt_NSH} + 0,46$$

$$G_{NSH}^* = -0,48 \cdot \alpha_{tt}^2 + 4,6 \cdot \alpha_{tt} - 4,24$$

$$G_{GEH}^* = -0,12 \cdot \alpha_{tt_GEH}^2 + 3,5 \cdot \alpha_{tt_GEH} - 3,5$$

Torsions-Formzahl-tiefenverläufe (σ_{l-NSH} normiert auf die Nennspannung)												
r_w	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
[mm]	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,10	3,441	1,311	0,970	0,805	0,700	0,630	0,573	0,521	0,481	0,447	0,417	0,378
0,12	2,830	1,189	0,880	0,725	0,626	0,560	0,501	0,454	0,414	0,381	0,351	0,310
0,26	2,468	1,301	0,975	0,811	0,706	0,642	0,579	0,526	0,485	0,451	0,420	0,383
0,29	2,047	1,206	0,925	0,768	0,662	0,598	0,531	0,479	0,436	0,399	0,365	0,335
0,51	1,924	1,269	0,988	0,828	0,721	0,656	0,590	0,533	0,492	0,456	0,425	0,395
0,58	1,637	1,187	0,961	0,816	0,712	0,632	0,577	0,515	0,464	0,423	0,385	0,350
2,56	1,223	1,088	0,999	0,916	0,850	0,780	0,728	0,672	0,620	0,574	0,528	0,484

Tabelle D-2:

Belastungsart:		Torsion		DIN 5480 W25 x 2 x 11				bez. Sp.-gefälle G^* [mm ⁻¹]			
t_{a1}	r_w	r_w/t_{a1}	d_w/d_{a1}	d_w				DIN 743	Polynomisch		$ZH_{G_{tt}^*}$
[mm]	[mm]			[mm]	α_{tt}	α_{tt_GEH}	$ZH_{\alpha_{tt}}$	/N3/	G_{NSH}^*	G_{GEH}^*	
2,46	0,10	0,04	0,80	19,68	4,463	2,893	0,648	11,50	8,438	5,167	0,612
2,77	0,11	0,04	0,775	19,07	3,704	2,870	0,775	10,45	6,757	4,551	0,674
3,08	0,12	0,04	0,75	18,45	3,307	2,864	0,866	9,35	6,126	4,510	0,736
3,69	0,15	0,04	0,70	17,22	2,795	2,667	0,954	7,67	4,875	4,129	0,847
2,77	0,17	0,06	0,775	19,07	3,186	2,529	0,794	6,76	5,588	3,816	0,683
3,08	0,19	0,06	0,75	18,45	2,845	2,512	0,883	6,22	4,639	3,677	0,793
4,92	0,20	0,04	0,60	14,76	2,365	2,350	0,994	5,75	3,829	3,575	0,934
2,46	0,25	0,10	0,80	19,68	3,069	2,148	0,700	4,67	4,628	3,136	0,678
2,77	0,28	0,10	0,775	19,07	2,643	2,171	0,821	4,11	3,930	2,791	0,710
4,92	0,30	0,06	0,60	14,76	2,108	2,084	0,989	3,83	2,846	2,859	1,005
3,08	0,31	0,10	0,75	18,45	2,373	2,142	0,903	3,73	3,161	2,643	0,836
3,69	0,37	0,10	0,70	17,22	2,053	1,998	0,973	3,11	2,622	2,269	0,865
2,46	0,49	0,20	0,80	19,68	1,724	1,767	1,025	2,35	1,983	2,051	1,034
2,77	0,55	0,20	0,775	19,07	2,060	1,784	0,866	2,09	2,268	1,627	0,717
3,08	0,92	0,30	0,75	18,45	1,658	1,576	0,951	1,25	1,207	1,086	0,900
2,46	1,23	0,50	0,80	19,68	1,380	1,518	1,100	0,93	0,948	0,934	0,986
3,69	1,48	0,40	0,70	17,22	1,407	1,420	1,009	0,78	0,749	0,780	1,041
6,15	1,85	0,30	0,50	12,30	1,280	1,276	0,997	0,62	0,684	0,700	1,024
6,15	2,46	0,40	0,50	12,30	1,223	1,218	0,996	0,47	0,579	0,576	0,994

$$G_{GEH}^* = 0,62 \cdot G_{NSH}^* + 0,52$$

$$\alpha_{tt_GEH} = 0,57 \cdot \alpha_{tt_NSH} + 0,73$$

$$G_{NSH}^* = -0,055 \cdot \alpha_{tt}^2 + 2,8 \cdot \alpha_{tt} - 2,93$$

$$G_{GEH}^* = +0,07 \cdot \alpha_{tt-GEH}^2 + 2,34 \cdot \alpha_{tt-GEH} - 2,6$$

Torsions-Formzahliefenverläufe (σ_{I-NSH} normiert auf die Nennspannung)												
r_w	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
[mm]	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,10	4,463	1,550	1,203	1,034	0,921	0,866	0,821	0,781	0,744	0,711	0,691	0,674
0,11	3,704	1,480	1,127	0,967	0,870	0,804	0,756	0,724	0,692	0,665	0,641	0,619
0,12	3,307	1,425	1,089	0,932	0,836	0,770	0,722	0,687	0,653	0,625	0,602	0,583
0,15	2,795	1,401	1,086	0,929	0,830	0,758	0,703	0,664	0,625	0,592	0,567	0,543
0,17	3,186	1,476	1,129	0,968	0,868	0,805	0,757	0,699	0,677	0,656	0,638	0,621
0,19	2,845	1,453	1,120	0,958	0,858	0,789	0,737	0,701	0,665	0,636	0,611	0,590
0,20	2,365	1,359	1,083	0,933	0,834	0,755	0,687	0,644	0,605	0,567	0,532	0,501
0,25	3,069	1,565	1,206	1,035	0,934	0,864	0,813	0,774	0,753	0,727	0,701	0,673
0,28	2,643	1,464	1,131	0,972	0,874	0,808	0,761	0,728	0,695	0,668	0,643	0,620
0,30	2,108	1,357	1,095	0,941	0,839	0,763	0,702	0,651	0,598	0,564	0,533	0,504
0,31	2,373	1,450	1,141	0,979	0,877	0,806	0,752	0,715	0,679	0,648	0,621	0,598
0,37	2,053	1,370	1,096	0,974	0,868	0,800	0,741	0,692	0,653	0,614	0,589	0,565
0,49	1,724	1,246	1,034	0,896	0,809	0,718	0,658	0,605	0,559	0,519	0,482	0,448
0,55	2,060	1,418	1,141	0,987	0,890	0,822	0,779	0,740	0,706	0,676	0,649	0,625
0,92	1,658	1,335	1,139	1,009	0,914	0,843	0,788	0,740	0,710	0,677	0,647	0,620
1,23	1,380	1,165	1,017	0,913	0,830	0,761	0,703	0,652	0,606	0,568	0,525	0,488
1,48	1,407	1,229	1,106	1,012	0,936	0,873	0,820	0,775	0,744	0,705	0,667	0,630
1,85	1,280	1,128	1,016	0,927	0,854	0,792	0,737	0,687	0,642	0,600	0,561	0,525
2,46	1,223	1,101	1,005	0,927	0,860	0,801	0,748	0,699	0,655	0,613	0,574	0,537

Tabelle D-3:

<i>Belastungsart:</i>		Torsion		DIN 5480 W40 x 2 x 18				bez. Sp.-gefälle G^* [mm ⁻¹]			
t_{a1}	r_w	r_w/t_{a1}	d_w/d_{a1}	d_w				DIN 743	<i>Polynomisch</i>		$ZH_{G_{tt}^*}$
[mm]	[mm]			[mm]	α_{tt}	α_{tt_GEH}	$ZH_{\alpha_{tt}}$	/N3/	G_{NSH}^*	G_{GEH}^*	
2,90	0,12	0,04	0,85	32,81	3,617	3,025	0,836	9,91	5,232	4,461	0,853
3,86	0,15	0,04	0,80	30,88	3,008	2,896	0,963	7,47	4,224	4,058	0,961
4,83	0,19	0,04	0,75	28,95	2,773	2,749	0,991	5,96	3,599	3,596	0,999
6,76	0,27	0,04	0,65	25,09	2,508	2,487	0,992	4,26	2,968	2,970	1,001
2,90	0,29	0,10	0,85	32,81	2,619	2,278	0,870	3,97	3,350	2,644	0,789
7,72	0,31	0,04	0,60	23,16	2,366	2,359	0,997	3,72	2,764	2,735	0,990
3,86	0,39	0,10	0,80	30,88	2,224	2,170	0,976	2,98	2,411	2,311	0,959
4,83	0,48	0,10	0,75	28,95	2,081	2,066	0,993	2,38	1,926	1,925	0,999
6,76	0,68	0,10	0,65	25,09	1,872	1,885	1,007	1,70	1,490	1,489	0,999
7,72	0,77	0,10	0,60	23,16	1,809	1,798	0,994	1,49	1,341	1,343	1,001
2,90	0,87	0,30	0,85	32,81	1,816	1,689	0,930	1,32	1,356	1,090	0,804
3,86	1,16	0,30	0,80	30,88	1,621	1,607	0,991	0,99	0,918	0,906	0,987
4,83	1,45	0,30	0,75	28,95	1,547	1,541	0,996	0,79	0,765	0,765	1,000
6,76	2,03	0,30	0,65	25,09	1,423	1,429	1,004	0,57	0,581	0,579	0,997
7,72	2,32	0,30	0,60	23,16	1,373	1,374	1,001	0,50	0,483	0,513	1,062

$$G_{GEH}^* = 0,89 \cdot G_{NSH}^* + 0,12$$

$$\alpha_{tt_GEH} = 0,82 \cdot \alpha_{tt_NSH} + 0,32$$

$$G_{NSH}^* = -0,11 \cdot \alpha_{tt}^2 + 2,75 \cdot \alpha_{tt} - 3,2$$

$$G_{GEH}^* = -0,2 \cdot \alpha_{tt_GEH}^2 + 1,55 \cdot \alpha_{tt_GEH} - 2,1$$

Torsions-Formzahliefenverläufe (σ_{I-NSH} normiert auf die Nennspannung)												
r_w	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
[mm]	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,12	3,617	1,549	1,199	1,042	0,950	0,888	0,844	0,833	0,801	0,774	0,752	0,736
0,15	3,008	1,557	1,226	1,063	0,961	0,906	0,857	0,809	0,773	0,750	0,727	0,703
0,19	2,773	1,588	1,264	1,101	0,996	0,920	0,861	0,833	0,791	0,752	0,719	0,694
0,27	2,508	1,580	1,268	1,099	0,987	0,905	0,841	0,800	0,752	0,710	0,677	0,647
0,29	2,619	1,549	1,225	1,067	0,973	0,910	0,864	0,830	0,803	0,780	0,771	0,757
0,31	2,366	1,541	1,244	1,074	0,968	0,885	0,820	0,778	0,729	0,686	0,652	0,620
0,39	2,224	1,522	1,244	1,090	0,989	0,944	0,888	0,838	0,799	0,773	0,749	0,725
0,48	2,081	1,530	1,278	1,129	1,028	0,954	0,895	0,848	0,808	0,781	0,756	0,724
0,68	1,872	1,462	1,243	1,103	1,002	0,926	0,864	0,813	0,770	0,732	0,703	0,672
0,77	1,809	1,449	1,248	1,113	1,016	0,939	0,877	0,825	0,779	0,740	0,706	0,680
0,87	1,816	1,445	1,235	1,102	1,013	0,948	0,899	0,861	0,830	0,804	0,792	0,776
1,16	1,621	1,383	1,230	1,122	1,041	0,977	0,927	0,885	0,850	0,819	0,798	0,781
1,45	1,547	1,357	1,229	1,134	1,060	0,999	0,949	0,906	0,869	0,838	0,807	0,779
2,03	1,423	1,281	1,175	1,092	1,023	0,966	0,915	0,872	0,833	0,798	0,765	0,736
2,32	1,373	1,252	1,156	1,084	1,024	0,971	0,923	0,880	0,842	0,806	0,774	0,744

Tabelle D-4:

<u>Belastungsart:</u>		Torsion		DIN 5480 W25 x 0,5 x 48				bez. Sp.-gefälle G^* [mm ⁻¹]			
t_{a1}	r_w	r_w/t_{a1}	d_w/d_{a1}	d_w				DIN 743	<i>Polynomisch</i>		$ZH_{G_{tt}^*}$
[mm]	[mm]			[mm]	α_{tt}	α_{tt_GEH}	$ZH_{\alpha_{tt}}$	/N3/	G_{NSH}^*	G_{GEH}^*	
1,87	0,075	0,04	0,85	21,17	3,031	3,020	0,996	15,39	5,279	5,279	1,000
1,25	0,075	0,06	0,90	22,41	2,741	2,731	0,996	15,39	5,206	5,197	0,998
0,93	0,093	0,10	0,93	23,03	2,475	2,386	0,964	12,32	5,008	4,694	0,937
3,11	0,125	0,04	0,75	18,68	2,785	2,777	0,997	9,24	4,422	4,423	1,000
1,25	0,125	0,10	0,90	22,41	2,369	2,362	0,997	9,24	4,306	4,299	0,998
4,36	0,174	0,04	0,65	16,19	2,525	2,516	0,996	6,60	3,850	3,851	1,000
1,87	0,187	0,10	0,85	21,17	2,306	2,299	0,997	6,16	3,611	3,612	1,000
3,11	0,311	0,10	0,75	18,68	2,109	2,103	0,997	3,69	2,690	2,692	1,001
4,36	0,436	0,10	0,65	16,19	1,903	1,897	0,997	2,64	2,136	2,137	1,000
1,25	0,623	0,50	0,90	22,41	1,561	1,558	0,998	1,85	1,531	1,528	0,998
1,87	0,934	0,50	0,85	21,17	1,514	1,511	0,998	1,23	1,133	1,133	1,000
2,49	1,245	0,50	0,80	19,92	1,452	1,455	1,002	0,92	0,900	0,899	0,999
3,11	1,556	0,50	0,75	18,68	1,400	1,398	0,999	0,74	0,757	0,757	1,000
4,36	2,179	0,50	0,65	16,19	1,298	1,297	0,999	0,53	0,579	0,579	1,000

$$G_{GEH}^* = 0,98 \cdot G_{NSH}^* + 0,03$$

$$\alpha_{tt_GEH} = 0,99 \cdot \alpha_{tt_NSH} + 0,016$$

$$G_{NSH}^* = -0,52 \cdot \alpha_{tt}^2 + 5,15 \cdot \alpha_{tt} - 5,4$$

$$G_{GEH}^* = -0,56 \cdot \alpha_{tt_GEH}^2 + 5,3 \cdot \alpha_{tt_GEH} - 5,54$$

Torsions-Formzahliefenverläufe (σ_{1-NSH} normiert auf die Nennspannung)												
r_w	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
[mm]	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,075	3,031	1,316	1,060	0,934	0,858	0,805	0,764	0,730	0,702	0,687	0,660	0,636
0,075	2,741	1,216	1,001	0,908	0,852	0,812	0,795	0,762	0,739	0,725	0,715	0,696
0,093	2,475	1,150	0,967	0,896	0,856	0,829	0,816	0,790	0,772	0,760	0,752	0,735
0,125	2,785	1,399	1,104	0,953	0,857	0,786	0,730	0,692	0,652	0,618	0,591	0,565
0,125	2,369	1,243	1,034	0,933	0,876	0,836	0,804	0,779	0,756	0,744	0,723	0,702
0,174	2,525	1,386	1,087	0,931	0,828	0,752	0,692	0,646	0,602	0,565	0,534	0,503
0,187	2,306	1,337	1,090	0,963	0,885	0,830	0,786	0,751	0,721	0,706	0,678	0,652
0,311	2,109	1,390	1,130	0,983	0,887	0,815	0,765	0,721	0,681	0,644	0,614	0,587
0,436	1,903	1,352	1,108	0,963	0,863	0,787	0,726	0,676	0,632	0,593	0,560	0,534
0,623	1,561	1,230	1,078	0,989	0,927	0,882	0,847	0,817	0,791	0,767	0,745	0,728
0,934	1,514	1,258	1,112	1,015	0,945	0,889	0,844	0,806	0,773	0,744	0,717	0,699
1,245	1,452	1,245	1,113	1,019	0,946	0,887	0,838	0,796	0,759	0,726	0,697	0,676
1,556	1,400	1,231	1,117	1,031	0,962	0,903	0,853	0,809	0,770	0,735	0,702	0,673
2,179	1,298	1,168	1,070	0,993	0,927	0,871	0,821	0,775	0,734	0,697	0,662	0,633

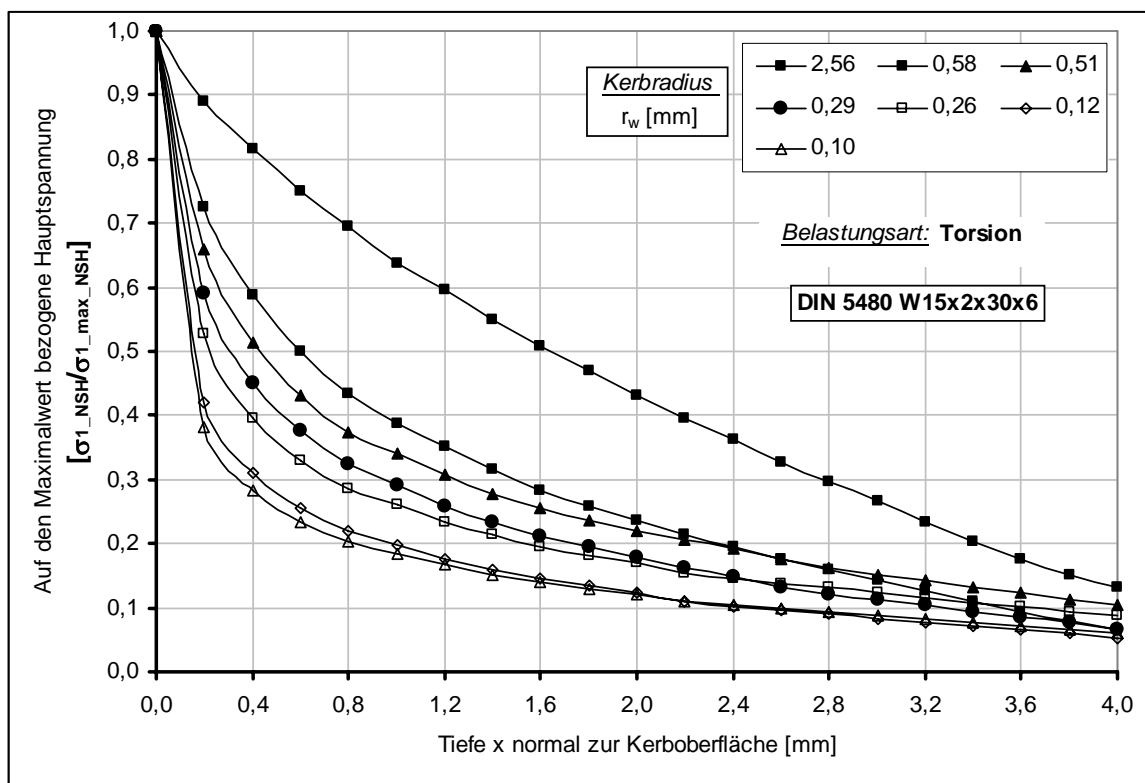


Bild D-1: W15x2x6 bei Torsionsbelastung

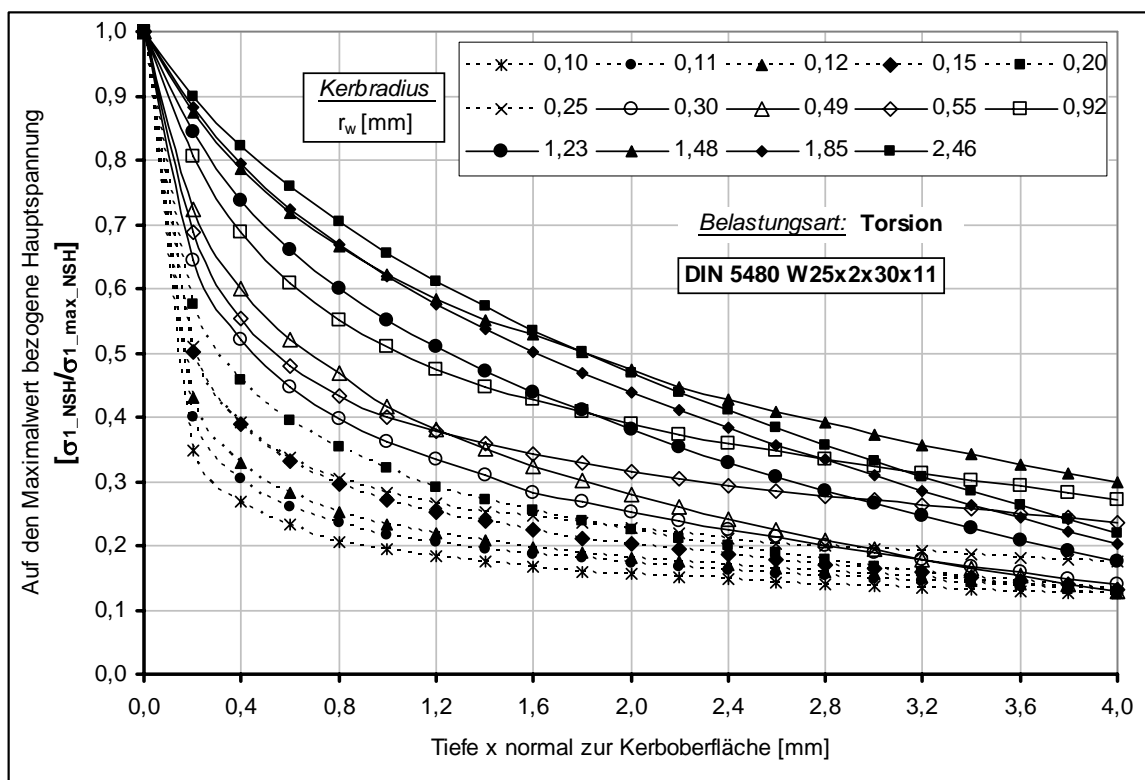


Bild D-2: W25x2x11 bei Torsionsbelastung

Zusammenfassung der allgemeinen **Spannungstiefenverläufe** nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei **Torsionsbelastung** für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellen **W15x2x6 (oben)** und **W25x2x11 (unten)** mit freiem Auslauf; $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

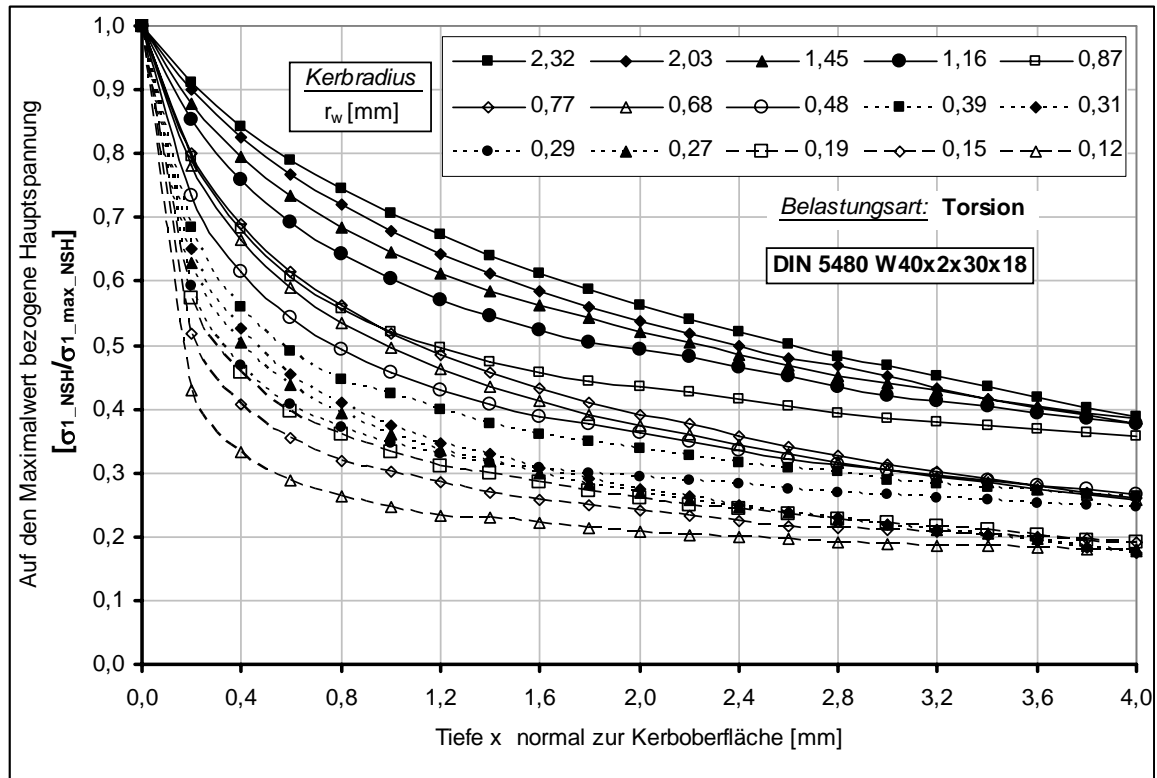


Bild D-3: W40x2x18 bei Torsionsbelastung

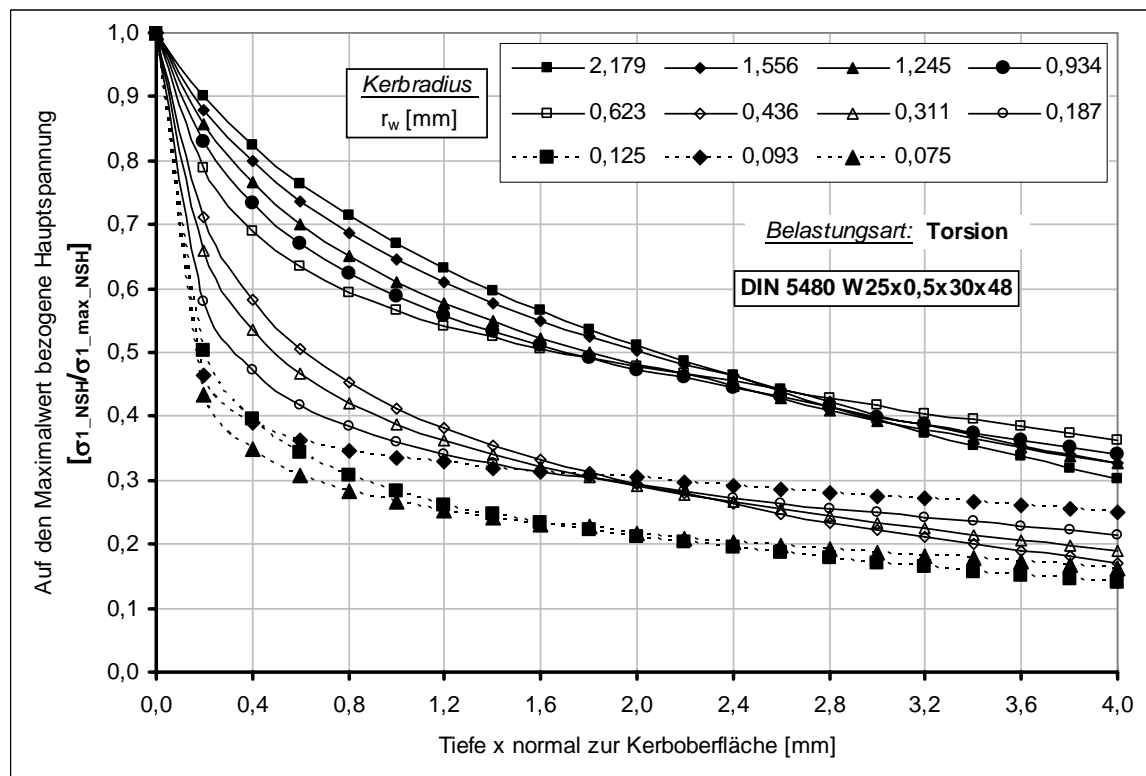


Bild D-4: W25x0,5x48 bei Torsionsbelastung

Zusammenfassung der allgemeinen **Spannungstiefenverläufe** nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei **Torsionsbelastung** für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrien **W40x2x18** (oben) und **W25x0,5x48** (unten) mit freiem Auslauf; $\tau_{r-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

Tabellen D-5 bis D-7: FE-berechnete Werte der bezogenen Spannungsgefälle (**oben**) sowie die Formzahl-tiefenverläufe (**unten**) bei **Biegung** für die Zahnwellen mit freiem Auslauf nach DIN 5480 (W15x2x6; W25x2x11; W40x2x18), $\sigma_{b-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

$$\alpha_{\sigma_{b_GEH}} = \frac{\sigma_{v_GEH_max}}{\sigma_{v_GEH_nenn}} = \frac{\sigma_{v_GEH_max}}{\sigma_{b_nenn}}$$

$$\alpha_{\sigma_b} = \frac{\sigma_{l_max}}{\sigma_{b_nenn}}$$

$$ZH_{\alpha_{\sigma_b}} = \frac{\alpha_{\sigma_{b_GEH}}}{\alpha_{\sigma_{b_NSH}}}$$

$$ZH_{G_{\sigma_b}^*} = \frac{G_{\sigma_{b_GEH}}^*}{G_{\sigma_{b_NSH}}^*}$$

Tabelle D-5:

Belastungsart:		Biegung		DIN 5480 W15 x 2 x 6				bez. Sp.-gefälle $G^* \text{ m}^{-1}$			
t_{a1}	r_w			d_w				DIN 743	Polynomisch		
[mm]	[mm]	r_w/t_{a1}	d_w/d_{a1}	[mm]	α_{σ_b}	$\alpha_{\sigma_{b_GEH}}$	$ZH_{\alpha_{\sigma_b}}$	/N3/	G_{NSH}^*	G_{GEH}^*	$ZH_{G_{\sigma_b}^*}$
2,56	0,10	0,04	0,65	9,49	3,910	3,269	0,836	23,00	6,921	7,773	1,123
2,92	0,12	0,04	0,60	8,76	3,615	3,033	0,839	19,17	6,726	7,693	1,144
2,56	0,26	0,10	0,65	9,49	2,742	2,396	0,874	8,98	5,195	6,197	1,193
2,92	0,29	0,10	0,60	8,76	2,540	2,220	0,874	7,88	4,917	5,974	1,215
2,56	0,51	0,20	0,65	9,49	2,115	1,896	0,896	4,51	3,579	4,385	1,225
2,92	0,58	0,20	0,60	8,76	1,981	1,758	0,887	3,97	3,354	4,106	1,224
2,56	2,56	1,00	0,65	9,49	1,319	1,229	0,932	0,90	1,014	1,301	1,283

$$G_{GEH}^* = 1,1 \cdot G_{NSH}^* + 0,36$$

$$\alpha_{\sigma_{b_GEH}} = 0,78 \cdot \alpha_{\sigma_{b_NSH}} + 0,22$$

$$G_{NSH}^* = -0,6 \cdot \alpha_{\sigma_b}^2 + 5,43 \cdot \alpha_{\sigma_b} - 5,12$$

$$G_{GEH}^* = -1,27 \cdot \alpha_{\sigma_{b_GEH}}^2 + 8,9 \cdot \alpha_{\sigma_{b_GEH}} - 7,74$$

Biege-Formzahl-tiefenverläufe (σ_{l-NSH} normiert auf die Nennspannung)												
r_w	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
[mm]	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,10	3,910	1,127	0,868	0,751	0,676	0,619	0,573	0,526	0,489	0,457	0,428	0,400
0,12	3,615	1,095	0,836	0,719	0,643	0,585	0,538	0,491	0,453	0,420	0,391	0,363
0,26	2,742	1,167	0,880	0,753	0,675	0,617	0,570	0,526	0,484	0,453	0,422	0,394
0,29	2,540	1,139	0,858	0,731	0,651	0,592	0,543	0,497	0,458	0,425	0,394	0,364
0,51	2,115	1,193	0,913	0,772	0,685	0,621	0,572	0,526	0,482	0,451	0,419	0,390
0,58	1,981	1,156	0,885	0,745	0,659	0,596	0,545	0,502	0,458	0,425	0,393	0,364
2,56	1,319	1,098	0,951	0,849	0,774	0,710	0,653	0,604	0,557	0,514	0,474	0,437

Tabelle D-6:

<i>Belastungsart:</i>		Biegung		DIN 5480 W25 x 2 x 11				bez. Sp.-gefälle G* [mm ⁻¹]			
t _{al}	r _w			d _w				DIN 743	<i>Polynomisch</i>		
[mm]	[mm]	r _w /t _{al}	d _w /d _{al}	[mm]	α _{cb}	α _{cb _GEH}	ZH _{α_{cb}}	/N3/	G* _{NSH}	G* _{GEH}	ZH _{G_{cb}*}
2,46	0,10	0,04	0,80	19,68	5,289	4,666	0,882	24,05	7,085	8,047	1,136
2,77	0,11	0,04	0,775	19,07	4,984	4,183	0,839	21,86	6,853	7,761	1,132
3,08	0,12	0,04	0,75	18,45	4,864	4,020	0,826	19,55	6,752	7,733	1,145
3,69	0,15	0,04	0,70	17,22	4,516	3,829	0,848	16,04	6,434	7,520	1,169
2,77	0,17	0,06	0,775	19,07	4,174	3,574	0,856	14,28	6,152	7,159	1,164
3,08	0,19	0,06	0,75	18,45	4,078	3,564	0,874	13,11	5,980	7,102	1,188
4,92	0,20	0,04	0,60	14,76	3,839	3,335	0,869	11,50	5,787	7,059	1,220
2,46	0,25	0,10	0,80	19,68	3,609	3,201	0,887	9,99	5,294	6,354	1,200
2,77	0,28	0,10	0,775	19,07	3,439	3,011	0,876	8,78	5,022	6,042	1,203
4,92	0,30	0,06	0,60	14,76	3,261	2,836	0,870	7,67	4,880	6,087	1,247
3,08	0,31	0,10	0,75	18,45	3,306	2,929	0,886	7,98	4,797	5,890	1,228
3,69	0,37	0,10	0,70	17,22	3,057	2,672	0,874	6,64	4,371	5,368	1,228
2,46	0,49	0,20	0,80	19,68	2,651	2,399	0,905	5,12	3,964	4,910	1,239
2,77	0,55	0,20	0,775	19,07	2,630	2,362	0,898	4,56	3,443	4,310	1,252
3,08	0,92	0,30	0,75	18,45	2,197	1,970	0,897	2,76	2,415	2,926	1,212
2,46	1,23	0,50	0,80	19,68	1,910	1,749	0,916	2,11	2,039	2,472	1,212
3,69	1,48	0,40	0,70	17,22	1,857	1,684	0,907	1,74	1,668	2,042	1,224
6,15	1,85	0,30	0,50	12,30	1,606	1,428	0,889	1,24	1,477	1,507	1,020
6,15	2,46	0,40	0,50	12,30	1,487	1,337	0,899	0,93	1,203	1,203	1,000

$$G_{GEH}^* = 1,16 \cdot G_{NSH}^* + 0,11$$

$$\alpha_{ob_GEH} = 0,83 \cdot \alpha_{ob_NSH} + 0,16$$

$$G_{NSH}^* = -0,25 \cdot \alpha_{ob}^2 + 3,3 \cdot \alpha_{ob} - 3,36$$

$$G_{GEH}^* = -0,58 \cdot \alpha_{ob_GEH}^2 + 5,6 \cdot \alpha_{ob_GEH} - 5,5$$

Biege-Formzahliefenverläufe (σ_{I_NSH} normiert auf die Nennspannung)												
r_w	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
[mm]	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,10	5,289	1,460	1,138	0,999	0,926	0,874	0,822	0,775	0,744	0,720	0,695	0,671
0,11	4,984	1,463	1,132	0,990	0,905	0,846	0,802	0,765	0,736	0,704	0,672	0,641
0,12	4,864	1,464	1,123	0,978	0,891	0,829	0,785	0,746	0,715	0,682	0,650	0,620
0,15	4,516	1,465	1,108	0,958	0,867	0,803	0,756	0,719	0,686	0,649	0,613	0,586
0,17	4,174	1,461	1,123	0,983	0,901	0,848	0,809	0,749	0,725	0,702	0,676	0,654
0,19	4,078	1,480	1,128	0,980	0,892	0,829	0,783	0,747	0,715	0,682	0,649	0,620
0,20	3,839	1,438	1,070	0,914	0,817	0,747	0,693	0,651	0,616	0,583	0,554	0,527
0,25	3,609	1,515	1,157	1,004	0,917	0,859	0,814	0,779	0,744	0,721	0,696	0,670
0,28	3,439	1,517	1,153	0,995	0,905	0,844	0,798	0,765	0,735	0,703	0,670	0,638
0,30	3,261	1,469	1,096	0,921	0,818	0,748	0,694	0,650	0,613	0,581	0,548	0,522
0,31	3,306	1,517	1,147	0,985	0,892	0,828	0,782	0,741	0,711	0,680	0,649	0,617
0,37	3,057	1,505	1,144	0,998	0,893	0,780	0,742	0,701	0,667	0,640	0,610	0,587
0,49	2,651	1,448	1,162	1,008	0,920	0,862	0,817	0,764	0,738	0,715	0,693	0,673
0,55	2,630	1,517	1,173	1,009	0,913	0,849	0,804	0,771	0,737	0,702	0,667	0,638
0,92	2,197	1,489	1,193	1,027	0,923	0,849	0,793	0,749	0,708	0,680	0,653	0,625
1,23	1,910	1,385	1,154	1,013	0,924	0,861	0,814	0,780	0,753	0,726	0,702	0,679
1,48	1,857	1,407	1,170	1,020	0,915	0,838	0,778	0,731	0,698	0,662	0,625	0,589
1,85	1,606	1,265	1,080	0,949	0,849	0,769	0,703	0,647	0,599	0,556	0,518	0,483
2,46	1,487	1,219	1,060	0,943	0,851	0,775	0,712	0,657	0,609	0,566	0,527	0,491

Tabelle D-7:

Belastungsart:		Biegung		DIN 5480 W40 x 2 x 18				bez. Sp.-gefälle G^* [mm ⁻¹]			
t_{al}	r_w			d_w				DIN 743	Polynomisch		
[mm]	[mm]	r_w/t_{al}	d_w/d_{al}	[mm]	α_{ob}	α_{ob_GEH}	$ZH_{\alpha_{ob}}$	/N3/	G^*_{NSH}	G^*_{GEH}	$ZH_{G^*_{ob}}$
2,90	0,12	0,04	0,85	32,81	5,361	4,517	0,843	20,73	6,838	7,715	1,128
3,86	0,15	0,04	0,80	30,88	5,064	4,313	0,852	15,61	6,407	7,461	1,165
4,83	0,19	0,04	0,75	28,95	4,807	4,126	0,858	12,46	5,972	7,157	1,198
2,90	0,29	0,10	0,85	32,81	3,573	3,063	0,857	8,47	4,866	5,742	1,180
3,86	0,39	0,10	0,80	30,88	3,384	2,987	0,883	6,37	4,246	5,281	1,244
4,83	0,48	0,10	0,75	28,95	3,200	2,773	0,867	5,09	3,758	4,637	1,234
7,72	0,77	0,10	0,60	23,16	2,673	2,345	0,877	2,98	2,737	3,473	1,269
2,90	0,87	0,30	0,85	32,81	2,420	2,173	0,898	2,93	2,514	3,026	1,204
3,86	1,16	0,30	0,80	30,88	2,268	2,040	0,899	2,20	2,042	2,510	1,229
4,83	1,45	0,30	0,75	28,95	2,151	1,937	0,901	1,76	1,672	2,077	1,242
6,76	2,03	0,30	0,65	25,09	1,926	1,720	0,893	1,13	1,274	1,460	1,146
7,72	2,32	0,30	0,60	23,16	1,810	1,621	0,896	0,99	1,153	1,329	1,153

$$G^*_{GEH} = 1,15 \cdot G^*_{NSH} + 0,16$$

$$\alpha_{ob_GEH} = 0,82 \cdot \alpha_{ob_NSH} + 0,17$$

$$G^*_{NSH} = -0,22 \cdot \alpha_{ob}^2 + 3,14 \cdot \alpha_{ob} - 3,95$$

$$G^*_{GEH} = -0,51 \cdot \alpha_{ob_GEH}^2 + 5,4 \cdot \alpha_{ob_GEH} - 6,25$$

Biege-Formzahliefenverläufe (σ_{I-NSH} normiert auf die Nennspannung)												
r_w	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
[mm]	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,12	5,361	1,587	1,238	1,091	1,007	0,952	0,912	0,877	0,853	0,832	0,807	0,781
0,15	5,064	1,663	1,274	1,114	1,023	0,961	0,919	0,878	0,830	0,783	0,755	0,737
0,19	4,807	1,729	1,292	1,117	1,015	0,945	0,895	0,849	0,822	0,790	0,753	0,715
0,29	3,573	1,627	1,248	1,091	1,001	0,942	0,899	0,866	0,839	0,816	0,796	0,774
0,39	3,384	1,710	1,302	1,122	1,021	0,952	0,909	0,872	0,832	0,787	0,750	0,733
0,48	3,200	1,752	1,338	1,144	1,029	0,952	0,897	0,853	0,816	0,781	0,759	0,735
0,77	2,673	1,716	1,338	1,132	1,002	0,912	0,844	0,792	0,748	0,712	0,680	0,653
0,87	2,420	1,621	1,306	1,137	1,035	0,966	0,916	0,879	0,848	0,823	0,800	0,778
1,16	2,268	1,632	1,341	1,169	1,057	0,978	0,919	0,874	0,838	0,807	0,780	0,755
1,45	2,151	1,631	1,360	1,192	1,076	0,992	0,928	0,877	0,835	0,804	0,775	0,746
2,03	1,926	1,552	1,330	1,177	1,064	0,978	0,908	0,853	0,805	0,765	0,730	0,699
2,32	1,810	1,488	1,290	1,149	1,043	0,959	0,890	0,834	0,786	0,745	0,709	0,677

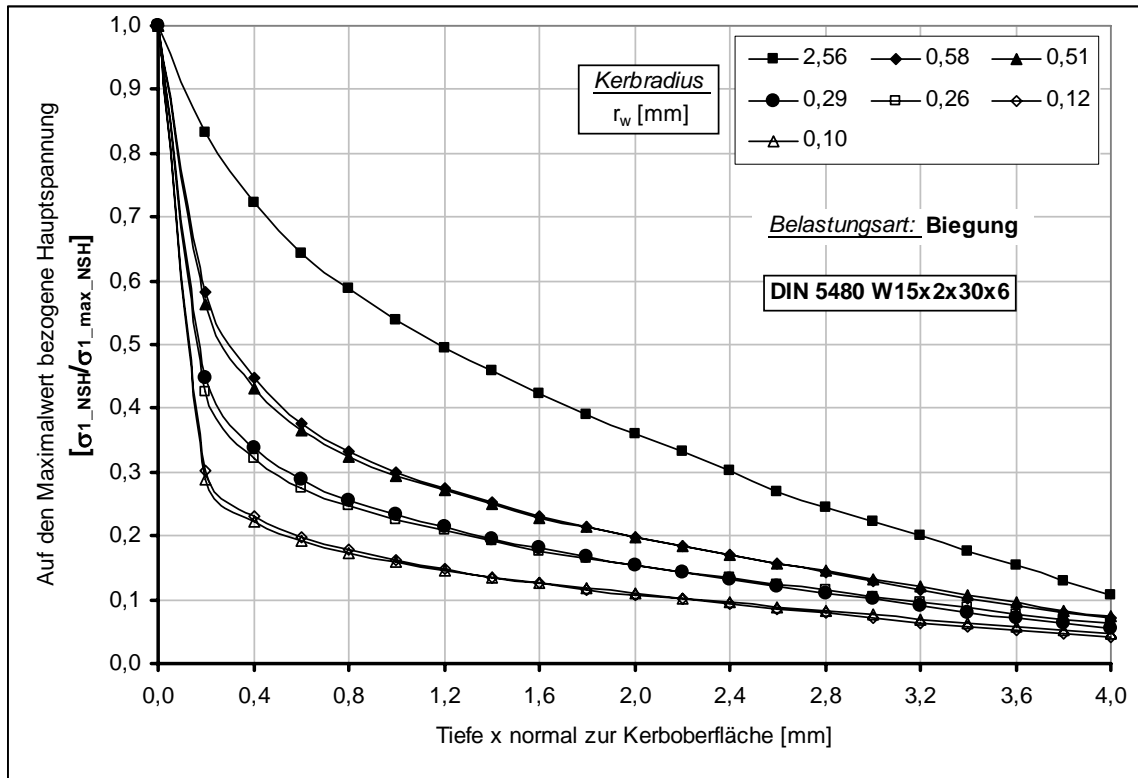


Bild D-5: W15x2x6 bei Biegebelastung

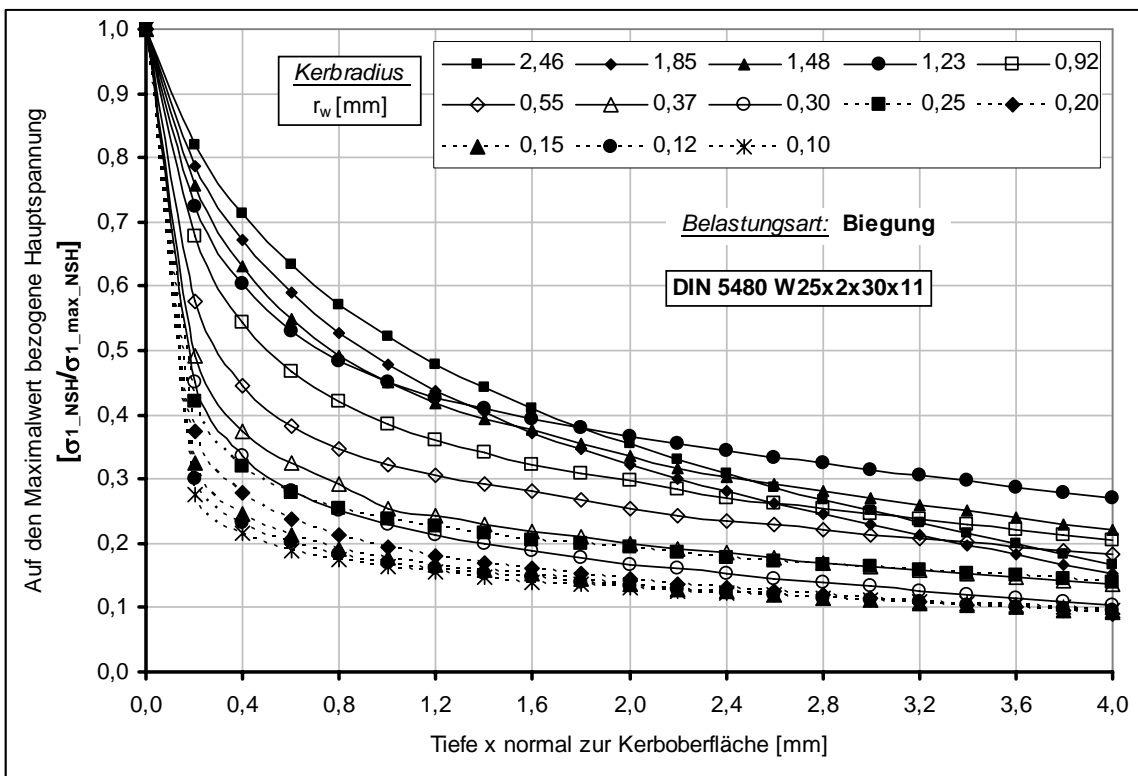


Bild D-6: W25x2x11 bei Biegebelastung

Zusammenfassung der allgemeinen **Spannungstiefenverläufe** nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei **Biegebelastung** für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrien **W15x2x6 (oben)** und **W25x2x11 (unten)** mit freiem Auslauf; $\sigma_{b-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

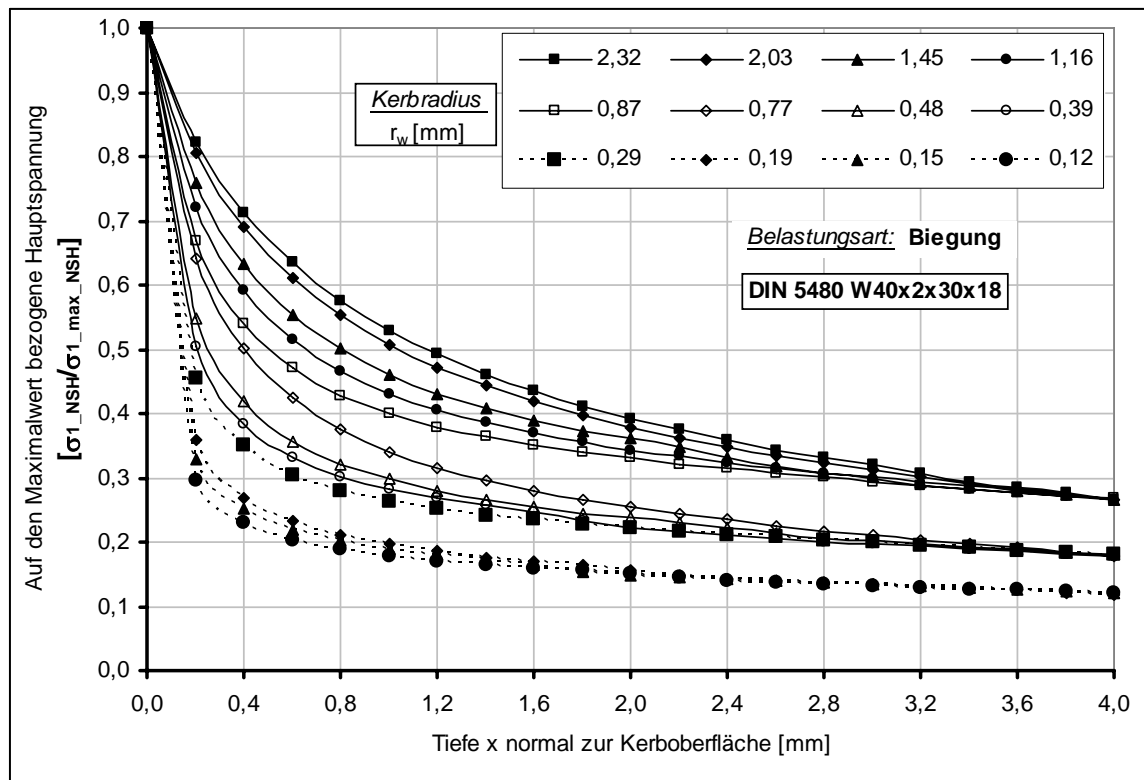


Bild D-7: W40x2x18 bei Biegebelastung

Zusammenfassung der allgemeinen **Spannungstiefenverläufe** nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei **Biegebelastung** für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrie **W40x2x18** mit freiem Auslauf; $\sigma_{b-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

Tabellen D-8 bis D-11: FE-berechnete Werte der bezogenen Spannungsgefälle (**oben**) sowie die Formzahl-tiefenverläufe (**unten**) bei **Zug/Druck** für die Zahnwellen mit freiem Auslauf nach DIN 5480 (W15x2x6; W25x2x11; W40x2x18; W25x0,5x48), $\sigma_{zd-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

$$\alpha_{\sigma_{zd_GEH}} = \frac{\sigma_{v_GEH_max}}{\sigma_{v_GEH_nenn}} = \frac{\sigma_{v_GEH_max}}{\sigma_{zd_nenn}}$$

$$\alpha_{\sigma_{zd}} = \frac{\sigma_{l_max}}{\sigma_{zd_nenn}}$$

$$ZH_{\alpha_{\sigma_{zd}}} = \frac{\alpha_{\sigma_{zd_GEH}}}{\alpha_{\sigma_{zd_NSH}}}$$

$$ZH_{G_{\sigma_{zd}}} = \frac{G_{\sigma_{zd_GEH}}^*}{G_{\sigma_{zd_NSH}}^*}$$

Tabelle D-8:

<u>Belastungsart:</u>		Zug		DIN 5480 W15 x 2 x 6				bez. Sp.-gefälle $G^* [\text{mm}^{-1}]$			
t_{a1}	r_w			d_w				DIN 743	<i>Polynomisch</i>		
[mm]	[mm]	r_w/t_{a1}	d_w/d_{a1}	[mm]	$\alpha_{\sigma_{zd}}$	$\alpha_{\sigma_{zd_GEH}}$	$ZH_{\alpha_{\sigma_{zd}}}$	/N3/	G_{NSH}^*	G_{GEH}^*	$ZH_{G_{\sigma_{zd}}}$
2,56	0,10	0,04	0,65	9,49	5,022	4,199	0,836	23,00	6,959	7,814	1,123
2,92	0,12	0,04	0,60	8,76	4,749	3,989	0,840	19,17	6,756	7,713	1,142
2,56	0,26	0,10	0,65	9,49	3,442	3,003	0,872	8,98	5,154	6,163	1,196
2,92	0,29	0,10	0,60	8,76	3,232	2,826	0,874	7,88	4,862	5,910	1,216
2,56	0,51	0,20	0,65	9,49	2,634	2,358	0,895	4,51	3,514	4,325	1,231
2,92	0,58	0,20	0,60	8,76	2,480	2,201	0,888	3,97	3,233	3,966	1,227
2,56	2,56	1,00	0,65	9,49	1,563	1,453	0,930	0,90	0,916	1,142	1,247

$$G_{GEH}^* = 1,11 \cdot G_{NSH}^* + 0,34$$

$$\alpha_{\sigma_{zd_GEH}} = 0,8 \cdot \alpha_{\sigma_{zd_NSH}} + 0,25$$

$$G_{NSH}^* = -0,32 \cdot \alpha_{\sigma_{zd}}^2 + 3,9 \cdot \alpha_{\sigma_{zd}} - 4,4$$

$$G_{GEH}^* = -0,7 \cdot \alpha_{\sigma_{zd_GEH}}^2 + 6,33 \cdot \alpha_{\sigma_{zd_GEH}} - 6,64$$

Zug-Formzahl-tiefenverläufe (σ_{l-NSH} normiert auf die Nennspannung)												
r_w	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
[mm]	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,10	5,022	1,450	1,156	1,037	0,972	0,931	0,904	0,871	0,853	0,840	0,831	0,824
0,12	4,749	1,441	1,134	1,014	0,947	0,905	0,877	0,843	0,822	0,808	0,798	0,790
0,26	3,442	1,497	1,171	1,042	0,974	0,931	0,905	0,876	0,851	0,842	0,831	0,825
0,29	3,232	1,482	1,154	1,021	0,950	0,905	0,877	0,844	0,824	0,812	0,802	0,794
0,51	2,634	1,523	1,209	1,066	0,988	0,939	0,913	0,882	0,854	0,845	0,836	0,830
0,58	2,480	1,496	1,191	1,047	0,966	0,916	0,881	0,860	0,834	0,819	0,808	0,800
2,56	1,563	1,334	1,192	1,099	1,034	0,993	0,955	0,927	0,908	0,893	0,880	0,872

Tabelle D-9:

Belastungsart:		Zug		DIN 5480 W25 x 2 x 11				bez. Sp.-gefälle G^* [mm ⁻¹]			
t_{a1}	r_w			d_w				DIN 743	Polynomisch		
[mm]	[mm]	r_w/t_{a1}	d_w/d_{a1}	[mm]	$\alpha_{\sigma zd}$	$\alpha_{\sigma zd_GEH}$	$ZH_{\alpha_{\sigma zd}}$	/N3/	G^*_{NSH}	G^*_{GEH}	$ZH_{G^*_{\sigma zd}}$
2,46	0,10	0,04	0,80	19,68	5,627	4,964	0,882	24,05	7,037	7,975	1,133
2,77	0,11	0,04	0,775	19,07	5,391	4,526	0,840	21,86	6,809	7,689	1,129
3,08	0,12	0,04	0,75	18,45	5,349	4,590	0,858	19,55	6,712	7,694	1,146
3,69	0,15	0,04	0,70	17,22	5,115	4,337	0,848	16,04	6,401	7,462	1,166
2,77	0,17	0,06	0,775	19,07	4,544	3,893	0,857	14,28	6,111	7,090	1,160
3,08	0,19	0,06	0,75	18,45	4,489	3,925	0,874	13,11	5,943	7,037	1,184
4,92	0,20	0,04	0,60	14,76	4,561	3,960	0,868	11,50	5,759	7,018	1,219
2,46	0,25	0,10	0,80	19,68	3,866	3,428	0,887	9,99	5,269	6,331	1,202
2,77	0,28	0,10	0,775	19,07	3,740	3,275	0,876	8,78	4,999	5,999	1,200
4,92	0,30	0,06	0,60	14,76	3,871	3,365	0,869	7,67	4,849	6,046	1,247
3,08	0,31	0,10	0,75	18,45	3,653	3,237	0,886	7,98	4,777	5,852	1,225
3,69	0,37	0,10	0,70	17,22	3,475	3,037	0,874	6,64	4,351	5,338	1,227
2,46	0,49	0,20	0,80	19,68	3,104	2,699	0,870	5,12	3,761	4,754	1,264
2,77	0,55	0,20	0,775	19,07	2,867	2,574	0,898	4,56	3,346	4,135	1,236
3,08	0,92	0,30	0,75	18,45	2,435	2,184	0,897	2,76	2,384	2,893	1,214
2,46	1,23	0,50	0,80	19,68	2,204	1,933	0,877	2,11	1,856	2,137	1,151
3,69	1,48	0,40	0,70	17,22	2,109	1,910	0,906	1,74	1,626	2,000	1,230
6,15	1,85	0,30	0,50	12,30	1,919	1,692	0,882	1,24	1,353	1,419	1,049
6,15	2,46	0,40	0,50	12,30	1,756	1,547	0,881	0,93	0,998	1,096	1,098

$$G^*_{GEH} = 1,16 \cdot G^*_{NSH} + 0,13$$

$$\alpha_{\sigma zd_GEH} = 0,84 \cdot \alpha_{\sigma zd_NSH} + 0,11$$

$$G^*_{NSH} = -0,23 \cdot \alpha_{\sigma zd}^2 + 3,24 \cdot \alpha_{\sigma zd} - 4,1$$

$$G^*_{GEH} = -0,5 \cdot \alpha_{\sigma zd_GEH}^2 + 5,35 \cdot \alpha_{\sigma zd_GEH} - 6,22$$

Zug-Formzahl-tiefenverläufe (σ_{L_NSH} normiert auf die Nennspannung)												
r_w	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
[mm]	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,10	5,627	1,593	1,275	1,146	1,085	1,046	1,007	0,972	0,955	0,945	0,934	0,924
0,11	5,391	1,621	1,288	1,153	1,078	1,031	0,999	0,979	0,961	0,942	0,923	0,904
0,12	5,349	1,646	1,297	1,157	1,078	1,027	0,995	0,971	0,952	0,931	0,910	0,893
0,15	5,115	1,692	1,313	1,163	1,077	1,023	0,986	0,962	0,939	0,914	0,889	0,875
0,17	4,544	1,625	1,282	1,148	1,076	1,034	1,009	0,976	0,962	0,950	0,935	0,924
0,19	4,489	1,662	1,302	1,158	1,079	1,027	0,994	0,972	0,952	0,930	0,909	0,893
0,20	4,561	1,735	1,324	1,159	1,063	0,999	0,953	0,921	0,895	0,874	0,856	0,840
0,25	3,866	1,643	1,287	1,153	1,079	1,033	1,001	0,980	0,966	0,955	0,942	0,928
0,28	3,740	1,675	1,307	1,158	1,079	1,031	0,998	0,981	0,963	0,944	0,924	0,905
0,30	3,871	1,769	1,352	1,168	1,066	1,002	0,957	0,922	0,896	0,875	0,854	0,841
0,31	3,653	1,700	1,320	1,163	1,080	1,027	0,993	0,970	0,952	0,933	0,913	0,893
0,37	3,475	1,735	1,351	1,206	1,107	0,998	0,972	0,942	0,920	0,906	0,889	0,879
0,49	3,104	1,717	1,339	1,159	1,065	0,965	0,916	0,880	0,852	0,831	0,812	0,797
0,55	2,867	1,698	1,348	1,184	1,095	1,040	1,004	0,986	0,966	0,946	0,925	0,906
0,92	2,435	1,670	1,365	1,204	1,109	1,047	1,004	0,972	0,955	0,939	0,923	0,907
1,23	2,204	1,630	1,356	1,195	1,088	1,013	0,958	0,916	0,883	0,859	0,833	0,814
1,48	2,109	1,618	1,371	1,222	1,124	1,057	1,009	0,974	0,955	0,932	0,908	0,884
1,85	1,919	1,537	1,327	1,189	1,091	1,020	0,967	0,925	0,892	0,864	0,842	0,823
2,46	1,756	1,474	1,301	1,193	1,113	1,051	1,001	0,961	0,928	0,900	0,876	0,857

Tabelle D-10:**Belastungsart:****Zug****DIN 5480 W40 x 2 x 18**bez. Sp.-gefälle G^* [mm⁻¹]

t_{a1} [mm]	r_w [mm]	r_w/t_{a1}	d_w/d_{a1}	d_w [mm]	$\alpha_{\sigma_{zd}}$	$\alpha_{\sigma_{zd_GEH}}$	$ZH_{\alpha_{\sigma_{zd}}}$	DIN 743 /N3/	Polynomisch G^*_{NSH} G^*_{GEH}		$ZH_{G^*_{\sigma_{zd}}}$
2,90	0,12	0,04	0,85	32,81	5,700	4,806	0,843	20,73	6,807	7,656	1,125
3,86	0,15	0,04	0,80	30,88	5,553	4,735	0,853	15,61	6,339	7,377	1,164
4,83	0,19	0,04	0,75	28,95	5,425	4,660	0,859	12,46	5,946	7,100	1,194
6,76	0,27	0,04	0,65	25,09	4,802	4,151	0,864	8,51	5,113	6,372	1,246
2,90	0,29	0,10	0,85	32,81	3,845	3,300	0,858	8,47	4,852	5,706	1,176
7,72	0,31	0,04	0,60	23,16	4,578	3,972	0,868	7,45	4,781	6,053	1,266
3,86	0,39	0,10	0,80	30,88	3,733	3,298	0,883	6,37	4,239	5,256	1,240
4,83	0,48	0,10	0,75	28,95	3,625	3,148	0,868	5,09	3,738	4,597	1,230
6,76	0,68	0,10	0,65	25,09	3,341	2,922	0,875	3,40	2,986	3,761	1,260
7,72	0,77	0,10	0,60	23,16	3,189	2,797	0,877	2,98	2,721	3,455	1,270
2,90	0,87	0,30	0,85	32,81	2,597	2,334	0,899	2,93	2,499	3,004	1,202
3,86	1,16	0,30	0,80	30,88	2,504	2,254	0,900	2,20	2,022	2,483	1,228
4,83	1,45	0,30	0,75	28,95	2,419	2,181	0,902	1,76	1,645	2,044	1,243
6,76	2,03	0,30	0,65	25,09	2,245	2,003	0,892	1,13	1,245	1,432	1,150
7,72	2,32	0,30	0,60	23,16	2,138	1,912	0,894	0,99	1,117	1,296	1,160

$$G^*_{GEH} = 1,16 \cdot G^*_{NSH} + 0,17$$

$$\alpha_{\sigma_{zd_GEH}} = 0,82 \cdot \alpha_{\sigma_{zd_NSH}} + 0,19$$

$$G^*_{NSH} = -0,12 \cdot \alpha_{\sigma_{zd}}^2 + 2,4 \cdot \alpha_{\sigma_{zd}} - 3,4$$

$$G^*_{GEH} = -0,37 \cdot \alpha_{\sigma_{zd-GEH}}^2 + 4,6 \cdot \alpha_{\sigma_{zd-GEH}} - 6,15$$

Zug-Formzahl-tiefenverläufe (σ_{1-NSH} normiert auf die Nennspannung)

r_w [mm]	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,12	5,700	1,715	1,361	1,217	1,140	1,092	1,060	1,036	1,023	1,009	0,991	0,971
0,15	5,553	1,859	1,436	1,273	1,185	1,129	1,093	1,064	1,029	0,988	0,959	0,949
0,19	5,425	1,976	1,503	1,319	1,214	1,147	1,101	1,063	1,041	1,014	0,982	0,949
0,27	4,802	2,075	1,567	1,354	1,233	1,153	1,096	1,050	1,019	0,984	0,952	0,935
0,29	3,845	1,767	1,379	1,223	1,139	1,086	1,050	1,025	1,007	0,992	0,981	0,972
0,31	4,578	2,099	1,580	1,357	1,230	1,147	1,087	1,040	1,008	0,970	0,939	0,920
0,39	3,733	1,901	1,471	1,288	1,190	1,128	1,094	1,063	1,028	0,989	0,957	0,949
0,48	3,625	1,998	1,542	1,335	1,218	1,143	1,092	1,054	1,024	1,000	0,984	0,967
0,68	3,341	2,072	1,620	1,391	1,256	1,165	1,101	1,054	1,016	0,986	0,961	0,941
0,77	3,189	2,061	1,628	1,398	1,259	1,165	1,097	1,047	1,008	0,976	0,950	0,930
0,87	2,597	1,751	1,428	1,262	1,165	1,104	1,062	1,033	1,012	0,996	0,982	0,974
1,16	2,504	1,813	1,506	1,330	1,221	1,146	1,094	1,056	1,027	1,004	0,986	0,975
1,45	2,419	1,848	1,558	1,382	1,264	1,183	1,123	1,079	1,043	1,023	1,001	0,979
2,03	2,245	1,823	1,579	1,416	1,299	1,212	1,145	1,094	1,051	1,017	0,988	0,965
2,32	2,138	1,774	1,556	1,405	1,295	1,210	1,144	1,091	1,048	1,012	0,982	0,957

Tabelle D-11:

<u>Belastungsart:</u>		Zug		DIN 5480 W25 x 0,5 x 48				bez. Sp.-gefälle G^* [mm ⁻¹]			
t_{a1}	r_w	r_w/t_{a1}	d_w/d_{a1}	d_w				DIN 743	<i>Polynomisch</i>		$ZH_{G_{\sigma zd}^*}$
[mm]	[mm]			[mm]	$\alpha_{\sigma zd}$	$\alpha_{\sigma zd_GEH}$	$ZH_{\alpha_{\sigma zd}}$	/N3/	G_{NSH}^*	G_{GEH}^*	
1,87	0,075	0,04	0,85	21,17	5,565	4,577	0,822	32,19	7,215	7,915	1,097
1,25	0,075	0,06	0,90	22,41	4,756	3,938	0,828	32,47	7,073	7,595	1,074
0,93	0,093	0,10	0,93	23,03	3,993	3,370	0,844	26,31	6,732	7,223	1,073
3,11	0,125	0,04	0,75	18,68	5,360	4,506	0,841	19,31	6,612	7,627	1,154
1,25	0,125	0,10	0,90	22,41	4,044	3,440	0,851	19,73	6,430	7,131	1,109
4,36	0,174	0,04	0,65	16,19	4,954	4,209	0,850	13,20	6,051	7,253	1,199
1,87	0,187	0,10	0,85	21,17	3,984	3,431	0,861	13,16	5,810	6,754	1,162
3,11	0,311	0,10	0,75	18,68	3,734	3,226	0,864	7,89	4,742	5,791	1,221
4,36	0,436	0,10	0,65	16,19	3,412	2,938	0,861	5,28	3,953	4,884	1,236
1,25	0,623	0,50	0,90	22,41	2,318	2,089	0,901	4,18	3,211	3,796	1,182
1,87	0,934	0,50	0,85	21,17	2,275	2,046	0,899	2,78	2,415	2,904	1,202
2,49	1,245	0,50	0,80	19,92	2,196	1,982	0,903	2,09	1,898	2,324	1,224
3,11	1,556	0,50	0,75	18,68	2,098	1,899	0,905	1,67	1,577	1,915	1,214
4,36	2,179	0,50	0,65	16,19	1,906	1,720	0,903	1,06	1,153	1,352	1,173

$$G_{GEH}^* = 1,08 \cdot G_{NSH}^* + 0,33$$

$$\alpha_{\sigma zd_GEH} = 0,79 \cdot \alpha_{\sigma zd_NSH} + 0,25$$

$$G_{NSH}^* = -0,4 \cdot \alpha_{\sigma zd}^2 + 4,54 \cdot \alpha_{\sigma zd} - 5,94$$

$$G_{GEH}^* = -0,76 \cdot \alpha_{\sigma zd_GEH}^2 + 7 \cdot \alpha_{\sigma zd_GEH} - 8,33$$

Zug-Formzahl-tiefenverläufe (σ_{1-NSH} normiert auf die Nennspannung)												
r_w	Tiefe x [mm] normal zur Oberfläche											
[mm]	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20
0,075	5,565	1,513	1,239	1,123	1,061	1,021	0,994	0,975	0,960	0,948	0,940	0,930
0,075	4,756	1,370	1,160	1,078	1,038	1,015	0,999	0,986	0,970	0,952	0,938	0,935
0,093	3,993	1,281	1,107	1,046	1,018	1,002	0,990	0,984	0,976	0,965	0,955	0,950
0,125	5,360	1,690	1,326	1,178	1,092	1,036	0,999	0,973	0,950	0,925	0,899	0,886
0,125	4,044	1,384	1,162	1,073	1,031	1,004	0,987	0,976	0,967	0,961	0,955	0,951
0,174	4,954	1,769	1,354	1,186	1,088	1,025	0,980	0,950	0,921	0,890	0,866	0,853
0,187	3,984	1,545	1,247	1,122	1,060	1,020	0,993	0,973	0,959	0,947	0,938	0,930
0,311	3,734	1,747	1,353	1,187	1,096	1,038	0,998	0,973	0,949	0,924	0,898	0,887
0,436	3,412	1,816	1,396	1,207	1,099	1,031	0,982	0,946	0,918	0,895	0,876	0,861
0,623	2,318	1,428	1,188	1,089	1,036	1,007	0,988	0,975	0,966	0,959	0,954	0,949
0,934	2,275	1,560	1,291	1,156	1,080	1,032	1,000	0,977	0,961	0,948	0,938	0,931
1,245	2,196	1,618	1,355	1,209	1,117	1,056	1,014	0,984	0,961	0,943	0,928	0,919
1,556	2,098	1,635	1,407	1,263	1,168	1,098	1,047	1,008	0,978	0,954	0,934	0,918
2,179	1,906	1,577	1,390	1,265	1,174	1,106	1,052	1,009	0,975	0,946	0,923	0,906

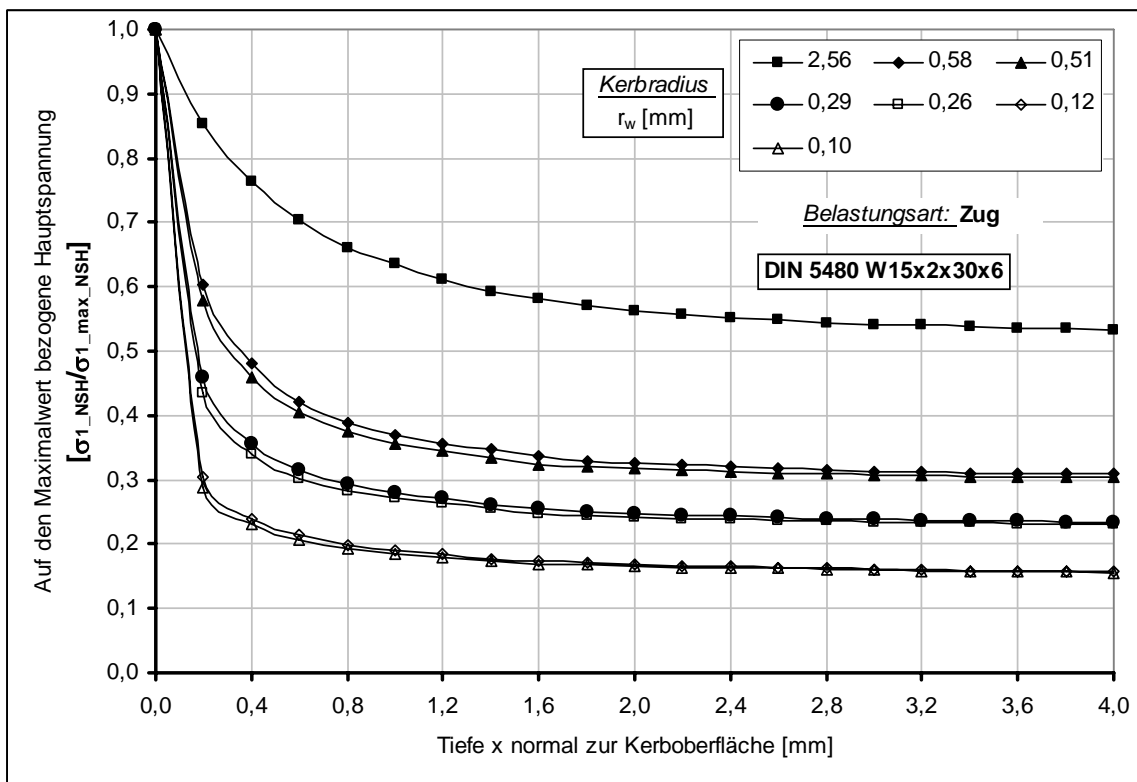


Bild D-8: W15x2x6 bei Zug/Druck-Belastung

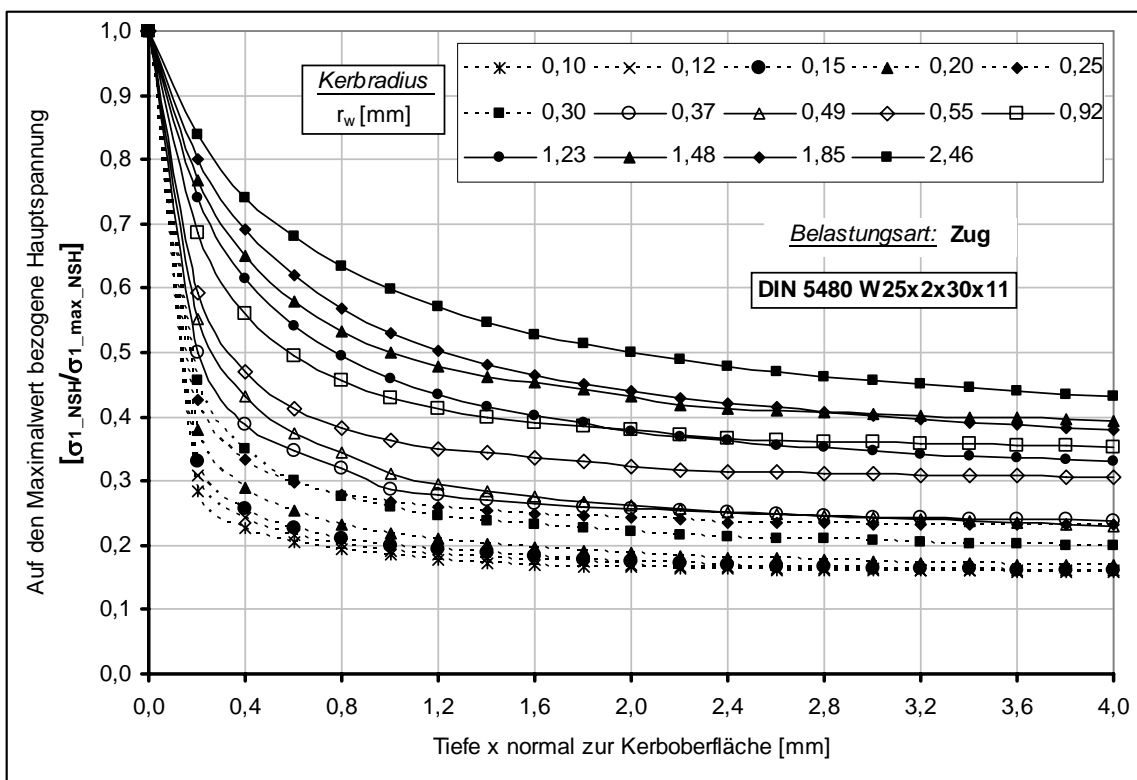


Bild D-9: W25x2x11 bei Zug/Druck-Belastung

Zusammenfassung der allgemeinen **Spannungstiefenverläufe** nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei **Zug/Druck-Belastung** für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrien **W15x2x6** (oben) und **W25x2x11** (unten) mit freiem Auslauf; $\sigma_{zd-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

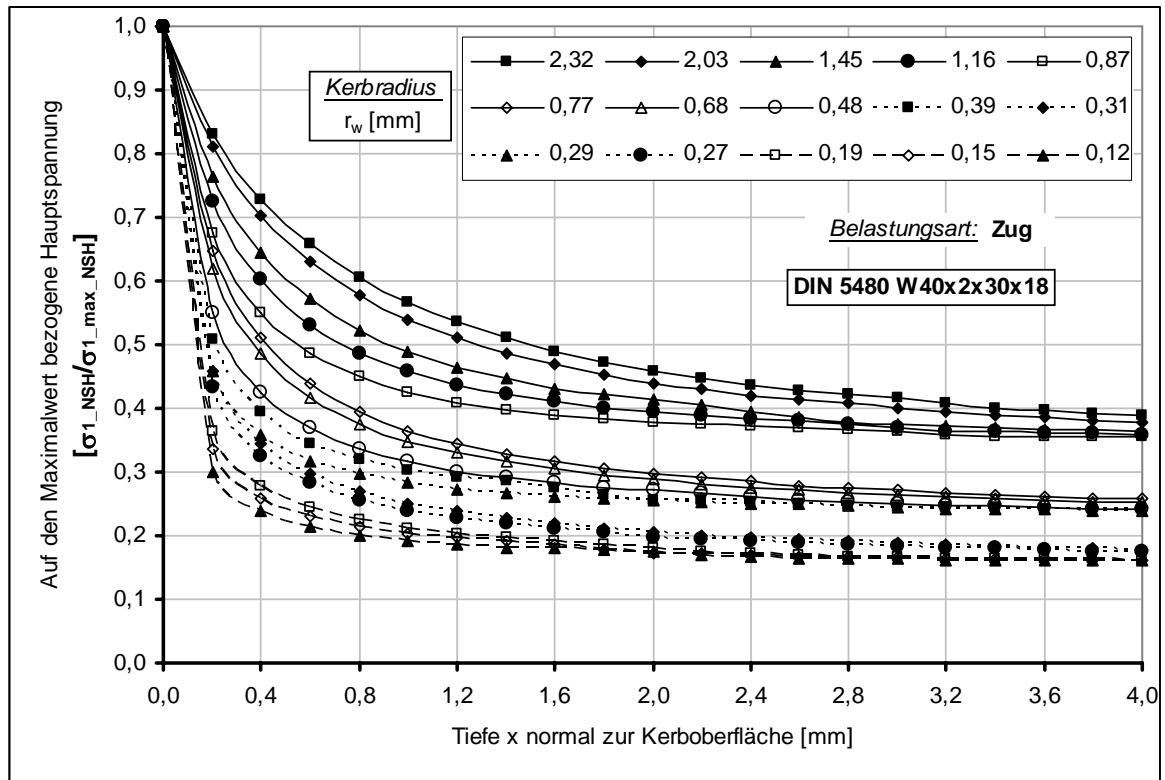


Bild D-10: W40x2x18 bei Zug/Druck-Belastung

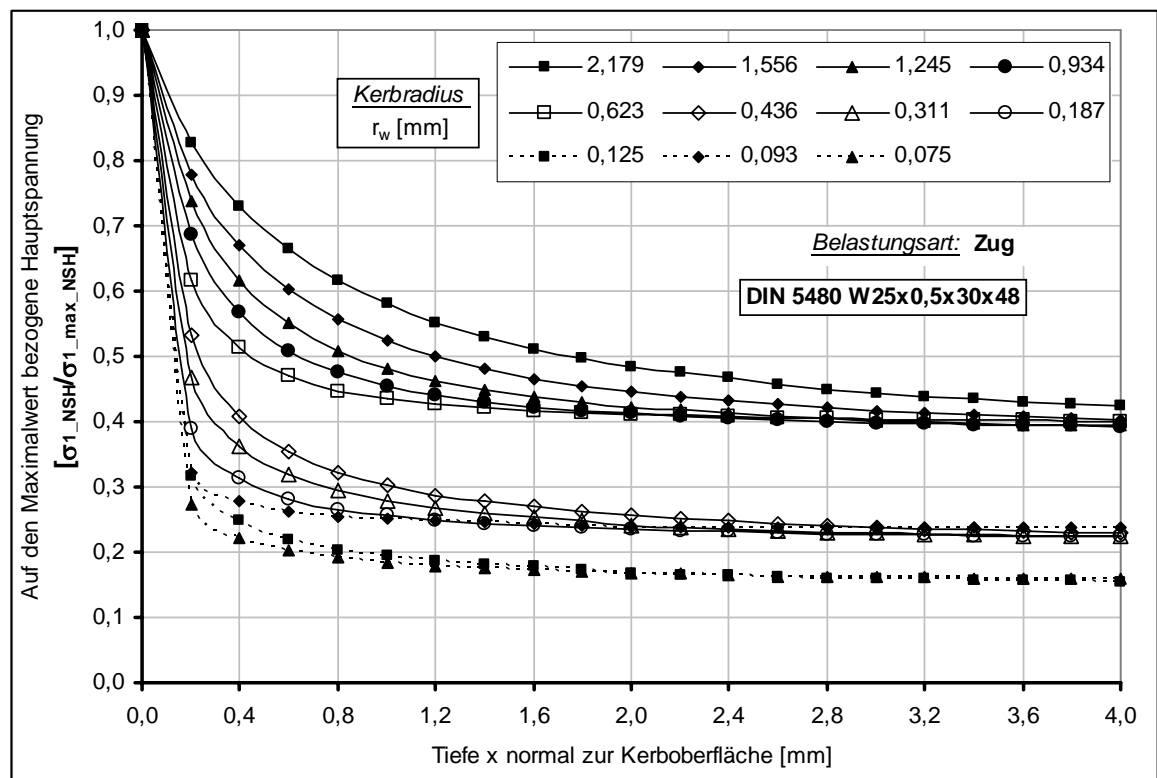


Bild D-11: W25x0,5x48 bei Zug/Druck-Belastung

Zusammenfassung der allgemeinen **Spannungstiefenverläufe** nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei **Zug/Druck-Belastung** für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrien **W40x2x18 (oben)** und **W25x0,5x48 (unten)** mit freiem Auslauf; $\sigma_{zd-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

10 Abbildungsverzeichnis

- Bild 1.1:** CAD-Modelle der zu untersuchenden Zahnwellen
- Bild 2.1:** Typische, aus der Literatur (/Sch03/, /http/, /Lin98/) entnommene Bilder von Ermüdungsbrüchen an Zahnwellen unter Torsions- und Dauerbeanspruchung
- Bild 2.2:** Gegenüberstellung prinzipieller Spannungs- und Festigkeitstiefenverläufe an einem Wellenabsatz mit harter Randschicht bei Biegebeanspruchung nach /Mel03/
- Bild 2.3:** Schematische Darstellung von Profilwellen-Verbindungen nach DIN ISO 6413 /N11/
- Bild 2.4:** Geometrie des Bezugsprofils für Zahnwellen-Verbindungen nach DIN 5480 /N1/
- Bild 2.5:** Geometrie der Profilform der Welle und Nabe für Zahnwellen-Verbindungen nach DIN 5480 /N1/
- Bild 2.6:** Zentriermöglichkeiten für Zahnwellen-Verbindungen nach /N1/; c : Kopfspiel & h_K : Kopfkantenbruch
- Bild 2.7:** Geometrie und Bezugsprofil der Zahnwellen-Verbindung am Beispiel für fillet root (volle Fußausrundung), $\alpha = 37,5^\circ$; $m = 0,5 \dots 10$; nach ANSI B 92.2M /ANSI/
- Bild 2.8:** Fußrundungsradius der Fußvollausrundung nach DIN 5480 Teil 16 /N1/
- Bild 2.9:** Verlauf der Kerbformzahl α_k für Welle und Nabe über dem Flankenwinkel α bei konstantem Verhältnis Verbindungsbreite zu Kopfkreisdurchmesser b/d_{a1} ; nach /Sch76/
- Bild 2.10:** Vergleich der Firmenangaben zum übertragbaren Drehmoment von Zahnwellenverbindungen, am Beispiel DIN 5480 50x2x24; nach /Kit96/
- Bild 2.11:** Schematische Darstellung aller möglichen, auf die Zahnwellen-Verbindung wirkenden Belastungen /N4/ (T Drehmoment, M_b Biegemoment, F_{ax} Axialkraft und F_Q Querkraft)
- Bild 2.12:** Flankennormalkraft und Wirkwinkel /N4/
- Bild 2.13:** Geometrische Stellung von Welle und Nabe (a) und Lastaufteilung bei reiner Drehmomentübertragung T einer flankenzentrierten, idealen Zahnwellen-Verbindung (b) nach /N4/
- Bild 2.14:** Darstellung der Flankennormalkräfte der Welle (a) und der Nabe (b) nach /N5/
- Bild 2.15:** Geometrische Stellung von Welle und Nabe (a) und Lastaufteilung bei reiner Querkraftübertragung Q einer flankenzentrierten, idealen Zahnwellen-Verbindung mit Spiel (b) nach /N4/
- Bild 2.16:** Lastaufteilung für Mischbelastung aus Querkraft Q und Drehmoment T mit überwiegendem Drehmoment einer flankenzentrierten, idealen Zahnwellen-Verbindung mit Spiel /N4/
- Bild 2.17:** Spanende und umformende Fertigungsverfahren zur Herstellung von Außenverzahnungen bei Vielkeilwellen
- Bild 2.18:** Dreiachsiger Spannungszustand an einem rechtwinkligen Volumenelement in kartesischen Koordinaten
- Bild 2.19:** Vergleich der mehrachsigen Bauteilbeanspruchung mit einachsigem Werkstoffkennwert nach /Bei99/
- Bild 2.20:** Verlauf der Spannungs- und Dehnungsformzahl über der Kerbgrunddehnung beispielhaft für $\alpha = 4$ nach der Neuber-Formel /Neu68/
- Bild 2.21:** Ermittlung der Kerbgrundbeanspruchung (Punkt K) mit Hilfe der Neuber-Hyperbel /Neu68/
- Bild 2.22:** Spannungstiefenverläufe an glatter Welle und Welle mit Absatz bei Biegung /Mel03/
- Bild 2.23:** Spannungstiefenverläufe an glatter Welle und Welle mit Absatz bei Torsion /Mel03/
- Bild 2.24:** Bezogenes Spannungsgefälle, beispielhaft an einer aufgesetzten Zahnwelle bei Torsion oder Biegung
- Bild 2.25:** Spannungsgefälle; a): an sanfter Kerbe und b): an scharfer Kerbe
- Bild 2.26:** Modell der Mikrostützwirkung an einer elliptischen Spitzkerbe in einer halbbunendlichen Scheibe nach /Neu68/
- Bild 2.27:** Stützzahlen n in Abhängigkeit vom bezogenen Spannungsgradienten nach /N3/
- Bild 2.28:** Neuberscher Strukturradius ρ^* , z.B. (a) in DIN 743 /N3/ oder (b) in FKM-Richtlinie /FKM1/
- Bild 2.29:** Kerbwirkungszahlen für Profilwellen bei Torsion oder Biegung nach DIN 743 /N3/

- Bild 2.30:** Rechnerisches Ersatzmodell nach Nakazawa /Nak51/
- Bild 2.31:** Torsionsformzahl als Funktion der Zähnezahzahl und des Fußausrundungsverhältnisses nach /N5/
- Bild 2.32:** Abhängigkeit des Verhältnisses d_{i1max}/m von Zähnezahzahl nach /N5/
- Bild 2.33:** Charakteristische geometrische Verhältnisse und die Formzahlen für Zug, Biegung und Torsion für rechteckige SR-Nuten in Vollwellen nach DIN 471, bezogen auf den Nutgrunddurchmesser d , in Abhängigkeit von der Nuttiefe und dem Nutradius, gültig für $m/t \geq 1,4$; nach /Hei84/
- Bild 2.34:** Charakteristischer Formzahlverlauf im Zahnfuß der eingearbeiteten Zahnwellenverbindung in Abhängigkeit von der axialen Koordinate x nach /Sch76/
- Bild 2.35:** Spannungsverteilung über der Wellen- und Nabenzahnkontur sowie qualitativer Spannungsverlauf längs der gemeinsamen Berührfläche nach /Sch76/
- Bild 2.36:** Zahnwellenverbindung mit optimalem Nabenverhältnis und der Verlauf der Belastung in der Nabe 7 und der Welle 6 nach /Sch78/
- Bild 2.37:** Parabolische Lastverteilung über der Zahnhöhe in Abhängigkeit vom Eingriffswinkel (a) und vom Profilverschiebungsfaktor (b) für Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480; nach /Die78/
- Bild 2.38:** Maximale Lastüberhöhung am Verbindungsbeginn als Funktion vom Verhältnis d_B/m bei $b = 0,5 \cdot d_B$; nach /Vil84/
- Bild 2.39:** Verläufe der maximalen Zahnfußspannungen für verschiedene Fußausrundungsradien; nach /Vil84/
- Bild 2.40:** Vergleich der Vergleichsspannungsverläufe im Wellenzahnfuß drehmomentbelasteter Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480 über der Verbindungsbreite für unterschiedliche Zähnzahlen, ($d_e/d_B = 2$), (a): Verbindungsanfangs und (u): ungestörter Wellenbereich nach /Wes96/
- Bild 2.41:** Untersuchung zur Mehrfachkerbwirkung beim Zusammentreffen von SR-Nut und Zahnfußausrundung
- Bild 3.1:** Geometrische Bezeichnungen der Zahnwelle mit freiem Auslauf (Welle mit aufgesetzter Verzahnung)
- Bild 3.2:** Geometrische Bezeichnungen der Zahnwelle mit gebundenem Auslauf und mit SR-Nut (Welle mit eingearbeiteter Verzahnung)
- Bild 3.3:** Mögliche Einbaulagen der Zahnabnabe am Beispiel der Zahnwelle mit freiem Auslauf
- Bild 3.4:** Position der Zahnabnabe „Lage I“ mit einer Entfernung vom freien Auslaufbeginn
- Bild 3.5:** Dreidimensionale FE-Volumenelemente
- Bild 3.6:** Schema zur FE-Modellerstellung /Bec04/
- Bild 3.7:** Räumliche FE-Vernetzung mit einem Hexaeder-8-Elementtyp an Zahnwellen mit freiem Auslauf
- Bild 3.8:** FE-Netze an der Zahnwelle mit gebundenem Auslauf
- Bild 3.9:** 3D-FE-Netze mit Hexaeder-8-Elementen zur Modellgegenüberstellung an Zahnwellen mit Sicherungsringnuten
- Bild 3.10:** FEM-Vernetzung der Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf
- Bild 3.11:** FEM-Netze mit einem 10-knotigen Tetraeder-Elementtyp an Zahnwellen mit gebundenem Auslauf mit und ohne Sicherungsringnut
- Bild 3.12:** Verwendung von Sektormodellen mit kleiner axialer Bohrung in der Wellenmitte für die numerischen Untersuchungen an torsionsbelasteten Zahnwellen
- Bild 3.13:** Vergleich der Proportionen der Zahnwellen
- Bild 3.14:** Einspannbedingungen bei Torsion
- Bild 3.15:** Krafteinleitung bei Torsion: Tangentiale Umfangskräfte auf dem ungestörten Wellenende; gegenüber der Einspannungsseite des Verzahnungsendes
- Bild 3.16:** Krafteinleitung bei Torsion: Tangentiale Umfangskräfte auf der Zahnflanke bei Einspannung des freien Wellenendes
- Bild 3.17:** Drehmomenteinleitung als eine im Kontaktbereich gleichmäßige Flankenpressung über der Zahnhöhe und -breite des abweichungsfreien FEM-Modells
- Bild 3.18:** Mechanische Randbedingungen und Vergleichsspannungsverhalten nach der NSH an einem torsions-

- belasteten Zahnwellensegment DIN 5480 W25x2x11; $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$
- Bild 3.19:** Einfluss des Verhältnisses Verzahnungslänge zu Bezugsdurchmesser l_z/d_b auf die Formzahlen an der Zahnwelle W25x2x11 mit freiem Auslauf; $\phi = 0^\circ$ (siehe Abschnitt 4.2.2); Drehmomenteinleitung als Umfangskräfte auf dem ungestörten Wellenbereich
- Bild 3.20:** Einfluss des Innendurchmesserverhältnisses d_w/d_{a1} auf die Formzahlen nach der NSH an den Zahnwellen W25x2x11 ($d_w/d_{a1} = d/D = 0,775$) und W40x2x18 ($d_w/d_{a1} = d/D = 0,855$), $\phi = 30^\circ$ (siehe Abschnitt 4.2.2); $r_w/t_{a1} = 0,2$ und $r_{Absatz}/t_{a1} = 0,5$
- Bild 3.21:** Grafische Darstellung der Vergleichsspannungsverläufe nach der NSH und der GEH
- Bild 3.22:** FE-Netzgestaltung für ein Halbmodell einer Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6; Knotenanzahl: 99610 und Elementanzahl: 88850
- Bild 3.23:** Vier-Punkte-Biegemodell; Belastung der Zahnwelle mit je zwei Stellen der Lagerung und der Kräfteinleitung
- Bild 3.24:** Querträger-Biegemodell; Belastung der Zahnwelle mit Biegemoment bzw. mit Querträger und entgegengesetzt angreifender Kraft
- Bild 3.25:** Querkraft-Biegemodell; Belastung der Zahnwelle mit Querkraften in radialer Richtung; mit genügender Entfernung von der Kerbe
- Bild 3.26:** Fesselung der Knotenpunkte auf der Einspannebene
- Bild 3.27:** Festlegung der Einspannbedingungen zur Simulation der Biegebeanspruchung für ein Halbmodell
- Bild 3.28:** Spannungsverteilung in einer Welle mit Absatz ($d/D = 0,8$ und $r/t = 0,4$) bei Biegebelastung
- Bild 3.29:** Ein in der Krafrichtung liegendes Formelement
- Bild 3.30:** FE-Viertelmodell für eine Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6
- Bild 3.31:** Festlegung der Randbedingungen bei der Querkraft-Biegung eines FE-Viertelmodells
- Bild 3.32:** FE-Netzgestaltung für ein Vollmodell der Zahnwelle W15x2x6 mit freiem Auslauf
- Bild 3.33:** Abhängigkeit der bezogenen Formzahl im freien Auslauf vom geometrischen Verhältnis l_w/d_w
- Bild 3.34:** Spannungsverteilung bei Querkraftbiegung der Zahnwelle W15x2x6 bei einer Hebelarmlänge von ca. $l_w = 2,5 \cdot d_w$
- Bild 3.35:** Rechnerisches Modell einer Welle für ein variables Verhältnis $\tau_{m-nenn}/\sigma_{b-nenn}$ nach /Mel00/
- Bild 3.36:** Einfluss der Querkraft auf die max. Biegespannung bzw. auf die Formzahl im freien Auslauf der Zahnwelle W15x2x6 ($d_w/d_{a1} = 0,65$; $r_w/t_{a1} = 0,1$; $d_w = 9,49 \text{ mm}$; $d_i = 1 \text{ mm}$; $x_1 = 0,2$ und $d_{h1} = 11,73 \text{ mm}$). Bedingung: $l_w/d_w = \text{const.} = 3$; $\sigma_{b-nenn-dw} = \text{const.} = 100 \text{ N/mm}^2$ und $\tau_{m-nenn-dw}$ = veränderlich. Formzahl der querkraftfreien Biegung $\alpha_{ob_NSH} = 2,88$
- Bild 3.37:** Einfluss der Querkraft auf die max. Biegespannung bzw. auf die Formzahl im freien Auslauf der Zahnwellen W15x2x6 ($d_w/d_{a1} = 0,65$; $r_w/t_{a1} = 0,1$) und W40x2x18 ($d_w/d_{a1} = 0,85$; $r_w/t_{a1} = 0,3$). Bedingung: $l_w/d_w = \text{veränderlich} = 0,05 \text{ bis } 4$; $\sigma_{b-nenn-dw} = \text{veränderlich}$; $\tau_{m-nenn-dw} = \text{const.} = 3 \text{ N/mm}^2$ für W15x2x6 und $\tau_{m-nenn-dw} = \text{const.} = 3,17 \text{ N/mm}^2$ für W40x2x18
- Bild 3.38:** Einfluss des FE-Elementtyps auf die Werte der Torsionsformzahl im Zahnfuß der verzahnten Welle DIN 5480 W25x2x11
- Bild 3.39:** Vergleichsrechnungen zur Bestimmung der Elementqualität
- Bild 3.40:** Variation der Hex-8-Elementanzahl im freien Auslaufbereich sowie im Absatzbereich
- Bild 3.41:** Feinvernetzung des Fußbereiches: 32-Elm. in der Zahnücke, 64-Elm. am Umfang, 16-Elm. im Auslaufradius und 16-Elm. in der Tiefe
- Bild 3.42:** Geometrieunterteilung der Stirnfläche des Zahnsegmentes
- Bild 3.43:** Verbesserte Unterteilung der Stirnfläche und ein entsprechendes Hex-8-Modell des Zahnwellensegmentes DIN 5480 W25x2x11
- Bild 3.44:** Verlauf und Vergleich der mit FEM ermittelten Torsionsformzahlen im ungestörten Zahnfußbereich von Zahnwellen ohne Auslauf (ein Hex-8-Netz) und Zahnwellen mit gebundenem Auslauf (ein Tet-10-Netz) nach DIN 5480; $m = 2$; mit den nach Wesolowski berechneten; Nennspannung bezogen auf d_{h1}

- Bild 3.45:** Vergleich der Formzahlen nach der NSH geometrisch ähnlicher Zahnwellen mit freiem Auslauf bei Torsion und Zug/Druck; Drehmomenteinleitung; Flankenpressung entsprechend der Nebenlage 1
- Bild 3.46:** Berechnung der Nennspannungen in N/mm^2 bei Wellen in Anlehnung an /Mel00/
- Bild 3.47:** Deformation eines kreiszylindrischen Torsionsstabes und Verteilung der Schubspannung im Querschnitt, in Anlehnung an /Göl89/
- Bild 3.48:** Charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven bei Torsion für unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} im freien Auslauf der Zahnwelle DIN 5480 W40x2x18 ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 38,6 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{h1} = 35,6 \text{ mm}$)
- Bild 3.49:** Verlauf des Verhältnisses $W_{t,\text{eff}}/W_t$ über dem Verhältnis d_{f1}/d_{a1} zur Berechnung der wahren Nennspannung der Zahnwellen nach DIN 5480 nach /Sch76/
- Bild 3.50:** Festlegung des erforderlichen Durchmessers zur Berechnung der Nennspannungen an Zahnwellen
- Bild 4.1:** Abhängigkeit der Formzahlen bei Zug, Biegung und Torsion vom auf den Wellendurchmesser bezogenen Kerbabstand a/d_w für die Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11 ($\rho_{f\text{min}}/m = 0,16$; $x_1 = 0,2 \text{ mm}$; $d_w = 19 \text{ mm}$; $d_{a1} = 24,6 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{h1} = 21,65 \text{ mm}$; $r/t_{a1}\text{-Absatz} = 0,5$; $r = 1,38 \text{ mm}$; $r_w/t_{a1} = 0,2$; $r_w = 0,55 \text{ mm}$ und $d/D = d_w/d_{a1} = 0,775$; $\phi = 0^\circ$)
- Bild 4.2:** Spannungsverteilung und Position der Spannungskonzentration an der Zahnwelle W25x2x11 mit freiem Auslauf; oben: $a/d_w = 0,25$ und unten: $a/d_w = 0$
- Bild 4.3:** Zahnwelle mit einem konischen Verzahnungsübergang
- Bild 4.4:** Abhängigkeit der Formzahlen vom konischen Übergangswinkel am Verzahnungsauslauf für die Zahnwelle DIN 5480 W40x2x18 ($\rho_{f\text{min}}/m = 0,16$; $x_1 = 0,2 \text{ mm}$; $d_w = 33 \text{ mm}$; $d_{a1} = 38,6 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{h1} = 35,6 \text{ mm}$; $r/t_{a1} = 0,5$; $r = 1,4 \text{ mm}$; $r_w/t_{a1} = 0,2$; $r_w = 0,56 \text{ mm}$ und $d/D = d_w/d_{a1} = 0,885$; $a/d_w = 0,25$; $\phi = 0^\circ \dots 60^\circ$)
- Bild 4.5:** Darstellung und Vergleich der Formzahlen nach der NSH und der GEH in Abhängigkeit vom konischen Übergangswinkel sowie vom Kerbabstandsverhältnis a/d_w (siehe dazu Bild 3.1)
- Bild 4.6:** Einfluss der Profilverschiebungsfaktoren auf die Werte der Formzahl im freien Auslauf und Zahnfuß der Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11; für eine konstante Kerbschärfe $r_w/t_{a1} = 0,1$
- Bild 4.7:** Qualitative Abhängigkeit der Torsionsformzahlen nach der NSH im freien Auslauf (a) und im Zahnfuß (b) vom Verhältnis Verbindungsbreite zu Bezugsdurchmesser b/d_B unter gleichbleibender Nennflankenpressung $p_{\text{nenn}} = 100 \text{ N/mm}^2$ für unterschiedliche Zahnwellenvarianten; Lastmodell: Flankenpressung als Ersatz für die Nebenlage (0)
- Bild 4.8:** Darstellung des Einflusses der Zähnezahlen auf die Größe der Formzahlen nach der NSH im freien Auslaufbereich bei Torsion (a), Biegung (b) und Zug/Druck (c); in Abhängigkeit vom Durchmesser Verhältnis bei konstanter Kerbschärfe, $\tau_{t\text{-nenn-NSH-dw}} = \sigma_{zd,b\text{-nenn-NSH-dw}} = 100 \text{ N/mm}^2$
- Bild 4.9:** Einfluss der Zähnezahlen auf die Formzahlen im freien Auslauf je Belastungsart; in Abhängigkeit von der Kerbschärfe bei konstantem Durchmesser Verhältnis, links: $d_w/d_{a1} = 0,65$ und rechts: $d_w/d_{a1} = 0,8$
- Bild 4.10:** Darstellung der Formzahlkurven für die Zahnwellen mit freiem Auslauf in Abhängigkeit von Zähnezahl, ($d_w = d_f - 1,6 \text{ mm}$ und $r_w/t_{a1} = 0,2$ für alle Zahnwellengeometrien)
- Bild 4.11:** Vergleich der Formzahlkurven bei Torsion im Zahnfußbereich und im freien Auslauf für Zahnwellen in Abhängigkeit von der Zähnezahl und der Nennspannungsdefinition; ($d_w = d_f - 1,6 \text{ mm}$ und $r_w/t_{a1} = 0,2$ für alle Zahnwellengeometrien)
- Bild 4.12:** Charakteristischer Verlauf der Torsionsformzahlen im Zahnfußbereich von Zahnwellen mit freiem Auslauf in Abhängigkeit von der Zähnezahl und vom Fußausrundungsverhältnis p/m
- Bild 4.13:** Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei Torsion, Biegung und Zug/Druck in Abhängigkeit von Kerbschärfe und Durchmesser Verhältnis für die Zahnwelle W 40x2x18 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2 \text{ mm}$; $d_{a1} = 38,6 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{h1} = 35,6 \text{ mm}$; $\rho_{f\text{min}}/m = 0,16$)
- Bild 4.14:** Vergleich der Formzahlen im freien Auslauf verschiedener Zahnwellen nach DIN 5480 in Abhängigkeit von der Absatzhöhe d_w/d_{a1} und der Kerbschärfe r_w/t_{a1} ; $\tau_{t\text{-nenn-NSH-dw}} = \sigma_{b,zd\text{-nenn-dw}} = 100 \text{ N/mm}^2$
- Bild 4.15:** FE-Netz der Zahnwelle W25x2x11 ($d_w = d_f$) und Ort der Spannungsspitze bei Torsion
- Bild 4.16:** Darstellung der Formzahlen im freien Auslaufbereich nach der NSH und der GEH bezogen auf den Wellendurchmesser d_w in Abhängigkeit von der Kerbschärfe für die Zahnwelle W25x2x11 ($d_w = d_f$; x_1

$$= 0,2; d_{a1} = 24,6 \text{ mm}; d_i = 2 \text{ mm}; d_{h1} = 21,65 \text{ mm}; \rho_{f\text{-}min}/m = 0,16)$$

- Bild 4.17:** Darstellung der maximalen Vergleichsspannungen bei Torsion nach der NSH und der GEH im freien Auslauf sowie im Zahnfußgebiet für die Zahnwelle W25x2x11 ($d_w = d_{f1}$) abhängig von der Kerbschärfe
- Bild 4.18:** Lage der Torsionsspannungsspitze im Zahnfuß nach der NSH oder GEH in Abhängigkeit von der Kerbschärfe
- Bild 4.19:** Untersuchte Nabenlagen (0) und (1) an der Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13), /Str07/
- Bild 4.20:** Vernetzungsmodelle der Zahnwellenverbindung mit freiem Auslauf mit und ohne SR-Nut
- Bild 4.21:** Variation der Drehmomenteinleitung, a): an der Nabe und b): am freien Wellenende), /Str07/
- Bild 4.22:** Darstellung der Vergleichsspannungsüberhöhungen bei Torsion und Biegung nach der GEH und NSH an der Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf, mit und ohne Nabe
- Bild 4.23:** Eckenbezeichnung der untersuchten Kontaktflächen an der Zahnwelle in Nabenlagen (0) und (1)
- Bild 4.24:** Vergleichsspannungsverteilung torsionsbelasteter Zahnwelle, im Kontaktbereich der Nabenlage (0)
- Bild 4.25:** Dreidimensionale Darstellung der Formzahlverläufe in Nabenlage (0) (bezogen auf den kleinsten Wellendurchmesser $d_w = 19,9 \text{ mm}$) nach der GEH und NSH für die Welle und Nabe über dem Kontaktbereich (über der Zahnhöhe und der Verbindungsbreite), /Str07/
- Bild 4.26:** Vergleichsspannungsverteilung torsionsbelasteter Zahnwelle, im Kontaktbereich der Nabenlage (1)
- Bild 4.27:** Dreidimensionale Darstellung der Formzahlverläufe in Nabenlage (1) (bezogen auf den kleinsten Wellendurchmesser $d_w = 19,9 \text{ mm}$) nach der GEH und NSH für die Welle und Nabe über dem Kontaktbereich (über der Zahnhöhe und der Verbindungsbreite), /Str07/
- Bild 4.28:** Vergleiche der Formzahlen für unterschiedliche Kerbschärfen zwischen Zahnwellen mit freiem Auslauf W25x0,5x48 bzw. W25x2x11 und äquivalenten Absätzen; $d/D = d_w/d_{a1}$ und $r/t = r_w/t_{a1}$
- Bild 4.29:** Axiales Abklingverhalten und Lage der Spannungsmaxima an Zahnwellen mit freiem Auslauf
- Bild 4.30:** Axiale Abklingung der maximalen Spannung torsionsbelasteter Zahnwellen mit freiem Auslauf
- Bild 4.31:** Darstellung des axialen Abklingverhaltens $\Delta z/d_w$ der Spannungsüberhöhung bei Torsion für die Zahnwellen W25x2x11 und W25x0,5x48 mit freiem Auslauf abhängig vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} und der Kerbschärfe r_w/t_{a1}
- Bild 4.32:** Darstellung des axialen Abklingverhaltens $\Delta z/d_w$ der Spannungsüberhöhung bei Zug/Druck bzw. Biegung für die Zahnwellen W25x2x11 und W25x0,5x48 mit freiem Auslauf abhängig vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} und der Kerbschärfe r_w/t_{a1}
- Bild 4.33:** Winkelabschätzung $\gamma [^\circ]$ zur Beschreibung des Ortes der maximalen Vergleichsspannung im freien Auslauf (hier bei Torsionsbeanspruchung nach der NSH)
- Bild 4.34:** Darstellung der Position der maximalen Spannungsüberhöhung auf der Kerbberandung im freien Auslauf der Zahnwellen W25x2x11 und W25x0,5x48 unter Torsion und Biegung abhängig von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} ; $d_w/d_{a1} = \text{beliebig}$
- Bild 4.35:** Ort des Spannungsmaximums bei Wellen mit Rundnuten
- Bild 4.36:** Ort der Maximalspannung bei Zugbelastung im freien Auslauf der Zahnwelle z.B. W15x2x6 mit $d_w/d_{a1} = 0,65$ und $r_w/t_{a1} = 0,1$
- Bild 4.37:** Ort der Maximalspannung bei Torsion (GEH bzw. NSH) im freien Auslauf der Zahnwelle; z.B. W25x2x11 mit $d_w/d_{a1} = 0,5$ und $r_w/t_{a1} = 0,4$
- Bild 4.38:** Ort der Maximalspannung bei Torsion im freien Auslauf der Zahnwellen; z.B. W15x2x6 mit $d_w/d_{a1} = 0,65$ und $r_w/t_{a1} = 0,1$; links: nach der NSH und rechts: nach der GEH)
- Bild 4.39:** Position der höchsten Hauptspannung bei Torsion nach der NSH an der Zahnwelle W25x2x11 mit $d_w/d_{a1} = 0,75$ und $r_w/t_{a1} = 1$ oder mit $d_w/d_{a1} = 0,775$ und $r_w/t_{a1} = 0,5$
- Bild 4.40:** Darstellung des Zusammenhanges zwischen den Torsionsformzahlen nach der GEH und der NSH im freien Auslauf für die Zahnwelle W25x2x11; abhängig von d_w/d_{a1} und r_w/t_{a1}
- Bild 4.41:** Torsionsformzahlverhältnisse im freien Auslauf für verschiedene Zahnwellengeometrien ($6 \leq z \leq 82$; $r_w/t_{a1} = 0,2$ und $d_w = d_{f1} - 1,6 \text{ mm}$) in Abhängigkeit vom Verhältnis Breite zu Bezugsdurchmesser b/d_B

- Bild 4.42:** Verlauf der Torsionsformzahl im ungestörten Zahnfuß der Zahnwellen mit freiem Auslauf über dem Durchmesser Verhältnis; a) bezogen auf d_w und b) auf d_{hl}
- Bild 4.43:** In der Nähe vom freien Auslauf liegende Spannungskonzentration bei Torsion nach der NSH, am Beispiel der Zahnwelle W25x2x11 mit $d_w/d_{a1} = 0,775$ und $r_w/t_{a1} = 0,1$
- Bild 4.44:** Ort der max. Torsionsspannung am Rand zwischen Zahnfuß und Auslauf; am Beispiel der Zahnwelle W25x2x11 mit $d_w/d_{a1} = 0,775$ und $r_w/t_{a1} = 0,5$
- Bild 4.45:** Wechselwirkung zwischen den Torsionsformzahlen im freien Auslaufbereich und im auslaufnahen Zahnfußbereich, nach der NSH; für die Zahnwelle W25x2x11; abhängig vom Durchmesser Verhältnis und der Kerbschärfe; die Formzahlen beider Kerbbereiche auf d_w bezogen
- Bild 4.46:** Darstellung der ermittelten Torsionsformzahlverhältnisse im Zahnfußbereich für die Zug- und Druckseiten für verschiedene Zahnwellengeometrien ($r_w/t_{a1} = 0,2$ und $d_w = d_{f1} - 1,6$ mm) infolge der Flankenpressung (Nabenlage 0); in Abhängigkeit vom Verhältnis Breite zu Bezugsdurchmesser b/d_B
- Bild 4.47:** Entscheidungshilfe zur Auswahl des technisch interessierten Durchmesser Verhältnisses d_w/d_{f1} für die Gestaltung von Zahnwellen nach DIN 5480 mit freiem Auslauf
- Bild 4.48:** Vergleich der mit FEM ermittelten Formzahlen nach der NSH im freien Auslaufbereich der Zahnwellen mit den FE-Werten der Formzahlen von äquivalenten Wellen mit Absatz sowie mit den berechneten Formzahlen nach den neuen Näherungsbeziehungen; $d/D = d_w/d_{a1}$ und $r/t = r_w/t_{a1} = 0,2$; $d_w = d_{f1} - 1,6$ mm; Nennspannung $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = \sigma_{b,zd-nenn-dw} = 100$ N/mm²
- Bild 4.49:** Vergleich der FE-Werte des bez. Spannungsgefälles für die Zahnwellen mit freiem Auslauf mit den DIN-Werten eines äquivalenten Absatzes bei Torsion, abhängig vom Kerbradius
- Bild 4.50:** Schematische Darstellung des Verlaufs der bezogenen Spannungsgefälle (normiert auf die Zähnezahlen) im freien Auslauf der Zahnwellen in Abhängigkeit vom Kerbradius
- Bild 5.1:** Formzahlverlauf im gebundenen Auslauf und Zahnfußbereich für unterschiedliche Zahnwellen nach DIN 5480; $m=2$; abhängig vom Bezugsdurchmesser Verhältnis d_B/m und der Profilverschiebung
- Bild 5.2:** Vergleich der Torsionsformzahlverläufe nach der NSH im gebundenen Auslauf abhängig von der Nennspannungsdefinition (bezogen auf d_{f1} bzw. d_{hl})
- Bild 5.3:** Geometrische Parameter der untersuchten speziellen Geometrievarianten
- Bild 5.4:** Charakteristischer Verlauf der Formzahlen im gebundenen Auslaufbereich von Zahnwellen nach DIN 5480 abhängig von Zähnzahl und Auslaufradius
- Bild 5.5:** Ort der Spannungskonzentration bei Zugbelastung nach der GEH
- Bild 5.6:** Vereinfachung der Zahnwellen mit dem gebundenen Auslauf durch Aufteilung in einen verrundeten Wellenabsatz und ein gerades Zahnwellenprofil
- Bild 5.7:** Das Modell der Ersatzplatte zur Kerbüberlagerung und Spannungsverteilung bei Durchdringungskerben (Stab mit Halbkreiskerbe und zusätzlicher Querbohrung) nach /Thu60/
- Bild 5.8:** Gegenüberstellung der Torsionsformzahlen für die Zahnwellen nach DIN 5480; $m = 2$ mm
- Bild 5.9:** Formzahlverlauf für Wellenabsatz
- Bild 5.10:** Die charakteristischen Größen für die genormten Zahnwellen nach DIN 5480 mit gebundenem Auslauf und mit standardisierten SR-Nuten nach DIN 471
- Bild 5.11:** Die Einbringung einer unter den Teilkreis reichenden SR-Nut und Variation der SR-Nutlagen an der Außenkontur der Zahnwelle DIN 5480 W60x2x28
- Bild 5.12:** Interessante Positionen zur Auswertung der Vergleichsspannungen bei Torsion
- Bild 5.13:** Ausgewählte Spannungsverläufe in der SR-Nutrundung und in der Fußausrundung sowie die Örtlichkeit der Vergleichsspannungsmaxima für die torsionsbelasteten Zahnwellen mit SR-Nut nach der GEH (oben) und der NSH (unten)
- Bild 5.14:** Einfluss der Variation der SR-Nutlage und -tiefe auf die Formzahlen in der Nutausrundung (Last- und Einspannseite) sowie im Zahnfuß unter der Nut, für die Zahnwellen W25x2x11 und W60x2x28 nach DIN 5480 mit gebundenem Auslauf und SR-Nuten DIN 471 -25x1,2 und DIN 471 -60x2
- Bild 5.15:** Geometrische Positionen der SR-Nuten mit großer Nuttiefe an der Außenkontur der Zahnwellen
- Bild 5.16:** Position und Verteilung der Vergleichsspannungen bei Zahnwellen mit einer unter den Fußkreis rei-

chenden SR-Nuttiefe

- Bild 5.17:** Darstellung der Formzahlverläufe bei Torsion in Abhängigkeit von der Kerbschärfe an der Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11 mit SR-Nut DIN 471-25x1,2
- Bild 5.18:** Vergleich des Einflusses der Variation des Auslaufradius r_w auf die Größe der Formzahlen an der Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11 mit und ohne SR-Nut
- Bild 5.19:** Zahnwelle mit gebundenem Auslauf W60x2x28 und einer SR-Nut DIN 471-60x2
- Bild 5.20:** Ermittlung der Torsionsformzahlverläufe nach der SSH, GEH und NSH in Abhängigkeit von der auf den Bezugsdurchmesser bezogenen Axialkoordinate z/d_B im Zahnfußbereich an Zahnwellen nach DIN 5480 mit Sicherungsringnuten nach DIN 471
- Bild 5.21:** Torsionsformzahlverläufe nach der SSH, GEH und NSH an der Zahnwelle W100x2x48 mit SR-Nut DIN 471-100x3 (Nuttiefe $t_{SRN} = 1,75\text{ mm}$; Nutbreite $m_{SRN} = 3,15\text{ mm}$ und Nutrundung $r_{SRN} = 0,3\text{ mm}$)
- Bild 5.22:** Torsionsformzahlverläufe nach der SSH, GEH und NSH an der Zahnwelle W60x2x28 mit SR-Nut DIN 471-60x2 (Nuttiefe $t_{SRN} = 1,5\text{ mm}$; Nutbreite $m_{SRN} = 2,15\text{ mm}$ und Nutrundung $r_{SRN} = 0,2\text{ mm}$); Belastungsmodell: Flankenpressung in einer Entfernung gleich $0,6 \cdot d_B$ von der SR-Nut
- Bild 5.23:** Vergleich der prinzipiellen Torsionsformzahlverläufe in den Nutausrundungen an Zahnwellen nach DIN 5480; Belastungsmodell: Flankenpressung in einer Entfernung gleich $0,6 \cdot d_B$ von der SR-Nut
- Bild 5.24:** Gegenüberstellung der Geometrieparameter von Zahnwelle mit SR-Nut und Absatz
- Bild 5.25:** Darstellung und Verlauf der Formzahlen nach der NSH bei Torsion, Zug/Druck und Biegung an den Sicherungsringnuten für die Kerbkombination (ZW/SRN) in Abhängigkeit vom Verhältnis Bezugsdurchmesser zu Modul d_B/m
- Bild 5.26:** Vergleich der ermittelten Formzahlen in der SR-Nut bei Zahnwellen mit den Formzahlen für die SR-Nuten bei Vollwellen nach Heinrich /Hei84/ und für den äquivalenten Absatz nach DIN 743 /N3/
- Bild 5.27:** Darstellung und Verlauf der Formzahlverhältnisse ($\alpha_{ti,ob,zd-SRN/ZW-FEM} / \alpha_{ti,ob,zd-SRN-Heinrich}$) und ($\alpha_{ti,ob,zd-SRN/ZW-FEM} / \alpha_{ti,ob,zd-Absatz-DIN\ 743}$) nach der NS-Hypothese an den Sicherungsringnuten in Zahnwellen mit gebundenem Auslauf über den geometrischen Verhältnissen a_{SRN-fl}/m bzw. d_B/m ; Nennspannung auf den Nutdurchmesser d_{SRN} bezogen
- Bild 6.1:** Probengrundgeometrien /FVA08/ der Zahnwellenverbindung nach DIN 5480 -25x1,75,13x9H 6g /N1/
- Bild 6.2:** Prüflinge mit gebundenem Auslauf und gewalzter (links) bzw. geschliffener Verzahnung (rechts), nach /FVA08/
- Bild 6.3:** Prüflinge mit freiem Auslauf und gewalzter (links) bzw. geschliffener Verzahnung (rechts), /FVA08/
- Bild 6.4:** Verwendete Versuchseinrichtungen für die dynamische Untersuchungsdurchführung, /FVA08/
- Bild 6.5:** Drehmoment-Verdrehwinkel-Verläufe bei statischer Torsion nach /FVA08/ von Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480 25x1,75,25 mit freiem und gebundenem Auslauf
- Bild 6.6:** Biegemoment-Weg-Verläufe bei statischer Biegebelastung nach /FVA08/ von Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480 25x1,75,25 mit freiem und gebundenem Auslauf
- Bild 6.7:** Aufgetretene Bruchflächen bei statischer Torsionsbelastung bis zum Bauteilversagen nach /FVA08/; gemeinsame Parameter: geschliffene Verzahnung
- Bild 6.8:** Aufgetretene Bruchflächen bei statischer Biegebelastung bis zum Bauteilversagen nach /FVA08/; gemeinsame Parameter: Werkstoff 42 CrMo 4, geschliffene Verzahnung, NL 0
- Bild 6.9:** Erreichte Schwingspielzahlen und Zeitfestigkeitsgeraden der Prüflinge bei dynamischer Torsionsbelastung, nach /FVA08/
- Bild 6.10:** Erreichte Schwingspielzahlen und Zeitfestigkeitsgeraden der Prüflinge bei dynamischer Biegebelastung, nach /FVA08/
- Bild 6.11:** Aufgetretene Bruchflächen bei dynamischer Torsionsbelastung für Prüflinge aus 42CrMo4 mit geschliffener Verzahnung, nach /FVA08/
- Bild 6.12:** Aufgetretene Bruchflächen bei dynamischer Biegebelastung für die Nabenlage (0), nach /FVA08/
- Bild 6.13:** Ort der Vergleichsspannungsspitze nach der GEH bei Biegebelastung je nach Kerbform

Abbildungen im Anhang

- Bild A-1:** Ermittlung des allgemeinen Torsionsformzahlverlaufes im Zahnfußbereich der Zugseite für die Zahnwellen mit freiem Auslauf mit unterschiedlichen Lasteinleitungsorten nach der NS-Hypothese
- Bild A-2:** Ermittlung des allgemeinen Torsionsformzahlverlaufes im Zahnfußbereich der Zugseite für die Zahnwellen mit freiem Auslauf mit unterschiedlichen Lasteinleitungsorten nach der GE-Hypothese
- Bild A-3:** Prinzipieller Torsionsformzahlverlauf in x-Richtung der Auslaufkerbe der Zahnwellen; mit Konus; $a/d_w = 0,25$; nach der NS-Hypothese
- Bild A-4:** Prinzipieller Torsionsformzahlverlauf in x-Richtung der Auslaufkerbe der Zahnwellen; mit Konus; $a/d_w = 0,25$; nach der GE-Hypothese
- Bild A-5:** Prinzipieller Torsionsformzahlverlauf in Umfangsrichtung des freien Auslaufs der Zahnwellen; mit Konus; $a/d_w = 0,25$; nach der NS-Hypothese
- Bild A-6:** Prinzipieller Torsionsformzahlverlauf in Umfangsrichtung des freien Auslaufs der Zahnwellen; mit Konus; $a/d_w = 0,25$; nach der GE-Hypothese
- Bild A-7:** Spannungsverteilungen bei Torsion und Zug/Druck an einem Absatz ($r/t = 0,4$ und $d/D = 0,8$; $d = 20$ mm; $d_i = 3,3$ mm) im Vergleich zu einer Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6 ($r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$; $d_w = 9,49$ mm; $d_i = 1$ mm); Die Nennspannung ist auf den Wellendurchmesser d_w bezogen
- Bild A-8:** Ort der Spannungskonzentration im freien Auslauf der Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6 ($r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$) bei Torsion, Zug/Druck und bei zusammengesetzter Belastung aus Zug und Torsion
- Bild A-9:** Vergleich der Torsionsformzahlverläufe (bezogen auf den Ersatzdurchmesser $d_{h1} = 22,05$ mm) entlang der Zahnwelle (im Zahnfuß- und Auslaufbereich der Zugseite) nach DIN 5480 W25x1,75x13 mit freiem und gebundenem Auslauf sowie mit und ohne Sicherungsringnut, für unterschiedliche Drehmomenteinleitungen als Flankenpressung in der Nabelage (0) und in der Nabelage (1) sowie als Umfangskräfte am ungestörten Wellenende
- Bild A-10:** Darstellung der geometrischen Lage der Flankenpressung in Nabelage 0 und 1 für die Zahnwelle mit gebundenem Auslauf
- Bild A-11:** Vergleich der Torsionsformzahlverläufe (bezogen auf $d_{h1} = 22,05$ mm) entlang der Zahnwelle (im Zahnfuß- und Auslaufbereich der Zugseite) nach DIN 5480 W25x1,75x13 mit freiem und gebundenem Auslauf, mit und ohne SRN, sowie entlang der Kerbzahnwelle DIN 5481 W24x21, Flankenpressung in Nabelage (0) und in Nabelage (1)
- Bild B-1:** Vergleich der Vergleichsspannungsverteilung nach der NSH und der GEH, oben: an der Zahnwelle und unten: am Wellenabsatz, links: bei Querkraftbiegung und rechts: bei Querträger- oder Vierpunkte-Biegung. Die Nennspannung ist je Lasteinleitungsmodell auf den Wellendurchmesser d_w im Kerbgrund bezogen
- Bild B-2:** Vergleichsspannungsverteilung und Lage der Spannungsmaxima nach der NSH bei Biegung (Vierpunkte-, Querträger- und Querkraftbiegung) einer Zahnwelle mit freiem Auslauf, DIN 5480 W15x2x6 ($r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$); die Nennspannung ist auf den Wellendurchmesser d_w bezogen
- Bild B-3:** Spannungsverteilungen nach der GEH und NSH an einem Absatz im Vergleich zu einer Zahnwelle; oben: bei Querträger- oder Vierpunkte-Biegung und unten: bei Querkraftbiegung, links: in einem durch den Krafteinleitungseinfluss ungestörten Vorder-Querschnitt und rechts: an der Einspannebene
- Bild B-4:** Verteilung der Vergleichsspannung nach der NSH durch Querkraftbiegung bei der Verwendung eines Vollmodells, Halbmodells und Viertelmodells, oben: Wellenabsatz ($d = 20$ mm; $D = 25$ mm; $d_i = 1$ mm; $r = 1$ mm; $r/t = 0,4$ und $d/D = 0,8$) und unten: Zahnwelle mit freiem Auslauf ($d_w = 9,49$ mm; $d_i = 1$ mm; $d_{h1} = 11,73$ mm; $r_w = 0,255$ mm; $r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$)
- Bild B-5:** Darstellung des Verformungsverhaltens einer Zahnwelle durch Querkraftbiegung bei der Verwendung eines Vollmodells, Halbmodells und Viertelmodells
- Bild C-1:** Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei Torsion, Biegung und Zug/Druck in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} für die Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 14,6$ mm; $d_i = 1$ mm; $d_{h1} = 11,735$ mm; $\rho_{f-min}/m = 0,16$); links: Nennspannung auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und rechts: Nennspannung auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen
- Bild C-2:** Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei Torsion in Abhän-

- gigkeit von Kerbschärfe und Durchmesser Verhältnis für die Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 24,6$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 21,65$ mm; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$); links: Nennspannung auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und rechts: auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen
- Bild C-3:** Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei Biegung und Zug/Druck in Abhängigkeit von Kerbschärfe und Durchmesser Verhältnis für die Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 24,6$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 21,65$ mm; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$); links: Nennspannung auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und rechts: auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen
- Bild C-4:** Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei Torsion, Biegung und Zug/Druck in Abhängigkeit von Kerbschärfe und Durchmesser Verhältnis für die Zahnwelle DIN 5480 W40x2x18 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 38,6$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 35,6$ mm; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$); links: Nennspannung auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und rechts: auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen
- Bild C-5:** Darstellung und charakteristischer Verlauf der Formzahlkurven nach der NSH bei Torsion und Zug/Druck in Abhängigkeit von Kerbschärfe und Durchmesser Verhältnis für die Zahnwelle DIN 5480 W25x0,5x48 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,45$; $d_{a1} = 24,9$ mm; $d_i = 2$ mm; $d_{h1} = 24,142$ mm; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$); links: Nennspannung auf den Wellendurchmesser d_w bezogen und rechts: auf den Ersatzdurchmesser d_{h1} bezogen
- Bild C-6:** Darstellung der interessanten Positionen der Vergleichsspannungsüberhöhungen (σ_{v-GEH}) nach der GEH an der torsionsbelasteten Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf; a) für die Nabenlage (0) und b) für die Nabenlage (1); /Str07/
- Bild C-7:** Darstellung der interessanten Positionen der Vergleichsspannungsüberhöhungen (σ_{v-NSH_I}) nach der NSH an der torsionsbelasteten Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf; a) für die Nabenlage (0) und b) für die Nabenlage (1); /Str07/
- Bild C-8:** Darstellung der interessanten Positionen der Vergleichsspannungsüberhöhungen an der torsionsbelasteten Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf und Nabenlage (1) sowie mit der SR-Nut DIN 471 – 25 x 1,2; a) nach der GEH (σ_{v-GEH}) und b) nach der NSH (σ_{v-NSH_I}); /Str07/
- Bild D-1 bis D-2:** Zusammenfassung der allgemeinen Spannungstiefenverläufe nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei Torsionsbelastung für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrien W15x2x6 (oben) und W25x2x11 (unten) mit freiem Auslauf; $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = 100$ N/mm²
- Bild D-3 bis D-4:** Zusammenfassung der allgemeinen Spannungstiefenverläufe nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei Torsionsbelastung für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrien W40x2x18 (oben) und W25x0,5x48 (unten) mit freiem Auslauf; $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = 100$ N/mm²
- Bild D-5 bis D-6:** Zusammenfassung der allgemeinen Spannungstiefenverläufe nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei Biegebelastung für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrien W15x2x6 (oben) und W25x2x11 (unten) mit freiem Auslauf; $\sigma_{b-nenn-NSH-dw} = 100$ N/mm²
- Bild D-7:** Zusammenfassung der allgemeinen Spannungstiefenverläufe nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei Biegebelastung für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrie W40x2x18 mit freiem Auslauf; $\sigma_{b-nenn-NSH-dw} = 100$ N/mm²
- Bild D-8 bis D-9:** Zusammenfassung der allgemeinen Spannungstiefenverläufe nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei Zug/Druck-Belastung für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrien W15x2x6 (oben) und W25x2x11 (unten) mit freiem Auslauf; $\sigma_{zd-nenn-NSH-dw} = 100$ N/mm²
- Bild D-10 bis D-11:** Zusammenfassung der allgemeinen Spannungstiefenverläufe nach der NSH, bezogen auf die maximale Spannung bei Zug/Druck-Belastung für die Stelle der max. Spannungsüberhöhung, für die Zahnwellengeometrien W40x2x18 (oben) und W25x0,5x48 (unten) mit freiem Auslauf; $\sigma_{zd-nenn-NSH-dw} = 100$ N/mm²

11 Tabellenverzeichnis

- Tabelle 2.1:** Näherungsbeziehungen für die Berechnung des bezogenen Spannungsgradienten für Wellen (Voll-Rundstabproben) mit Umlaufkerbe bzw. mit Absatz bei unterschiedlichen Belastungsarten in Abhängigkeit vom Kerbradius und Wellendurchmesser, entnommen aus der Literatur /Thu60/, /Wel76/, /Rad03/, /TGL1/, /FKM1/ und /N3/
- Tabelle 2.2:** Berechnung der Stützzahlen für Normal- und Schubspannungen nach /FKM1/
- Tabelle 2.3:** Konstanten a_G und b_G für Stahl-, Eisen- und Aluminiumwerkstoffe nach /FKM1/
- Tabelle 2.4:** Modifikation der Stützzahlen für Normalspannungen nach Niessner /Nie03/
- Tabelle 2.5:** Größe a^* gekerbter Bauteile aus Stahl bei Biegung nach Peterson, entnommen bei /Rad03/
- Tabelle 2.6:** Berechnungsgrößen für die Stützziffern nach Dietmann /Die85/
- Tabelle 2.7:** Näherungsformeln zur Berechnung der Kerbwirkungszahlen für Keil-, Kerbzahn- und Zahnwellen bei Torsion oder Biegung nach /N3/
- Tabelle 2.8:** Anhaltswerte für Kerbwirkungszahlen bei Torsion für Profilwellen nach /TGL1/
- Tabelle 2.9:** Anhaltswerte für die Kerbwirkungszahlen und Formzahlen an Profilwellen bei Torsion oder Biegung für den Zahnfußbereich ohne Nabeneinfluss nach /Dec98/ und /Rol03/
- Tabelle 2.10:** Angaben zur Berechnung der Formzahlen je Belastungsart für Zahnwelle und Nabe nach /N5/
- Tabelle 2.11:** Gleichungen zur Berechnung der Formzahlen an Wellen mit SR-Nuten nach /Hei84/
- Tabelle 2.12:** Näherungsformeln für die Kerbwirkungszahlen an Wellen mit SR-Nuten nach /N3/ bzw. /FKM1/
- Tabelle 2.13:** Koeffizienten zur Formzahlberechnung bei Wellen mit Umdrehungskernen nach /Mel00/
- Tabelle 3.1:** Ermittlung der Formzahlen bei Biegung für die Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6 mit freiem Auslauf in Abhängigkeit vom Biegebelastungsmodell und vom in Kraftrichtung liegenden Formelement (Zahn bzw. Zahnücke). Kerbparameter: $d_w = 9,49 \text{ mm}$; $d_{h1} = 11,73 \text{ mm}$; $r_w = 0,255 \text{ mm}$; $r_w/t_{a1} = 0,1$ und $d_w/d_{a1} = 0,65$. $l_w \approx 3 \cdot d_w$ und $\sigma_{b-nenn-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$ sind für alle dargestellten Modelle konstant.
- Tabelle 3.2:** Vergleich der Formzahlen bei Biegung eines Sektormodells mit 90; $\sigma_{b-nenn-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$ je Biegemodell; $l_w \approx 3 \cdot d_w$
- Tabelle 3.3:** Gestalt des FE-Modells nach der Art der Belastung
- Tabelle 3.4:** Einfluss der Variation der Anzahl der Hex- 8-Elemente im Kerbradius auf die Formzahlwerte nach der NSH und der GEH bei Torsion und Zug/Druck sowohl im freien Auslauf als auch im Absatzbereich für die Zahnwelle W25x2x11 ($d_w/d_{a1} = d/D = 0,775$; $d_i = 9,53 \text{ mm}$; $d_i/d_w = 0,5$; $t = t_{a1} = 2,77 \text{ mm}$; $r_w/t_{a1} = 0,2$; $r/t = 0,5$; $a/d_w = 0,25$); $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = \sigma_{zd-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$
- Tabelle 3.5:** Einfluss der Variation der Anzahl der Hex- 8-Elemente im Fußbereich auf die Torsionsformzahlen nach der NSH und der GEH; $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = \sigma_{zd-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$
- Tabelle 3.6:** Ergebnisse der Netzverfeinerung im Zahnfußbereich und in radialer Richtung für das Zahnwellensegment DIN 5480 W25x2x11
- Tabelle 3.7:** Vergleich der mit den FE-Modellen ermittelten Torsionsformzahlen im ungestörten Zahnfußbereich für verschiedenen Zahnwellen mit den berechneten Werten nach Wesolowski
- Tabelle 3.8:** Einfluss der Querkontraktionszahl auf die Spannungsformzahlen; die Nennspannung von 100 N/mm^2 ist für Absatz und Zahnwelle auf den Wellendurchmesser d_w bezogen
- Tabelle 3.9:** Berechnung der Querschnittskenngößen je nach Belastungsart für die Zahnwellen
- Tabelle 3.10:** Formeln zur Umrechnung der Nennspannungen je nach Belastungsart
- Tabelle 4.1:** Zahlenwerte der Formzahlen im freien Auslauf je Belastungsart abhängig vom Verhältnis a/d_w für die Zahnwelle W25x2x11 ($d_w = 19 \text{ mm}$; $d_{a1} = 24,6 \text{ mm}$; $r_w/t_{a1} = 0,2$ und $d_w/d_{a1} = 0,775$; $\phi = 0^\circ$)
- Tabelle 4.2:** Näherungszusammenhänge zur Bestimmung des Kerbabstandes nach der NSH oder GEH zwischen zweier Zahnwellen mit freien Ausläufen (z.B. zwischen W25x0,5x48 und W25x2x11 oder

	<i>W25x0,5x48 und W25x0,5x48) bzw. zwischen freiem Auslauf und äquivalentem Absatz</i>
Tabelle 4.3:	<i>Näherungszusammenhänge zwischen den ermittelten Spannungsformzahlen im freien Auslauf</i>
Tabelle 4.4:	<i>Geometrische Parameter der untersuchten Zahnwellenverbindung mit freiem Auslauf</i>
Tabelle 4.5:	<i>Torsionsformzahlen an der Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf abhängig von der Variation der Nabenlage: NL (0) unmittelbar am Auslaufbeginn und NL (1) entfernt vom Auslaufbeginn, mit und ohne SR-Nut DIN 471 – 25 x 1,2, K/K-Kv: Knoten/Knoten-Kontaktverfahren und M/S-Kv: Master/Slave-Kontaktverfahren, $d_w = 19,9$ mm, $d_{hl} = 22,05$ mm und $d_{SRN} = 23,55$ mm</i>
Tabelle 4.6:	<i>Formzahlen bei Biegebelastung im freien Auslaufbereich der Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13, für Hohl- und Vollwelle, mit und ohne Nabeneinfluss</i>
Tabelle 4.7:	<i>Vergleich der mit der FEM gewonnenen Formzahlen mit den aus der Fachliteratur entnommenen Formzahlen bzw. Kerbwirkungszahlen bei Torsionsbelastung, entsprechend der Geometrie der Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13</i>
Tabelle 4.8:	<i>Zusammenhänge zwischen den Torsionsformzahlen und den Vergleichsspannungen (GEH bzw. NSH)</i>
Tabelle 4.9:	<i>Vergleich der berechneten bezogenen Spannungsgradienten (Anlehnung an Melzer /Mel00/) mit den DIN-Werten an abgesetzten Wellen mit scharfen Radien je nach Belastungsart</i>
Tabelle 4.10:	<i>Neue Näherungsgleichungen zur Berechnung des bezogenen Spannungsgradienten nach der NSH und GEH bei Torsion, Biegung und Zug/Druck für die Zahnwellen mit freiem Auslauf</i>
Tabelle 5.1:	<i>Näherungsformeln zur Berechnung der Torsionsformzahlen an Zahnwellen mit gebundenem Auslauf in Abhängigkeit vom Profilverschiebungsfaktor</i>
Tabelle 5.2:	<i>Die Formzahlen im Absatz und im reinen gebundenen Auslauf bei Torsion und Zug/Druck</i>
Tabelle 5.3:	<i>Näherungsformeln zur Beschreibung des Einflusses des Auslaufradius auf die Formzahl</i>
Tabelle 5.4:	<i>Formzahlwerte an Zahnwellen mit gebundenem Auslauf in Abhängigkeit von Belastungsart, Zähnezahl und Kerbform</i>
Tabelle 5.5:	<i>Werte der Torsionsformzahl an der Zahnwelle W60x2x28 mit gebundenem Auslauf und SR-Nut (mit und ohne Umlaufkerbe)</i>
Tabelle 5.6:	<i>Zusammenstellung der geometrischen Abmessungen der Zahnwellengeometrien nach DIN 5480 und der Sicherungsringnuten nach DIN 471</i>
Tabelle 5.7:	<i>Formzahlen an Sicherungsringnuten bei Zahnwellen mit gebundenem Auslauf und ihre Vergleichsergebnisse je nach Belastungsart</i>
Tabelle 5.8:	<i>Näherungsformeln zur Formzahlbeschreibung nach der NSH je nach Belastungsart (Torsion, Biegung und Zug) in den SR-Nuten nach DIN 471 an Vollzahnwellen nach DIN 5480 in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis d_B/m bzw. a_{SRN-fl}/m</i>
Tabelle 5.9:	<i>Ermittelte Faktoren zur leichteren Handhabung der neu entwickelten Näherungsformeln</i>
Tabelle 6.1:	<i>Übersicht zu den im Mittelpunkt stehenden Merkmalsvariationen für die Experimente</i>
Tabelle 6.2:	<i>Ergebnisse aus den statischen Zugversuchen (Mittelwerte), ermittelt mit jeweils zehn Zugproben B 6 x 30 nach DIN 50125 /N18/, Probendurchmesser $d_0 = 6$ mm, /FVA08/</i>
Tabelle 6.3:	<i>Ergebnisse aus den Härtemessungen (Mittelwerte) nach Vickers und umgerechnete Zugfestigkeiten, /FVA08/</i>
Tabelle 6.4:	<i>Ertragene Nennspannungen in N/mm² aus den statischen Torsionsuntersuchungen, /FVA08/</i>
Tabelle 6.5:	<i>Ertragene Nennspannungen in N/mm² aus den statischen Biegeversuchen, /FVA08/</i>
Tabelle 6.6:	<i>Ertragene Nennspannungen in N/mm² aus den dynamischen Untersuchungen (dynamische Biegung und Torsion, $5 \cdot 10^6 \leq N_D \leq 10^7$), 18CrNiMo7 (blindgehärtet) und 42CrMo4 (vergütet)</i>
Tabelle 6.7:	<i>Steigungen k der Festigkeitsgeraden und Bestimmtheitsmaße R^2 bei dynamischer Torsion, /FVA08/</i>
Tabelle 6.8:	<i>Steigungen k der Festigkeitsgeraden und Bestimmtheitsmaße R^2 bei dynamischer Biegung, /FVA08/</i>

- Tabelle 6.9:** Wechselfestigkeiten in N/mm^2 der glatten Proben; $K_2(19) = 0,938$; $K_2(22,05) = 0,928$ und $K_2(23,1) = 0,925$
- Tabelle 6.10:** Vergleich zwischen den mit der FEM ermittelten Form- und Kerbwirkungszahlen und den experimentellen Kerbwirkungszahlen bei Torsion und Biegung für die Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem Auslauf und Nabenlage (0)
- Tabelle 6.11:** Vergleich zwischen den mit der FEM ermittelten Form- und Kerbwirkungszahlen und den experimentellen Kerbwirkungszahlen bei Torsion und Biegung für die Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit gebundenem Auslauf mit und ohne SR-Nut und Nabenlage (0)
- Tabelle 6.12:** Vergleichende Darstellung der experimentellen Kerbwirkungszahlen /FVA08/ bezogen auf den Ersatzdurchmesser d_{hl} bei Torsion und Biegung für die Zahnwellenverbindung DIN 5480 -25x1,75x13 mit freiem und gebundenem Auslauf mit und ohne SR-Nut und Nabenlage (0), mit geschliffener und gewalzter Verzahnung

Tabellen im Anhang

- Tabelle A-1:** Modellerte geometrische Abmessungen der aufgesetzten Zahnwellen und verwendete Größen der Modelle für die numerischen Berechnungen
- Tabelle B-1:** Einfluss der Querkraft auf die max. Biegespannung bzw. auf die Formzahl im freien Auslauf der Zahnwellen W15x2x6 ($d_w/d_{a1} = 0,65$; $r_w/t_{a1} = 0,1$) und W40x2x18 ($d_w/d_{a1} = 0,85$; $r_w/t_{a1} = 0,3$). Das Verhältnis Hebelarmlänge/Wellendurchmesser $l_w/d_w = \text{veränderlich} = 0,05 \text{ bis } 4$. Bedingung: $\sigma_{b-nenn} = \text{veränderlich}$; $\tau_{m-nenn} = \text{const.} = 3 \text{ N/mm}^2$ für W15x2x6 und $\tau_{m-nenn} = \text{const.} = 3,17 \text{ N/mm}^2$ für W40x2x18
- Tabelle B-2:** Einfluss der Querkraft auf die max. Biegespannung bzw. auf die Formzahl im freien Auslauf der Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6 ($d_w/d_{a1} = 0,65$; $r_w/t_{a1} = 0,1$; $d_w = 9,49 \text{ mm}$; $d_i = 1 \text{ mm}$; $x = 0,2$ und $d_{hl} = 11,73 \text{ mm}$). Das Verhältnis Hebelarmlänge/Wellendurchmesser $l_w/d_w = 3 = \text{const.}$ Nennspannung bei Querträgerbiegung $\sigma_{b-nenn} = \text{const.} = 100 \text{ N/mm}^2$; $\tau_{m-nenn} = \text{veränderlich}$. Formzahl der querkraftfreien Biegung $\alpha_{ob_NSH} = 2,88$
- Tabelle C-1:** Formzahlwerte in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} für die Zahnwelle DIN 5480 W15x2x6 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 14,6 \text{ mm}$; $d_i = 1 \text{ mm}$; $d_{hl} = 11,735 \text{ mm}$; $\rho_{f-min}/m = 0,16$) für zwei unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen d_w und d_{hl}
- Tabelle C-2:** Formzahlwerte in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} für die Zahnwelle DIN 5480 W25x2x11 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 24,6 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{hl} = 21,65 \text{ mm}$; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$) für zwei unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen d_w und d_{hl}
- Tabelle C-3:** Formzahlwerte in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} für die Zahnwelle DIN 5480 W40x2x18 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,2$; $d_{a1} = 38,6 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{hl} = 35,6 \text{ mm}$; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$) für zwei unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen d_w und d_{hl}
- Tabelle C-4:** Formzahlwerte in Abhängigkeit von der Kerbschärfe r_w/t_{a1} und vom Durchmesser Verhältnis d_w/d_{a1} für die Zahnwelle DIN 5480 W25x0,5x48 mit freiem Auslauf ($x_1 = 0,45$; $d_{a1} = 24,9 \text{ mm}$; $d_i = 2 \text{ mm}$; $d_{hl} = 24,142 \text{ mm}$; $\rho_{Fmin}/m = 0,16$) für zwei unterschiedliche Nennspannungsdefinitionen d_w und d_{hl}
- Tabellen D-1 bis D-4:** FE-berechnete Werte der bezogenen Spannungsgefälle (oben) sowie die Formzahlverläufe (unten) bei Torsion für die Zahnwellen mit freiem Auslauf nach DIN 5480 (W15x2x6; W25x2x30x11; W40x2x18; W25x0,5x48), $\tau_{t-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$
- Tabellen D-5 bis D-7:** FE-berechnete Werte der bezogenen Spannungsgefälle (oben) sowie die Formzahlverläufe (unten) bei Biegung für die Zahnwellen mit freiem Auslauf nach DIN 5480 (W15x2x6; W25x2x11; W40x2x18), $\sigma_{b-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$
- Tabellen D-8 bis D-11:** FE-berechnete Werte der bezogenen Spannungsgefälle (oben) sowie die Formzahlverläufe (unten) bei Zug/Druck für die Zahnwellen mit freiem Auslauf nach DIN 5480 (W15x2x6; W25x2x11; W40x2x18; W25x0,5x48), $\sigma_{zd-nenn-NSH-dw} = 100 \text{ N/mm}^2$

Tabellarischer Lebenslauf

Persönliche Daten

Vorname, Name: Ali Daryusi
 Geburtsdatum: 07. Januar 1969
 Geburtsort: Besnada / Lattakia / Syrien
 Nationalität: Deutsch
 Familienstand: Ledig, keine Kinder



Kontaktdaten: Mailadresse: daryusi@yahoo.de

Schulbildung:

1975 – 1987 Grundschule / Mittelschule / Oberschule (Gymnasium) in Besnada/Lattakia

Ausbildung und Berufstätigkeit in Syrien

Studium:

09/1987 – 09/1993 Studiengang Maschinenbau an der Universität *Tischreen* in Lattakia/Syrien
 Schwerpunkt: Konstruktions- und Produktionstechnik

Berufstätigkeit:

10/1993 – 05/1994 Wissenschaftlicher Assistent an der Fakultät für den Maschinenbau der
 06/1997 – 05/1998 Universität *Tischreen* in Lattakia/Syrien

Wehrdienst:

05/1995 – 05/1997 Als Offizier in Damaskus

Ausbildung und Berufstätigkeit in Deutschland

Studium:

06/1998 – 05/1999 Ankunft in Deutschland und Teilnahme an einem Deutschkurs am Herder-
 Institut der Universität Leipzig
 09/1999 – 09/2001 Absolvieren des Hauptstudiums an der Gerhard-Mercator-Universität Duis-
 burg in Fachrichtung der Konstruktionstechnik: Abschluss: Dip.-Ing.

Berufstätigkeit:

09/2000 – 08/2001 Stud. Hilfskraft am Lehrstuhl für Umformtechnik an der Uni. Dortmund
 03/2002 – 10/2002 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Forschungsgruppe Klebtechnik an
 der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule RWTH-Aachen
 02/2003 – 03/2007 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Maschinenelemente und Ma-
 schinenkonstruktion (IMM) an der Technischen Universität in Dresden
 04/2007 – 12/2007 FEM-Berechnungsingenieur bei der Firma IAMT „Ingenieurgesellschaft
 für allgemeine Maschinentechnik mbH“ in Weischlitz - Plauen
 Seit 2008 Entwicklungs- und Berechnungsingenieur bei der Firma „Winergy AG“ in
 Voerde-Friedrichsfeld (Niederrhein)

Aachen, den 15.04.2009